MATEMÁTICA PARA EL INGRESO A CIENCIAS ECONÓMICAS

Angélica E. Astorga

y

Mónica Lisi

Estudio de Diseño

Imagen de Tapa: Prof. Mónica Lisi

Diseño de Interiores: Esp. Angélica E. Astorga de Bárcena y Prof. Mónica Lisi

Diagramación: Esp. Angélica E. Astorga de Bárcena y Prof. Mónica Lisi

Revisión y Corrección: Prof. Nilda Graciela Méndez

Astorga, Angélica Elvira

Matemática para el Ingreso a Ciencias Económicas: matemática para el ingreso / Angélica Elvira Astorga; Mónica Lisi; coordinación general de Angélica Elvira Astorga; Mónica Lisi; ilustrado por Angélica Elvira Astorga; Mónica Lisi. - 1a edición para el alumno - Salta: Angélica Elvira Astorga, 2019.

125 p.: il.; 29 x 21 cm.

ISBN 978-987-778-947-8

1. Matemática. I. Astorga, Angélica Elvira, coord. II. Lisi, Mónica, coord. III. Astorga, Angélica Elvira, ilus. IV. Lisi, Mónica, ilus. V. Título.

CDD 510.711

ISBN 978-987-778-947-8

9 789877 789478

Angélica Elvira Astorga de Bárcena: Actualmente es Profesora Titular Regular de la Cátedra Matemática I de primer año de las carreras de Contador Público Nacional, Licenciatura en Economía y Licenciatura en Administración y Coordinadora del Área de Matemática del Servicio de Apoyo Educativo (SAE) de la Facultad de Ciencias Económicas, Jurídicas y Sociales de la Universidad Nacional de Salta.

- Profesora en Matemática y Física (otorgado por la Facultad de Ciencias Exactas de la U.N.Sa.)

- Especialista en Investigación Educativa (otorgado por la Facultad de Arquitectura y Urbanismo de la U.N.T.).

Mónica Lisi: Actualmente es Profesora Asociada Regular de la Cátedra Matemática I de primer año de las carreras de Contador Público Nacional, Licenciatura en Economía y Licenciatura en Administración de la Facultad

- Profesora en Matemática y Física (otorgado por la Facultad de Ciencias Exactas de la U.N.Sa.)

Prólogo

Matemática para el ingreso a Ciencias Económicas es un libro cuyo principal objetivo es ayudar a los estudiantes ingresantes en sus primeros acercamientos a la matemática universitaria, y será también un apoyo porque fue diseñado para facilitar la lectura y comprensión. Ha sido pensado con gran dedicación y preocupación por sus autoras, quienes además poseen el talento de usar un lenguaje accesible y afable para facilitar la comprensión de los conceptos matemáticos y han seleccionado cuidadosamente los ejemplos que acompañan las definiciones y aplicaciones.

La edición de este libro se constituye además en un valioso aporte a la necesaria articulación entre el nivel secundario y el universitario, introduciendo de manera gradual y de modo accesible el lenguaje específico de la matemática. Al transitar por los distintos temas y las aplicaciones que se presentan en el mismo, se brindan los elementos necesarios para orientar la resolución de los trabajos prácticos que se proponen y que le permiten al estudiante afianzar los conceptos matemáticos. Además, se observa que, en diferentes párrafos, se ha tenido en cuenta el planteo de cuestionamientos que ayudan a superar dificultades de orden epistemológico, entre otras.

Se destaca la organización en el desarrollo de cada tema a partir de una breve introducción, curiosidades matemáticas, un poquito de historia y, como elementos innovadores, la propuesta de metacognición para los alumnos y la presentación de conjeturas que promueven el razonamiento matemático y la argumentación. Por otro lado, y teniendo en cuenta los destinatarios se han seleccionado muy interesantes y actuales aplicaciones económicas que integran conceptos matemáticos.

Las trayectorias de sus autoras- investigadoras y su permanente preocupación por la enseñanza de la matemática avalan la calidad del contenido elaborado en cada página de este libro y han producido un material que puede ser usado además como referente por otros docentes para la enseñanza de conjuntos, conjuntos numéricos, expresiones algebraicas y polinomios, ecuaciones lineales y cuadráticas, ecuación de la recta y sistemas de ecuaciones lineales.

Finalmente, y por la dedicación puesta en la elaboración del libro auguro un beneficioso uso por los estudiantes.

Prof. Nilda Graciela Méndez

Índice General

TEMA I

CONJUNTOS

TEMA I "CONJUNTOS"

Introducción

Casi todo el mundo reconoce la importancia de estudiar la matemática, pero no a todos les atrae; tal vez porque no ven en ella más que símbolos difíciles de entender y muy alejados de la vida cotidiana.

Sin embargo la Matemática nos propone abrir nuestra mente a un pensamiento abstracto que luego tendrá infinitas aplicaciones en lo concreto.

Cantor (1845-1918) dijo: "La esencia de la Matemática es su libertad".

La Matemática pura puede ser considerada como una de las creaciones más originales del espíritu humano porque en ella se establecen relaciones abstractas, y en la simplicidad y coherencia de la abstracción reside una gran belleza.

Pero, ***¿cómo se llega al descubrimiento matemático***? Un matemático al igual que un pintor o un poeta, es un creador de modelos. Un pintor crea sus modelos con colores y formas; un poeta, con palabras, y un matemático, con ideas; por ello, los modelos matemáticos son tan permanentes, y algunos que aparecieron totalmente inútiles en sus orígenes resultaron más tarde aplicables a otras áreas.

La matemática y su lenguaje

El hombre es un ser sociable que, desde los tiempos más remotos, necesitó comunicarse permanentemente con sus pares. De su necesidad de transmitir ideas y vivencias nacieron los distintos lenguajes.

Estos lenguajes gráficos, simbólicos, coloquiales, etc. permitieron la evolución de la organización del pensamiento; para ello, también fue esencial el desarrollo de las representaciones matemáticas y la evolución del lenguaje matemático.

Así algunos de los símbolos que usaremos a lo largo de este libro son los siguientes:

Símbolo	Significado	Símbolo	Significado
$\cup$	unión	$\cap$	intersección
$\geq$	mayor o igual que	$\leq$	menor o igual que
$>$	mayor que	$<$	menor que
$\in$	pertenece a	$\notin$	no pertenece a
$\subset$	está incluido en	$\subseteq$	está incluido ampliamente en
$\neq$	no es igual a, o es distinto a	ϕ	conjunto vacío

Un poquito de historia…

La necesidad de contar y cuantificar las cosas, es decir la utilización de los números, acompañan al ser humano desde que este puede ser considerado como tal.

Al principio bastaba con ir haciendo muescas en un espacio determinado como en un árbol, un hueso o en una pared. Pero la llegada de la agricultura y la ganadería comenzaron a complicar las cosas. Las cantidades empezaban a ser demasiado grandes como para ayudarse con las muescas y, además, esos números debían perdurar en el tiempo y ser comprensibles para las generaciones futuras.

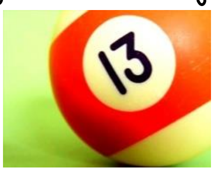
Por ese motivo, y desde el principio de los tiempos, cada sociedad fue desarrollando su particular modo de representar los números hasta llegar a los que usamos hoy en día.

Los números **naturales** y las **fracciones** tuvieron un desarrollo relativamente temprano que se apoyó en la experimentación con magnitudes. Por ejemplo: 10 libros, 25 mesas (son cantidades discretas) y 12,5 m, 23tn (son magnitudes continuas), que procuraban cubrir las necesidades sociales de la época. De esa práctica surgió la errónea concepción de que los números y magnitudes son la misma cosa.

En cambio, los números **enteros** (300 d.C.), los **irracionales** y los **complejos** aparecieron muchos siglos después, como resultado de la práctica matemática, provocando serios conflictos que impidieron su aceptación como números y graves dificultades para fundamentar su existencia. Las investigaciones algebraicas que dieron origen a estas clases de números se centraron en la búsqueda de soluciones a ecuaciones de los siguientes tipos: $x+a=0;\quad x^3-a=0;\quad x^2+a=0$, siendo a un número natural

C U R I O S I D A D E S

- **¿Por qué los enteros se designan con Z?**
  La palabra ***ZAHL*** significa número en alemán. Como los matemáticos alemanes fueron quienes más esfuerzo realizaron en el siglo XIX por la fundamentación de los enteros, se fue imponiendo la inicial alemana para designar a este conjunto de números.



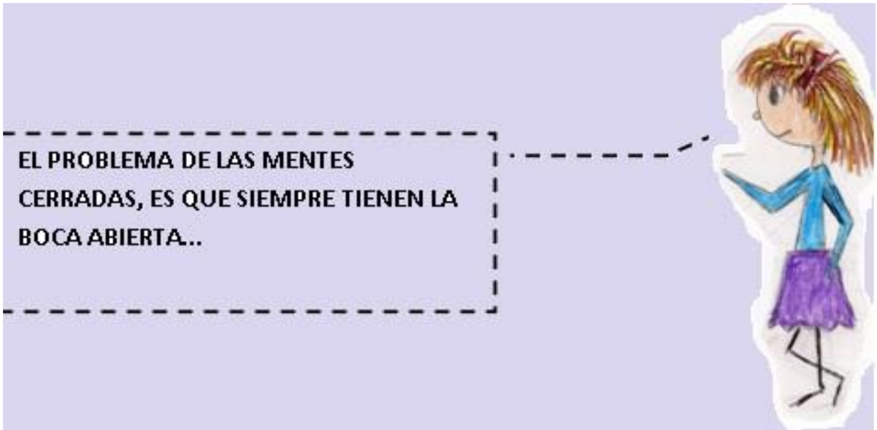
- **¡Superstición y el número trece!**
  - Según la Biblia había **trece personas en la Última Cena de Jesucristo** (él y sus doce apóstoles). De ahí que la tradición cristiana considere que nunca se deben sentar trece personas en una comida o una cena.
  - El **código de Hammurabi** -compilación de leyes y edictos auspiciada por Hammurabí, rey de Babilonia- omite este número en su lista, por considerarlo de mal agüero.

- La vida del músico alemán **Richard Wagner** parecía estar indisolublemente ligada al número 13: nació en un año acabado en 13, la suma de las letras de su nombre y apellido son 13, los números de su año de nacimiento (1813) suman también 13, compuso 13 óperas y falleció un día 13.

- La **misión espacial lunar *Apolo 13* de la NASA** fue lanzada el 11 de abril de 1970 a las 13:13 horas.

- El miedo extremo al número 13 recibe el nombre de **triscadecafobia**.

En **Japón** las **supersticiones** no se dirigen hacia el trece **sino hacia el número cuatro, que se designa con un término cuyo sonido se parece a la palabra "muerte"**. Por eso, el número de teléfono de los hospitales nipones nunca lleva el número cuatro, ni tampoco las habitaciones de los hoteles.



Conjunto, Elementos y Pertenencia

Cada día, en nuestras conversaciones, por la televisión, o en el trabajo está presente la idea de conjunto.

Al pasar por una plaza se levantó una bandada de palomas, un grupo de jubilados protestó por sus ingresos que son muy bajos, los alumnos de las comisiones del turno de la mañana están formadas por grupos numerosos, etc. todos estos ejemplos nos dan idea de la palabra conjunto.

Para desarrollar una teoría Matemática, partiremos de **términos primitivos** que no se definen y de **axiomas o postulados** que son enunciados que se aceptan sin demostración y que relacionan los términos primitivos. En la teoría de conjunto los términos primitivos son los conceptos de **conjunto, elemento y pertenencia.**

Por ejemplo, si comparamos una rama de la matemática con un juego de cartas: los términos primitivos son las cartas, y los axiomas, las reglas del juego que luego nos permitirán ver las diferentes jugadas; estas jugadas serán los teoremas que demostraremos en Matemática o los problemas que resolveremos aplicando éstos.

Elemento

Designaremos los conjuntos con letras mayúsculas de imprenta, anotaremos sus elementos entre llaves y con letras minúsculas.

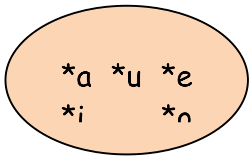
Por ejemplo: el conjunto de las vocales; así lo simbolizaremos $A = \{a; e; i; o; u\}$

	***Un conjunto*** *es una agrupación de ciertos objetos, que reciben el nombre de elementos. Un elemento puede o no pertenecer a un determinado conjunto.*

Por ello diremos para el ejemplo, que la letra a pertenece al conjunto A, lo cual se expresa así $a \in A$ mientras que el elemento b no pertenece al conjunto A que se simboliza $b \notin A$

Representación

Un conjunto podemos representarlo gráficamente mediante un Diagrama de Venn, que es una curva cerrada, dentro de la cual indicamos mediante puntos los elementos que pertenecen al conjunto.

A 

No siempre podemos representar los conjuntos utilizando un diagrama de Venn; cuando los elementos son infinitos es imposible enumerar a cada uno de ello.

Por eso tendremos en cuenta lo siguiente:

Formas de expresar un conjunto

A los conjuntos los podemos expresar por:

Extensión: cuando enumeramos a cada uno de los elementos que lo forman.

Ejemplo: $A = \{a, e, i, o, u\}$ $\quad$ $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

Comprensión: cuando expresamos sus elementos a través de una o más propiedades que los relaciona.

Así tendremos que los conjuntos del ejemplo anterior podemos expresarlos por comprensión de la siguiente manera:

Ejemplo: $A = \{x / x \text{ es vocal}\}$ $\quad$ $B = \{x \in N \ / \ x \text{ es un número par} \wedge x < 18\}$

Tipos de Conjuntos

¿Qué tipo de conjuntos podemos encontrar que puedan ser especiales y por ello tener un nombre propio? Existen conjuntos con nombres especiales que a continuación lo indicamos:

Conjunto Vacío: es el conjunto que carece de elementos y lo simbolizamos ϕ o bien mediante $\{\ \}$

Ejemplo: $M = \{x \in R / x^2 < 0\} = \{\ \}$ es vacío porque no existe un número real cuyo cuadrado sea negativo.

Conjunto Unitario: es el conjunto formado por un solo elemento

Ejemplo: $S = \{x \in N / x - 2 = 0\} = \{2\}$ el número 2 es el único natural que verifica a la igualdad dada.

Conjunto Universal o Referencial: es el conjunto formado por todos los elementos que cumplen con una proposición específica. Lo simbolizaremos con X o bien con la letra U .

Ejemplo: Si consideramos al conjunto $B = \{x \in N / x \text{ es un número par} \wedge x < 18\}$ entonces el Universal o Referencial es el conjunto de todos los números naturales, o sea $U = \{x/x \in N\}$

Relación de Pertenencia e Inclusión

Podemos establecer relaciones entre los elementos y los conjuntos, como así también entre los conjuntos.

Pertenencia

	*Si un elemento está en un conjunto, decimos que pertenece a él.*

Ejemplo: Dado el conjunto $B = \{x \in N / x \text{ es un número par} \wedge x < 18\}$ decimos que 12 es un elemento del conjunto B, por tanto $12 \in B$ mientras que 17 no es un elemento de B, en consecuencia $17 \notin B$.

Vemos que esta relación se establece entre un elemento y un conjunto

Inclusión

	*Un conjunto A está incluido en otro B si y sólo sí todos los elementos de A pertenecen a B*

Simbólicamente: $A \subset B \Leftrightarrow \forall a, \ (a \in A \Rightarrow a \in B)$. También decimos que el conjunto A es un subconjunto de B

Ejemplo: Sean los conjuntos $T = \{x / x \text{ es vocal}\}$ y $C = \{x / x \text{ es una letra del abecedario}\}$. En este caso decimos que $T \subset C$ porque todos los elementos del conjunto T son elementos del conjunto C, pues todas las vocales también son letras del abecedario. (O sea, T es subconjunto de C) En cambio, no se da la relación recíproca, o sea $C \not\subset T$ pues no todas las letras del abecedario son vocales.

En este caso, vemos que la relación que se establece es entre dos conjuntos.

Conjunto de Partes

DEFINICIÓN	*El **conjunto de partes** de A es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A.*

Simbólicamente: $P(A) = \{X / X \subset A\}$

Ejemplo: Dado el conjunto $H = \{1;\ 2;\ 3\}$, el conjunto de partes de H es: $P(\mathrm{H}) = \{\{1\};\ \{2\};\ \{3\}\ \{1,2\};\ \{1,3\};\ \{2,3\};\ \{1,2,3\};\ \phi\}$, pues todos los subconjunto que pueden formarse con los elementos de H son: $\phi; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1,2\}; \{1,3\}; \{2,3\}; \{1,2,3\}$, también el conjunto vacío, pues él está incluido en todos los conjuntos.

Observamos que para los conjuntos vacío y universal se cumple: $\phi \subset \mathrm{A}$ y $\mathrm{A} \subset \mathrm{U}$, siendo A cualquier conjunto.

Ahora, trabajaremos con conceptos que relacionen dos o más conjuntos.

Igualdad de conjuntos

DEFINICIÓN	*Se dice que el conjunto **A es igual a B** sí y sólo si verifica que todos los elementos de A son elementos de B y todos los elementos de B son elementos de A, es decir que* $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ *y* $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$

Simbólicamente: $B = A \Leftrightarrow (\forall\, a, a \in A \Leftrightarrow a \in B)$

Ejemplo: Sean los conjuntos $\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{Z} / x^2 - 9 = 0\}$ y $\mathrm{B} = \{-3{,}3\}$ Dichos conjuntos son iguales porque todos los elementos de A que son +3 y -3 son también elementos de B y los elementos de B, que son -3 y +3 verifican a la ecuación del conjunto A.

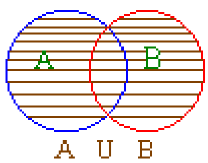
Operaciones con conjuntos

Muchas veces es necesario operar con conjuntos y las operaciones entre ellos son las siguientes:

Unión de Conjuntos

DEFINICIÓN	*La unión entre los conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos de A o los elementos de B.*

O sea que la unión entre dos conjuntos es el conjunto formados por los elementos comunes y no comunes entre dichos conjuntos.



Simbólicamente: $A \cup B = \{x \in U / x \in A \vee x \in B\}$

Gráficamente: usando Diagramas de Venn tenemos

Ejemplo: Si $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 6\}$ y $B = \{2;\ 6;\ 7\}$ entonces $A \cup B = \{1;\ 2;\ 3;\ 6;\ 7\}$

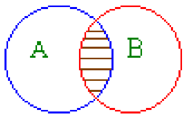
Intersección de Conjuntos

DEFINICIÓN	*La intersección entre los conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos de A y los elementos de B.*

También podemos decir que la intersección de dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos comunes a dichos conjuntos

Simbólicamente: $A \cap B = \{x \in U / x \in A \wedge x \in B\}$

Gráficamente:



A ∩ B

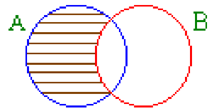
Ejemplo: Si $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 6\}$ y $B = \{2;\ 6;\ 7\}$ entonces $A \cap B = \{2;\ 6\}$

Diferencia entre Conjuntos

DEFINICIÓN	*La diferencia entre el conjunto A y el conjunto B es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.*

Simbólicamente: $A - B = \{x \in U / x \in A \wedge x \notin B\}$

Gráficamente:



A − B

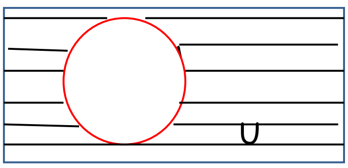
Ejemplo: Si $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 6\}$ y $B = \{2;\ 6;\ 7\}$ entonces $A - B = \{1;\ 3\}$

Complemento de un Conjunto

DEFINICIÓN	*El complemento de un conjunto A es el conjunto formado por los elementos del Universal que no pertenecen al conjunto A.*

Simbólicamente: $A^C = \{x \in U / x \notin A\}$

Gráficamente:



Ejemplo: Si $A = \{2;\ 3;\ 6;\ 5\}$ y $U = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ entonces $A^c = \{1;\ 4;\ 6\}$

El complemento de un conjunto podemos expresarlo también como una diferencia entre el conjunto universal y el conjunto dado.

Así el complemento de A es $A^C = U - A = \{x \in U / x \notin A\}$

Aplicaciones

La palabra conjunto aparece con mucha frecuencia en nuestra conversación, trabajo o lectura. Ahora veremos cómo las operaciones con conjuntos nos facilitan la resolución de algunos problemas que se nos pueden presentar.

Ejemplo: Hoy es común que realicemos encuestas. En una de ellas, hay personas que manifiestan leer dos diarios: El Clarín y El Tribuno. El 28% de los encuestados contestan que leen El Clarín, el 16% que lee sólo El Tribuno y el 34% que lee El Tribuno. ¿Qué porcentaje de personas leen los dos diarios y qué porcentaje no lee ninguno de ellos?

Resolución: Para resolver este problema, haremos un diagrama de Venn

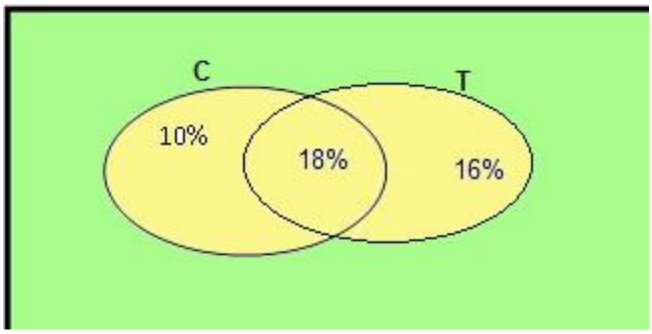
Denominamos al conjunto C: lectores del Clarín y al conjunto T: lectores del Tribuno. Si volcamos la información dada en el enunciado tenemos que:

16% se ubica en $T - C$

34% - 16% = 18% se ubica en $C \cap T$; o sea que 18% lee los dos diarios

28% - 18% = 10% se ubica en $C - T$;

Si al total 100% restamos los tres valores ubicados, se tiene que el 56% no lee ninguno de estos dos diarios.



TRABAJO PRÁCTICO Nº 1

1) Escribe simbólicamente las siguientes afirmaciones:

a) x pertenece al conjunto P
b) -2 no es elemento de N
c) el conjunto R contiene como subconjunto al conjunto Q
d) Entre los elementos del conjunto A no está el número 3
e) El conjunto M es un subconjunto del conjunto N y N es subconjunto de M

2) Completa las líneas de puntos con los símbolos $\in$ o $\notin$ según corresponda:

a) $2....\{1; 3; 5; 7\}$ **b)** $5....\{1; 3; 5; 7\}$ **c)** $3....\{x \in N / 2 < x \leq 5\}$

d) $\frac{9}{2}....\{x \in Z/x \geq 2\}$ **e)** $8....\{x \in Z/x < 8\}$ **f)** $0....\{\ \}$

g) $0....\{x \in N / x+3=3\}$ **h)** $-2.....Z$ **i)** $0.....N$

3) Clasifica los conjuntos en vacíos, unitarios, finitos e infinitos

a) $P = \{x / x \text{ es día de la semana}\}$ **b)** $Q = \{x / x \text{ es vocal de la palabra pez}\}$

c) $R = \{x \in Z / x \text{ es par}\}$ **d)** $S = \{x \in N / x+5=5\}$

e) $T = \{x \in Z / x+5=5\}$ **f)** $V = \{x \in N / x < 12\}$

4) Encuentra el conjunto de partes de los conjuntos dados:

a) $A = \{x/ x \text{ es una letra de la palabra rosa}\}$

b) $T = \{x \in Z / x+5=5\}$

5) Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, en caso contrario decir el por qué:

a) Sea $A = \{x/ x \text{ es una letra de la palabra rosa}\}$

$a \in A$ $\Phi \subset A$ $r \subset A$ $\{a\} \in A$ $\{a\} \subset A$ $r \in A$

b) Sea $B = \{1;\ 0\}$

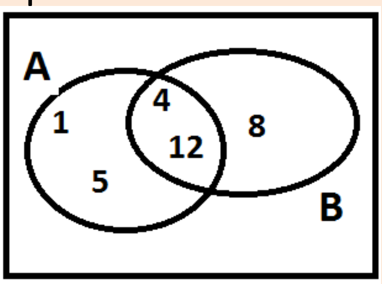
$\{0\} \in B$ $\Phi \in B$ $0 \in B$

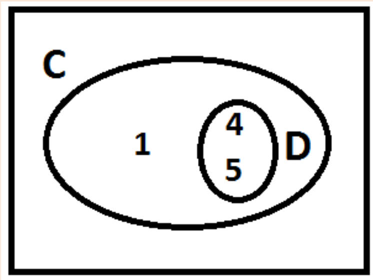
6) Sabiendo que $A = \{d\},\ B = \{c;\ d\};\ C = \{a,\ b,\ c\};\ D = \{a;\ b\}\ y\ E = \{a,\ b,\ d\}$, **analizar la veracidad de las siguientes afirmaciones, justificar la respuesta en cada caso:**

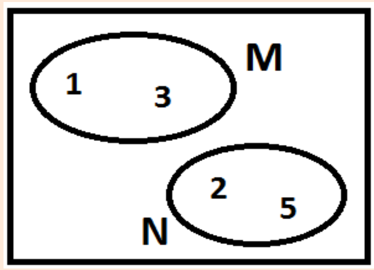
a) $D \subset C$ **b)** $B \neq E$ **c)** $A \not\subset D$ **d)** $A \subset B$

e) $A = B$ **f)** $E \supset A$ **g)** $D \not\subset E$ **h)** $B \subset C$

7) Teniendo en cuenta los siguientes diagramas de Venn, expresa por extensión los conjuntos pedidos







a) A B $A \cup B$ $A \cap B$ $A \cap \phi$

b) C D $D \cup C$ $C \cap D$ $D \cap U$

c) M N $M \cup N$ $M \cap N$ $M \cup \phi$

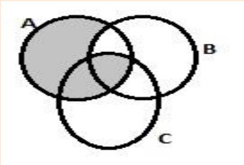
8) Dados los conjuntos $U = \{x \in N / x \leq 10\}$ $A = \{1,\ 4,\ 7,\ 10\}$, $B = \{x \in N / x \leq 5\}$ y $C = \{x \in U / x \text{ es } \ par, pero \ x \neq 10\}$ **determina por extensión los siguientes conjuntos:**

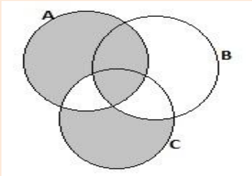
a) $A \cup B$ **b)** $B \cap U$ **c)** $A \cup \phi$ **d)** $A - B$ **e)** A^C

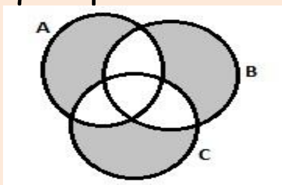
f) U^C **g)** $B^C \cap (C - A)$ **h)** $(A \cap B)^C \cup C$ **i)** $B \cap C$

j) $A \cap (B \cup C)$ **k)** $(A \cap B) \cup C$ **l)** $(A \cap B) - C$ **m)** $(A \cup B) - (C - B)$

9) Escribe la operación entre los conjuntos A, B y C dados que representa la zona sombreada







10) Interpreta y resuelve los siguientes enunciados:

- A un examen de ingreso a la Universidad se presentaron 100 alumnos, de los cuales 65 aprobaron el examen de Matemática, 25 el de Matemática y Contabilidad y 15 aprobaron solo el de Contabilidad ¿Cuantos no aprobaron ninguno de los exámenes mencionados?

- Se llevó a cabo una investigación con 1000 personas, para determinar que medio utilizan para conocer las noticias del día. Se encontró que 400 personas escuchan las noticias en forma regular por TV, 300 personas escuchan las noticias por la Radio y 275 se enteran de las noticias por ambos medios. ¿Cuántas de la personas investigadas:
  a) se enteran de las noticias solo por la TV?
  b) se enteran de las noticias solo por Radio?
  c) no escuchan ni ven las noticias?

- Se realizó una encuesta a 11 personas, sobre sus preferencias por dos tipos de productos A y B. Obteniéndose lo siguientes resultados:
  - El número de personas que prefirieron uno solo de los productos fueron 7.
  - El número de personas que prefirieron ambos productos fue igual al número de personas que no prefirió ninguno de los dos productos.
  - El número de personas que no prefieren el producto A y prefirieron el producto B fueron 3.

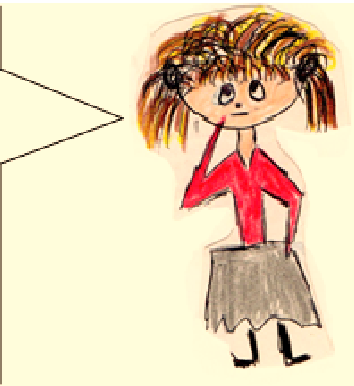
  Se desea saber:
  a) ¿Cuántas personas prefieren el producto A?
  b) ¿Cuántas personas prefieren el producto B solamente?
  c) ¿Cuántas personas prefieren ambos productos?

- Se le preguntó a un grupo de 10 estudiantes que tenían preferencias por las marcas de gaseosas Fanta y Coca Cola. Obteniéndose lo siguientes resultados:
  - El número de estudiantes que prefirieron Fanta pero no Coca Cola fue de 3.
  - El número de estudiantes que no prefirieron Fanta fueron 6.

  Se desea saber:
  a) ¿Cuantos de los encuestados prefirieron Fanta?
  b) ¿Cuantos de los encuestados prefirieron Coca Cola?
  c) ¿Cuantos de los encuestados prefirieron Fanta o Coca Cola?

Y ahora? Me detengo a reflexionar!!

Marcar con una x en la columna que corresponda según los aprendizajes que consideres logrados, o que está en proceso o bien donde debes volver a intentar. Si la mayoría de las cruces están en la segunda y tercera columna, revisa tus conocimientos y vuelve a estudiar los mismos.



Metacognición	Lo Logré	Está en proceso	Debo volver a intentar
Entiendo qué es un conjunto y cómo se escribe			
Conozco qué tipo de conjuntos hay			
Entiendo qué tener en cuenta para decidir la igualdad entre conjuntos			
Resuelvo operaciones con conjuntos			
Resuelvo problemas aplicando las operaciones con conjuntos			

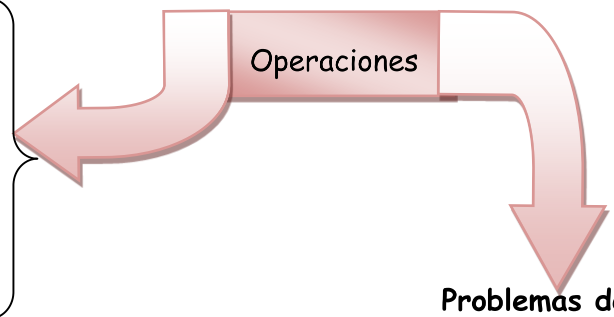
TEMA II

CONJUNTOS NUMÉRICOS

TEMA II "CONJUNTOS NUMÉRICOS"

Conjuntos Numéricos

Adición
Sustracción
Multiplicación
División
Potenciación
Radicación



Problemas de Aplicaciones

¿Se acuerdan de alguno…?

"¿Dijiste media verdad?

Dirán que mientes dos veces

Si dices la otra mitad"

(Proverbio y Cantares- Antonio Machado)

Así como el poeta usó un número natural (el 2) y una fracción (1/2), podríamos decir que prácticamente todas las actividades de nuestra vida emplean los números en mayor o menor medida.

A continuación, especificaremos cada conjunto numérico con sus respectivas operaciones y propiedades.

Números Naturales (N)

El conjunto de los números naturales está formado por infinitos números, pero tiene primer elemento que es el número 1 y simbólicamente lo expresamos: $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Propiedades de la Suma (o adición)

- Es una operación cerrada, que simbólicamente se expresa: $\forall a,b \in N, (a+b) \in N$
- Conmutativa: $\forall a,b \in N, a+b=b+a$
- Asociativa: $\forall a,b,c \in N, a+(b+c)=(a+b)+c$
- Cancelativa: $\forall a,b,c \in N, a+c=b+c \Rightarrow a=b$
- Uniforme: $\forall a,b,c \in N, a=b \Rightarrow a+c=b+c$

Propiedades de la Multiplicación

- Es una operación cerrada: $\forall a,b \in N, (a.b) \in N$
- Conmutativa: $\forall a,b \in N, a.b=b.a$
- Asociativa: $\forall a,b,c \in N, (a.b).c=a.(b.c)$
- Existencia del Elemento Neutro: $\exists 1 \in N$ / a .1 = 1. a = a $\forall a \in N$
- Cancelativa: $\forall a,b,c \in N, a.b=c.b \Rightarrow a=c$
- Uniforme: $\forall a,b,c \in N, a=c \Rightarrow a.b=c.b$
- Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y a la resta: $\forall a,b,c \in N$
  $a.(b+c)=a.b+a.c \qquad a.(b-c)=a.b-a.c$

Números Enteros (Z)

El conjunto de los números enteros está formado por los naturales, el 0 y los números enteros negativos. Simbólicamente lo expresamos: ***Z*** = $\{....,-3,-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,....\}$ o también

$$Z = Z^{-} \cup \{0\} \cup Z^{+}$$

Propiedades de la Suma (o adición)

Verifican las mismas propiedades de la suma de números naturales y además tenemos:

- Existencia del Elemento Neutro: $\exists 0 \in Z \,/\, \forall a \in Z, a+0=0+a=a$
- Existencia del Elemento Opuesto, es decir: $\forall a \in Z, \exists(-a) \in Z \,/\, a+(-a)=(-a)+a=0$

Propiedades de la Multiplicación

Verifican las mismas propiedades del producto de números naturales y además, tenemos:

- $\forall a,b \in Z,$ Si $a.b=0 \Rightarrow a.=0 \vee b=0$

Concepto de Divisibilidad

Un número **b** es divisible por otro **a** cuando el resto de la división es cero, la división es exacta.

$$\begin{array}{l|l} b & a \\ \hline 0 & c \end{array}$$

esto significa que $b = a.c$

Criterios de Divisibilidad

Muchas veces es necesario saber si un número puede ser dividido por otro o no, pero es incómodo hacer la división, por lo tanto, disponemos de reglas o criterios para saber si un número es divisible por 2 o 3 o 4 o 5 o 6, etc., sin hacer la división. Los principales son:

Divisibilidad por 2: Un número es divisible por 2, si termina en cero o cifra par.

Ejemplos: los números 24, 238, 1000 y 1026, son divisibles porque terminan en cifra par.

Divisibilidad por 3: Un número es divisible por 3, si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3.

Ejemplos:

564 es divisible por 3 porque 5 + 6 + 4 = 15 → **15 es múltiplo de 3**

2040 es divisible por 3 porque 2 +0 + 4 + 0 =6 → **6 es múltiplo de 3**

Divisibilidad por 5: Un número es divisible por 5, si termina en cero o cinco.

Ejemplos: Los números 45, 515, 7525, 230 son divisibles por 5 porque terminan en 0 ó 5.

Divisibilidad por 4: Un número es divisible por 4, si sus dos últimas cifras son ceros o múltiplo de 4.

Ejemplos: Los números 36, 400, 1028 son divisibles por 4, porque cumplen la condición.

Divisibilidad por 6: Un número es divisible por 6, si es divisible por 2 y por 3.

Ejemplos: Los números 72, 324, 2400 son divisibles por 6 porque son divisibles:

- ✓ 72 termina en número par (2) por ello es divisible por 2 y por 3 porque 7 + 2=9 que es divisible por 3
- ✓ 324 termina en número par (4), por ello es divisible por 2 y por 3 porque 3+2+4=9 que es divisible por 3.
- ✓ 2400 termina en número par (0), por ello es divisible por 2 y por 3 porque 2+4+0+0=6 que es divisible por 3.

Divisibilidad por 8: Un número es divisible por 8, si sus tres últimas cifras son ceros o múltiplo de 8.

Ejemplos: Los números 4000, 1 048, 1512 son divisibles por 8.

Divisibilidad por 9: Un número es divisible por 9, si la suma de sus dígitos es múltiplo de 9.

Ejemplos:

- ✓ 81 es divisible por 9 porque 8 + 1 = 9 que es múltiplo de 9
- ✓ 3663 es divisible por 9 porque 3+ 6 +6+3 = 18 es múltiplo de 9.

Divisibilidad por 10: Un número es divisible por 10, si la cifra de las unidades es 0.

Ejemplos: los números 130, 1 440, 10 230 terminan en 0.

Divisibilidad por 7: Un número es divisible por 7 cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 ó un múltiplo de 7.

Ejemplos:

- ✓ 343 es divisible por 7 porque 34 – 2·3 =28 → **28 es múltiplo de 7**
- ✓ 105 es divisible por 7 porque 10 – 5 · 2 = 0 → **0 es múltiplo de 7**
- ✓ 2261 es divisible por 7 porque 226 – 1·2=224
  Se repite el proceso con 224; 22 – 4·2 = 14 → **14 es múltiplo de 7**

Divisibilidad por 11: Un número es divisible por 11, si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan los lugares impares y la de los pares es 0 o un múltiplo de 11.

Ejemplos:

- ✓ 121 es divisible por 11 porque (1 + 1) – 2 = 0 → **0 es múltiplo de 11**
- ✓ 4224 es divisible por 11 porque (4 + 2) – (2 + 4) = 0 → **0 es múltiplo de 11**

Divisibilidad por 25: Un número es divisible por 25, si sus dos últimas cifras son ceros o múltiplo de 25.

Ejemplos: 500, 1 025, 1 875 son divisibles por 25 porque cumplen la condición

Divisibilidad por 125: Un número es divisible por 125, si sus tres últimas cifras son ceros o múltiplo de 125. Ejemplos: 1 000, 1 125, 4 250 son divisibles por 125.

Números Racionales (Q)

DEFINICIÓN	*El conjunto de números racionales es el conjunto de todos los números de la forma* $\frac{a}{b}$*; es decir todos los números que se pueden expresar como fracciones y simbólicamente:* Q = $Z \cup F = \left\{ \frac{a}{b} / a \in Z, b \in Z, b \neq 0 \text{ y además } a \text{ y } b \text{ primos entre sí} \right\}$

- Todos los números naturales y enteros son racionales porque pueden expresarse como fracción de denominador 1. Por ejemplo: $3 = \frac{3}{1}$ por lo tanto $3 \in Q$
- Los números decimales exactos son números racionales porque pueden expresarse como fracción de denominador 10, 100, etc. Por ejemplo: $0{,}23 = \frac{23}{100}$
- Los números decimales periódicos también puede expresar como fracción. ¿Lo sabías? Más adelante te explicamos el procedimiento.

Suma y Resta de Números Racionales: para resolver tanto la suma como la resta debemos sacar común denominador de ambas fracciones y luego aplicar el algoritmo correspondiente:

Simbólicamente $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p.s + r.q}{q.s} \quad q \neq 0, s \neq 0$ $\qquad \frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{p.s - r.q}{q.s} \quad q \neq 0, s \neq 0$

Ejemplos: $\frac{3}{5} + \frac{1}{3} - 2 = \frac{9 + 5 - 30}{15} = -\frac{16}{15}$

Propiedades de la suma

La suma de números racionales goza de las mismas propiedades que la suma de números enteros.

Multiplicación de Números Racionales: Para resolver un producto, multiplicamos entre si los numeradores y entre sí los denominadores. Simplificamos, cuando sea posible, numerador con denominador.

Simbólicamente $\frac{p}{q} . \frac{r}{s} = \frac{p.r}{q.s} \quad q \neq 0, s \neq 0$

Ejemplo: $\frac{7}{3} . \frac{2}{5} = \frac{7.2}{3.5} = \frac{14}{15}$

<u>División de Números Racionales</u>: El resultado es una fracción cuyo numerador es el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda; y el denominador lo obtenemos multiplicando el denominador de la primera por el numerador de la segunda.

Simbólicamente $\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{p.s}{q.r} \quad q \neq 0, s \neq 0$ y $r \neq 0$

Ejemplo: $\frac{7}{4} : \frac{2}{5} = \frac{7.5}{4.2} = \frac{35}{8}$ o también $\frac{7}{4} . \frac{5}{2} = \frac{7.5}{4.2} = \frac{35}{8}$. Es decir que dividir a $\frac{7}{4}$ por $\frac{2}{5}$ significa que a $\frac{7}{4}$ se lo multiplica por el recíproco de $\frac{2}{5}$ que es $\frac{5}{2}$

Otra forma de expresar una división es: $\frac{\frac{7}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{7.5}{4.2} = \frac{35}{8}$

Propiedades de la Multiplicación

Verifican las propiedades vistas en N y Z.

Además, existe el elemento recíproco o inverso para todo número racional distinto de cero, que simbólicamente lo expresamos: $\forall \frac{p}{q} \in Q, p \neq 0, q \neq o, \exists \frac{q}{p} \in Q / \ \frac{p}{q} . \frac{q}{p} = 1$ o también $\forall a \in Q \wedge a \neq 0, \exists a^{-1} / a.a^{-1} = 1$

<u>El Opuesto de un número:</u> es otro número que tiene el mismo valor absoluto, pero signo opuesto. Al opuesto de x se lo simboliza como (-x). Ejemplo: el opuesto de 5 es -5; el opuesto de $-\frac{3}{5}$ es $\frac{3}{5}$.

<u>El inverso multiplicativo de un número distinto de cero</u>: es el número que se obtiene al invertir dicho número; es decir cambiar el numerador por denominador y viceversa. El inverso de x, siendo $x \neq 0$, es $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Por ejemplo: el inverso de 5 es $\frac{1}{5}$ y el inverso de $-\frac{4}{5}$ es $-\frac{5}{4}$

Expresiones Decimales Exactas

DEFINICIÓN	*Todo número racional cuya expresión decimal es exacta puede escribirse como fracción decimal, es decir como fracción cuyo denominador es un 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga el número.*

Ejemplo: $2{,}8 = \frac{28}{10} = \frac{14}{5}$ $\qquad 5{,}46 = \frac{546}{100} = \frac{273}{50}$ $\qquad 0{,}236 = \frac{236}{1000} = \frac{59}{250}$

Expresiones Decimales Periódicas

DEFINICIÓN	*Son aquellas cuyas cifras decimales están formadas por una parte periódica (número decimal que se repite infinitas veces) y otra parte no periódica.*

El **período de una expresión decimal** son las cifras que se repiten indefinidamente, a las que señalamos con un arquito. En las **expresiones periódicas puras**, el período aparece inmediatamente después de la coma. En las **expresiones periódicas mixta** hay una parte no periódica después de la coma y luego aparece el período

Ejemplos:

5,2121212121… $5{,}\overset{\frown}{21}$ es una expresión periódica pura

Es la parte periódica

Es la parte entera

5,32121212121… = $5{,}3\overset{\frown}{21}$ es una expresión periódica mixta

Es la parte periódica

Es la parte no periódica

Es la parte entera

Reglas para escribir las expresiones decimales periódicas como fracción

Regla A (decimales periódicos puros)	Regla B (decimales periódicos mixtos)
$5{,}\overset{\frown}{21} = \frac{521-5}{99} = \frac{516}{99}$ Para obtener una fracción equivalente a un decimal periódico puro, escribimos como numerador el número dado, sin coma, menos la parte entera y, como denominador, tantos nueves como cifras decimales tenga el período	$5{,}3\overset{\frown}{21} = \frac{5321-53}{990} = \frac{5268}{990}$ Para obtener una fracción equivalente a un decimal periódico mixto, escribimos como numerador el número dado, sin coma, menos la parte entera seguida de la parte no periódica y, como denominador, tantos nueves como cifras tenga el período, seguidos de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal no periódica

Números Irracionales (I)

Todo número irracional es aquel que tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Por ejemplo $\sqrt{2}$, e, π

π = 3,1415926535897932384626433832795… (y más…no se forma un período)

$\sqrt{2}$ =1,4142135623730950488016887242097…

e = 2,7182818284590452353602874713527…

Extracción de factores fuera del signo radical

DEFINICIÓN	*Para extraer todos los factores posibles se debe factorizar la expresión dentro del signo radical y luego extraer a todos aquellos factores, cuyos exponentes sean mayores o iguales que el índice.*

$$Ejemplo: \sqrt{32} = \sqrt{2^4.2} = \sqrt{2^4}.\sqrt{2} = 4.\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{a^5b^6} = \sqrt[3]{a^3a^2b^6} = \sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b^6} = ab^2\sqrt[3]{a^2}$$

Suma algebraica de radicales: Para resolver las mismas tendremos en cuenta lo siguiente:

- ✓ **Radicales Semejantes:** los radicales que tienen el mismo índice y el mismo radicando se llaman radicales semejantes

En una suma algebraica podemos agrupar los términos que contengan radicales semejantes y operar con sus coeficientes. Para cuando aparezcan radicales no semejantes, realizaremos las extracciones convenientes para lograr radicales semejantes, si es posible.

Ejemplos: $\frac{1}{3}\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \frac{2}{5}\sqrt{3} = \left(\frac{1}{3} + 2 - \frac{2}{5}\right).\sqrt{3} = \frac{5+30-6}{15}\sqrt{3} = \frac{29}{30}\sqrt{3}$

$$\sqrt{8}-\frac{1}{3}\sqrt{18}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}-\frac{1}{3}.3\sqrt{2}+1.\sqrt{2}=(2-1+1)\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

Racionalización

DEFINICIÓN	*Racionalizar un denominador, significa transformar una fracción cuyo denominador es un número irracional, en otra fracción equivalente a la dada, cuyo denominador sea racional. En consecuencia, al racionalizar, desaparece del denominador todo signo radical*

Así tenemos distintos casos:

- ✓ **El denominador es un signo radical único:** multiplicamos y dividimos por la raíz del denominador. Por ejemplo $\frac{3}{\sqrt{50}}=\frac{3}{\sqrt{25.2}}=\frac{3}{5\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3.\sqrt{2}}{5.(\sqrt{2})^2}=\frac{3.\sqrt{2}}{10}$
- ✓ **El denominador es un binomio** donde por lo menos uno de sus términos contiene un radical: multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

<u>Conjugado de un binomio</u>: es otro binomio, cuyos términos difieren **sólo** en el signo del segundo término, por ejemplo, el conjugado de $2+\sqrt{5}$ es $2-\sqrt{5}$.

$$\frac{3}{2+\sqrt{5}}=\frac{3}{2+\sqrt{5}}.\frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}=\frac{3.2-3.\sqrt{5}}{2.2-2.\sqrt{5}+2.\sqrt{5}-(\sqrt{5})^2}=\frac{6-3.\sqrt{5}}{4-5}=3.\sqrt{5}-6$$

Números Reales (R)

Al conjunto de los números reales lo determinamos por Q ∪ I = R.

Las operaciones para los Reales son las mismas que las vistas anteriormente y sus propiedades al igual que en los racionales.

<u>**Potenciación**</u>

DEFINICIÓN	*Elevar un número real a una potencia cuyo exponente es natural significa multiplicar tantas veces la base como indica el exponente* ***Simbólicamente*** $\forall a\in R \wedge n\in N, a^n=\underbrace{a.a.\ldots.a}_{n\text{ veces}}$

Propiedades:

- Todo número real elevado a la potencia uno es igual al mismo número $\forall a\in R, a^1=a$
- Todo número real distinto de cero elevado a la potencia cero es igual a uno $a^0=1, \forall a\in R\wedge a\neq 0$
- Un número real distinto de cero elevado a un exponente negativo lo expresamos así $a^{-m}=\frac{1}{a^m}, \forall a\in R\wedge a\neq 0, \forall m\in N$

- Propiedad distributiva respecto del producto: $\forall a,b \in R \wedge n \in N \quad (a.b)^n = a^n.b^n$
- Propiedad distributiva respecto del cociente: $\forall a,b \in R, b \neq 0 \wedge n \in N \quad (a \div b)^n = a^n \div b^n$
- Producto de potencias de igual base: $\forall a \in R; \quad a^n.a^m = a^{n+m}$
- Cociente de potencias de igual base: $\forall a \in R \wedge a \neq 0 \quad a^n \div a^m = a^{n-m}$
- Potencia de potencias: $\forall a \in R, (a^n)^m = a^{n.m}$
- Potencia de exponente racional: $\forall a \in R, \forall p,n \in Z, \quad a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$

Radicación

DEFINICIÓN	*La raíz enésima n de un real a es un número real b cuya potencia enésima es a* ***Simbólicamente**: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ con $n \in N$ (n recibe el nombre de índice y a de radicando)*

Podemos determinar el signo de la raíz según que el índice sea par o impar, y el radicando positivo o negativo. Ejemplos:

$\sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

$\sqrt[3]{-8} = -2 \Leftrightarrow (-2)^3 = -8$

$\sqrt[4]{16} = \pm 2 \Leftrightarrow 2^4 = 16 y (-2)^4 = 16$

$\sqrt[4]{-16}$ no podemos calcularla en R, pues ningún número real elevado a un exponente par da por resultado un número negativo.

Propiedades de la Radicación

- Propiedad distributiva respecto del producto: $\forall a,b \in R, \ \forall n \in N, \ \sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
- Propiedad distributiva respecto del cociente: $\forall a,b \in R \wedge b \neq 0, \ \forall n \in N, \sqrt[n]{a \div b} = \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b}$
- Radicación de radicaciones: $\forall a \in R, \ \forall n,m \in N, \ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$
- La radicación como la potenciación no son distributivas respecto a la suma ni a la resta. $\forall a,b \in R, \forall n \in N, \ \sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$

Guía para resolver problemas de aplicación

- Si el problema está expresado por escrito, léelo con cuidado varias veces y considera los datos junto con la cantidad desconocida que ha de encontrarse.
- Introduce una letra para denotar la cantidad desconocida. Este es uno de los pasos más importantes en la solución. Frases que tengan palabras como: ***¿qué, hallar, ¿cuánto, a qué distancia o cuándo?*** ponen sobre aviso respecto a la cantidad desconocida.
- Si es necesario, haz un dibujo y colócale leyendas.
- Lista los datos conocidos y sus relaciones con la cantidad desconocida.

- Resuelve la expresión formulada.
- Comprueba las soluciones obtenidas consultando el enunciado original del problema. Verifica que la solución esté acorde con las condiciones indicadas.

Conjeturas: ¿en qué consisten?

La observación de regularidades a partir de casos particulares conduce a la formulación de conjeturas, es decir, predicciones de resultados en situaciones similares pero que sirva para otros valores no considerados. Para ello, la calculadora nos facilitará la obtención de resultados parciales, pero será nuestro trabajo obtener la regla de formación para casos genéricos. También la capacidad de observación es muy importante acá.

Por ejemplo:

a) Calcular obteniendo los resultados con calculadora y observar

- 12 345 679 x 18 =
- 12 345 679 x 36 =
- 12 345 679 x 45 =
- 12 345 679 x 63 =

Con este tipo de situaciones es que logramos establecer propiedades o generalizaciones, luego de probarlas. En nuestro ejemplo, y resolviendo con calculadora, podemos observar que:

- 12 345 679 x 2 x 9 = 222.222.222
- 12 345 679 x 4 x 9 = 444.444.444
- 12 345 679 x 5 x 9 = 555.555.555
- 12 345 679 x 7 x 9 = 777.777.777

Parecería que el resultado está relacionado con el factor que multiplica a nueve.

Faltaría analizar si siempre es así, por lo tanto, en situaciones similares, es posible anticipar el resultado sin usar calculadora.

Entonces, conjeturar el resultado de las siguientes operaciones, sin usar calculadora:

- 12 345 679 x 81 =

Podemos observar, en base a los resultados anteriores que 12 345 679 x 81= 999.999.999. Por lo tanto, podemos analizar lo siguiente:

- 12 345 679 x ab = (ab es un número de dos cifras múltiplo de nueve)

Como ab es un número múltiplo de 9, podemos escribirlo ab = 9 x h, donde h es un número entero, por lo tanto, el resultado anterior será:

- 12 345 679 x 9 x h = hhh.hhh.hhh (es un número de 9 cifras)

A este trabajo le falta la explicación de por qué es así y con qué tipo de números funciona (observemos que el primer factor es un número de 8 cifras consecutivas del uno al nueve, pero sin la cifra ocho). ¿Tendrá algo que ver esto?

En el conjunto de números reales, no solo realizamos operaciones, sino establecemos relaciones de menor, mayor o igual. Es así, que nos dedicaremos ahora a estudiar cómo se establecen esas relaciones y cuáles son las propiedades o leyes que se cumplen.

Orden en los Números Reales

Marcos y Juan son dos hermanos, Marcos tiene 23 años y su hermano, tiene 27. ¿Cuál de ellos es menor?

Es fácil responder esta pregunta, Marcos es el menor, ya que Juan lleva vividos cuatro años más.

Así, podemos decir que 23 es menor que 27, pues hay que sumar 4 (valor positivo) al número menor para que llegue a igualar a 27, que es el número mayor.

Pero esto es así para cualquier número menor con respecto a otro mayor y lo consideramos en la siguiente definición:

<u>Definición de Menor</u>

DEFINICIÓN	*Dados dos números a y b, decimos que a es menor a b, si existe un número k, positivo, tal que sumado al número menor, resulta exactamente el mayor.* ***Simbólicamente*** *podemos escribirlo:* $\forall a,b \in R, \quad a<b \Leftrightarrow \exists k \in R^{+} \,/\, a+k=b$

Esto significa que, si representamos *a* y *b* en la recta numérica, *a* será un punto ubicado a la izquierda del punto que le corresponde a *b* en esa misma recta numérica.

Si observamos, en la definición hay una doble implicación, conocida con el nombre de equivalencia; esto justamente significa que podemos usar tanto la primera parte, como la segunda indistintamente, es decir en un sentido como en el otro.

<u>Ejemplo 1</u>: $4<6$ pues $\exists$ 2 tal que 6 = 4 + 2

<u>Ejemplo 2</u>: $\frac{1}{2}<\frac{3}{4}$ pues $\exists$ $\frac{1}{4}$ tal que $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

<u>Ejemplo 3</u>: $-5<-2$ pues $\exists$ 3 tal que – 2 = - 5 + 3

<u>Ejemplo 4</u>: Como 5 + 4 = 9, si quitamos 4 de esa igualdad y al ser un número positivo, podemos afirmar que $5<9$

También definiremos el concepto de:

Definición de Mayor

DEFINICIÓN	*Dados dos números reales a y b,* $a > b \Leftrightarrow b < a$

Esta última definición, indica que si delimitamos la desigualdad en un sentido podemos aplicar en forma equivalente cuando tenemos la desigualdad en el sentido contrario, claro que siempre debemos sumar el valor *k* positivo al número menor para obtener el número mayor.

Suma de Números Reales Positivos

DEFINICIÓN	*La suma de dos números reales positivos es un número real positivo, o sea que* $\forall a, b \in R^+ \quad a + b > 0$

Multiplicación de Números Reales Positivos

DEFINICIÓN	*El producto de dos números reales positivos es un número real positivo, o sea que* $\forall a, b \in R^+ \quad a . b > 0$

Estas dos últimas definiciones nos afirman algo que intuitivamente ya veníamos utilizando; la primera enuncia que la suma de dos números positivos, es también positiva y la segunda, que la multiplicación de dos números positivos, también es positiva.

Ley de Tricotomía

LEY O PROPIEDAD	*Para cualquier par de números reales a y b se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:* $\forall a, b \in R, \quad a = b \quad \vee \quad a > b \quad \vee \quad a < b$

Esta ley nos asegura que, si consideramos dos números reales, solo puede establecerse una y solo una de las relaciones dadas. Por ejemplo:

a) Si nos dan -4 y 7 podemos afirmar que -4 es menor a 7
b) Si nos dan 6 y -5 podemos afirmar que 6 es mayor a -5
c) Si nos dan 6 y 6, podemos afirmar que son iguales

Otra ley que puede ser útil a la hora de trabajar con las operaciones o cuando resolvemos inecuaciones es la ley transitiva, que la expresamos así:

Ley Transitiva:

LEY O PROPIEDAD	$\forall a, b, c \in R, \text{ Si } a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

Esta ley nos asegura que, si establecemos un orden entre dos números “a” y “b”, siendo “a” el menor y además se establece que el número “b” es, a su vez, menor a otro número “c”, es seguro que el primero de los números “a” es menor que el número “c”

Podemos y debemos demostrar que lo que indica la ley es cierto de una manera formal, como lo expresa el lenguaje matemático y que presentamos a continuación.

Demostración:

Por hipótesis $a < b$ y por definición de menor $\exists\, k \in R^{+}$ *tal que* $b = a + k$

También $b < c$ y por definición de menor $\exists\, h \in R^{+}$ *tal que* $c = b + h$

Sustituimos el valor de b de la primera igualdad en la segunda y tenemos: $c = (a + k) + h$

Aplicamos propiedad asociativa $c = a + (k + h)$

Pero como k y h son positivos, la suma de dos positivos será positiva, como ya fue definido. Entonces al aplicar la definición de menor tenemos que $c > a \Leftrightarrow a < c$

Otros Teoremas o Leyes que cumple la relación de orden en los números reales

Estas otras Leyes y Teoremas (varias no tienen nombre propio) también son muy utilizadas cuando resolvemos problemas o situaciones con números reales. Las enunciaremos, mostraremos cómo las podemos utilizar, pero solo demostraremos algunas.

LEY O PROPIEDAD	$\forall\, a, b \in R,\ \text{Si}\ \ a < b \Rightarrow -a > -b$

Esto indica que, si hay *una relación de menor entre dos números, la relación de menor se invierte si consideramos los respectivos opuestos de esos números.*

Vemos un ejemplo, si a = 6 y b = 8, sus opuestos son –a = -6 y -b = -8

Podemos comprobar que como $6 < 8$, la relación entre los opuestos se invierte, pues $-6 > -8$

Lo mismo si eligiéramos, otro ejemplo, a = -6 y b = 9 pero como $-6 < 9$, la relación entre sus opuestos quedaría: $6 > -9$

LEY O PROPIEDAD	$\forall\, a \in R,\ \text{Si}\ \ a > 0 \Rightarrow -a < 0$

Esto significa que, *si un número es positivo, su opuesto es negativo*. Pero también es importante tener en cuenta que, *si un número es negativo, su opuesto es positivo*, esto enunciamos a continuación.

<u>Ejemplo</u>: Si a = 7, -a = - 7

LEY O PROPIEDAD	$\forall\, a \in R,\ \text{Si}\ \ a < 0 \Rightarrow -a > 0$

Observemos que hemos escrito –a, que significa "el opuesto del número a", por lo tanto, es lógico entender que, si el número "a" es negativo, su opuesto será positivo.

Esto lo veremos con un ejemplo: Si a = -3, -a= -(-3) = 3

En otro ejemplo: Si a = $-\frac{2}{3}$, -a = $-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$

LEY O PROPIEDAD	$\forall\, a \in R,\ \text{Si}\ \ 0<a<b \Rightarrow a^2<b^2$

También demostraremos que este enunciado es cierto. Intentemos leer la demostración y explicar porque se realiza cada paso.

Demostración:

Por hipótesis $0<a<b$ y por definición de menor $\exists\, k \in R^{+}$ *tal que* $b = a + k$

Si multiplicamos en ambos miembros por a (que es positivo) $a.\, b = a\,.(a+k)$

$$\Rightarrow a.b = a^2 + ak$$

Si ahora multiplicamos a la igualdad inicial también por b (que es positivo tendremos $b.b = (a+k).b \Rightarrow b^2 = ab + kb$

Sustituimos la expresión de $a.b$, en la igualdad anterior y tenemos que: $b^2 = a^2 + ak + kb \Rightarrow b^2 = a^2 + (ak + bk)$ y por definición de menor $a^2 < b^2$

El enunciado anterior es importante pues permite afirmar que para números positivos si un número es menor que otro, sus cuadrados estarán relacionados mediante la misma desigualdad.

Veamos un ejemplo: Si $4<5$ (podemos apreciar que ambos son números positivos), al considerar sus respectivos cuadrados tenemos: $16<25$, la relación entre ellos sigue siendo la misma que la considerada entre sus bases.

En cambio, si los números son negativos y uno es menor que otro, sus cuadrados no mantienen la misma desigualdad, cambia el sentido de la misma. Esto lo simbolizamos de la siguiente forma:

LEY O PROPIEDAD	$\forall a\,, b \in R,\ \ Si\ \ a<b<0 \Rightarrow a^2 > b^2$

Si analizamos un ejemplo, sea a = -4 y b = -2, sabemos que $-4<-2$ y sus cuadrados serán $(-4)^2\ y\ \ (-2)^2$, por lo tanto, $16>4$.

Muchas veces nos preguntaron si al elevar al cuadrado cualquier número, ¿qué tipo de resultado obtenemos? Al dar la respuesta, estamos tentados a decir que siempre será un número positivo.

Sin embargo, esto no es cierto para todos los números, pues si elegimos cualquier número positivo, lo cumplirá; si elegimos cualquier número negativo, también, pues al multiplicar dos números negativos, el resultado también es positivo. Pero con estas consideraciones no estamos incluyendo a "todos" los números reales, pues el cero no es positivo, ni negativo. Al elevarlo al cuadrado, no se obtiene un número positivo, se obtiene cero.

Por lo tanto, otro enunciado importante es aquel que indica que, *si hablamos de cualquier número que no sea cero, su cuadrado siempre es positivo.*

LEY O PROPIEDAD	$\forall\, a \in R,\ \text{Si}\ \ a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

Demostración:

Por hipótesis $a \neq 0$ lo cual puede suceder que $a > 0$ o que $a < 0$, entonces la demostración debemos realizarla para ambos casos.

- Si $a > 0$, podemos decir que $0 < a$ y por definición de menor $\exists\, k \in R^+$ *tal que* $a = 0 + k$, si multiplicamos por a en ambos miembros $a.a = (0+k).a \Rightarrow a^2 = 0.a + ka$ por distributiva, pero $k.a$ es positivo y $0.a = 0$. Por definición de menor $a^2 = 0 + ka \Leftrightarrow 0 < a^2 \Leftrightarrow a^2 > 0$.
- Si $a < 0$, por definición de menor $\exists\, k \in R^+$ *tal que* $0 = a + k$, si multiplicamos por a en ambos miembros $0.a = (a+k).a \Rightarrow 0 = a^2 + ka$ por distributiva, pero $k.a$ es negativo y $0.a = 0$. Si sumamos en ambos miembros $-(ak)$ que es positivo tendremos que $0 + [-(ak)] = a^2 + [ak + (-ak)] \Rightarrow 0 + [-(ak)] = a^2 + 0$ por opuesto aditivo.

  Por neutro aditivo $0 + [-(ak)] = a^2$ y por definición de menor $0 < a^2$, que es lo mismo que decir $a^2 > 0$

a) Ahora, nos interesará también analizar qué ocurre con los inversos de los números, según sean positivos o negativos.
 Esto lo plantearemos con las siguientes propiedades.

LEY O PROPIEDAD	$\forall\, a \in R,\ \text{Si}\ \ a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$
LEY O PROPIEDAD	$\forall\, a \in R,\ \text{Si}\ \ a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0$

<u>Ejemplos</u> para los dos casos anteriores:

- Si a = ½, que es un número positivo, $a^{-1} = 2$, que también es positivo
- Si a = - ½, que es un número negativo, $a^{-1} = -2$, que también es un número negativo.

b) Ahora nos interesa analizar qué relación cumplen los inversos de dos números y esto lo plantea la siguiente propiedad

LEY O PROPIEDAD	$\forall\, a,b \in R,\ \ \text{Si}\ \ 0 < a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$

Esto lo ejemplificamos con un caso particular (recordemos que un ejemplo no justifica la propiedad genéricamente)

Si $a = \frac{2}{3}$ y $b = 5$, se cumple que $\frac{2}{3} < 5$, por lo tanto, al calcular sus respectivos inversos, $a^{-1} = \frac{3}{2}$ y $b^{-1} = \frac{1}{5}$ y la relación que existe entre esos inversos es $\frac{3}{2} > \frac{1}{5}$, como podemos comprobar.

Leyes de Monotonía

En forma análoga como se plantearon las propiedades o leyes uniforme para la igualdad de números reales, tanto para la suma como para la multiplicación de números reales al inicio del Tema II, presentaremos, ahora, las denominadas *leyes de monotonía*, basándonos en las condiciones y definición de orden en este conjunto numérico (lo importante no es el nombre, sino que entendamos qué significa cada una, qué fundamento matemático la sostiene y cómo podemos usarla). Planteamos las demostraciones respectivas de cada una, pues no resulta muy inconveniente su deducción.

Leyes de monotonía de la suma

LEY O PROPIEDAD	$\forall a,b,c \in R,\ \ Si\ \ a < b \Rightarrow a + c < b + c$

Intentemos interpretar la demostración:

Demostración: Si $a < b$ por definición $\exists k \in R^{+} / a + k = b$

Si en la igualdad aplicamos la propiedad uniforme de la suma, tenemos $b = a + k \Rightarrow b + c = (a + k) + c$

Al aplicar la ley asociativa y conmutativa de la suma obtenemos $b + c = k + (a + c)$. Pero $k \in R^{+}$ y si aplicamos la definición de menor, nos queda que $a + c < b + c$

LEY O PROPIEDAD	$\forall a,b,c \in R,\ \ Si\ \ a + c < b + c \Rightarrow a < b$

Intentemos interpretar la demostración y sobre todo, comparemos con la ley propuesta en el inciso **a)**

Demostración:

Por hipótesis tenemos que $a + c < b + c$ y por definición de menor $\exists k \in R^{+}$ *tal que* $b + c = (a + c) + k$, si aplicamos la ley uniforme de la suma, sumamos $-c$, tenemos que $(b + c) + (-c) = [(a + k) + c] + (-c)$

Al aplicar la asociativa resulta que $b + [c + (-c)] = (a + k) + [c + (-c)]$

Por el opuesto aditivo obtenemos que $b + 0 = (a + k) + 0$

Por el neutro aditivo nos queda que $b = a + k$

Por definición de orden resulta que $a < b$

Observación: Estas dos últimas indican que podemos sumar o restar un mismo número a ambos lados de la desigualdad y la relación entre esos nuevos resultados seguirá siendo la misma.

De lo demostrado en **a)** y en **b)** podemos concluir que la ley de monotonía para la suma se puede expresar de esta forma:

$$\forall a,b,c \in R, \quad Si \quad a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$$

Estas leyes se utilizan mucho cuando justificamos la resolución de una ecuación:

Por ejemplo: x + 3 = 2

x + 3 + (-3) = 2 + (-3)

x = -1

Otro Teorema Importante

LEY O PROPIEDAD	$\forall a,b,c \in R, \quad Si \quad a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$

Este teorema o ley, nos permite afirmar que, si hay cuatro números distintos y, seguramente una relación de orden entre ellos, si se suman adecuadamente, la relación de orden persistirá. Eso, con un ejemplo:

Si a = -3; b = -1; c = 4 y d = 7, vemos que se cumple que $-3 < -1$ y $4 < 7$, al sumar en ese orden, quedará:

$$
\begin{array}{r}
-3<-1 \\
+\quad 4<7 \\
\hline
1<6
\end{array}
$$

De la misma forma que para la suma hay Leyes de Monotonía, la multiplicación cumple las suyas, pero hay que tener en cuenta si lo que multiplicamos a la desigualdad es un número positivo o negativo, pues ahí estará la diferencia en este caso.

Leyes de Monotonía de la Multiplicación

a)

LEY O PROPIEDAD	$\forall a,b,c \in R, \quad Si \quad a<b \wedge c>0 \Rightarrow a.c<b.c$

Interpretemos la demostración:

Demostración:

Si $a<b$ por definición de menor $\exists\, k \in R^{+}$ $tal\, que\, b = a + k$

Por ley uniforme de la multiplicación y si sabemos qué $c > 0 \Rightarrow b\,.\,c = (a + k)\,.\,c$ y por propiedad distributiva $b\,.\,c = a.c + k.c$ pero $c > 0$ y $k > 0$ $entonces$ $k.\,c > 0$ y por definición de orden $a\,.\,c < b.c$

Ejemplo 1: Si a = -5, b = -2 y c = 3 (observar que el número que va a multiplicar a ambos miembros de la desigualdad es uno positivo, el 3)

$-5<-2$

$-5.3<-2.3$

$-15<-6$

Ejemplo 2: Si a = $\frac{3}{4}$, b = $\frac{7}{3}$ y c = 5 (observar que el número que va a multiplicar a ambos miembros de la desigualdad es uno positivo, el 5)

$\frac{3}{4}<\frac{7}{3}$

$\frac{3}{4}.5<\frac{7}{3}.5$

$\frac{15}{4}<\frac{35}{3}$

Ahora analizaremos el caso de cuando el número a multiplicar a ambos miembros de una desigualdad, es negativo.

b)

LEY O PROPIEDAD	$\forall\, a,b,c \in R,\ \text{Si}\ \ a<b \wedge c<0 \Rightarrow a.c > b.c$

También podemos demostrar esta ley, pero en este caso, solo la interpretaremos con ejemplos, aunque sabemos que, para justificarla, es necesario hacerlo genéricamente, como hicimos en los casos anteriores (pregunta, si es de tu interés, averiguar cómo se hace):

Ejemplo 1: Si a = 5, b = 8 y c = -3 (observa que la condición del número c es ser un número negativo) $5<8$, y si multiplicamos en ambos miembros de la desigualdad por c = -3, que es un número negativo, la desigualdad cambia de sentido, pues -15 será mayor que -24:

$$\begin{gathered} 5<8 \\ 5.(-3)<8.(-3) \\ -15>-24 \end{gathered}$$

Ejemplo 2: Si a = $\frac{1}{4}$, b = $\frac{5}{2}$ y c = -3 (observa que la condición del número c es ser un número negativo) $\frac{1}{4}<\frac{5}{2}$, y si multiplicamos en ambos miembros de la desigualdad por c = -3, que es un número negativo, la desigualdad cambia de sentido:

$\frac{1}{4}<\frac{5}{2}$, al multiplicar por -3, nos queda $\frac{1}{4}.(-3)>\frac{5}{2}.(-3)$ cuyo resultado es $-\frac{3}{4}>-\frac{15}{2}$

Estas dos últimas leyes pueden resumirse en la siguiente interpretación:

- Una desigualdad la preservamos (significa que queda en el mismo sentido), si multiplicamos ambos miembros por un número positivo.
- Una desigualdad la invertimos (significa que queda en el mismo contrario de la dada), si multiplicamos ambos miembros por un número negativo.

Dado que, en una recta numérica, a cada punto de la misma le corresponde un número real y todos estarían ubicados en ella, estos conceptos podemos utilizarlos a la hora de buscar números reales que sean mayores o menores que otros o estén entre otros dos dados y así definimos los posibles intervalos de números.

Las opciones posibles las resumiremos a continuación:

Intervalos

El conjunto de los números reales está formado por infinitos números, y en ellos podemos utilizar la notación de intervalos para expresar desigualdades. Si sabemos que dos números reales *a* y *b* cumplen *a < b, pero si buscamos todos los números reales x, que estén entre ellos, lo denotaremos de la siguiente manera:*

DEFINICIÓN	***INTERVALO ABIERTO:*** $(a;b)=\{x\in R/\,a<x<b\}$

El resto de las posibilidades serán:

DEFINICIÓN	***INTERVALO CERRADO:*** $[a;b]=\{x\in R/\,a\le x\le b\}$
DEFINICIÓN	***INTERVALO SEMIABIERTO:*** $(a;b]=\{x\in R/\,a<x\le b\}$
DEFINICIÓN	***INTERVALO SEMIABIERTO:*** $[a;b)=\{x\in R/\,a\le x<b\}$

Los intervalos pueden ser no acotados, es decir que no tienen un extremo ya sea superior o inferior. Así tenemos:

DEFINICIÓN	***INTERVALOS NO ACOTADOS:***	
	$[a;\infty)=\{x\in R/\,x\ge a\}$	$(a;\infty)=\{x\in R/\,x>a\}$
	$(-\infty;a]=\{x\in R/\,x\le a\}$	$(-\infty;a)=\{x\in R/\,x<a\}$

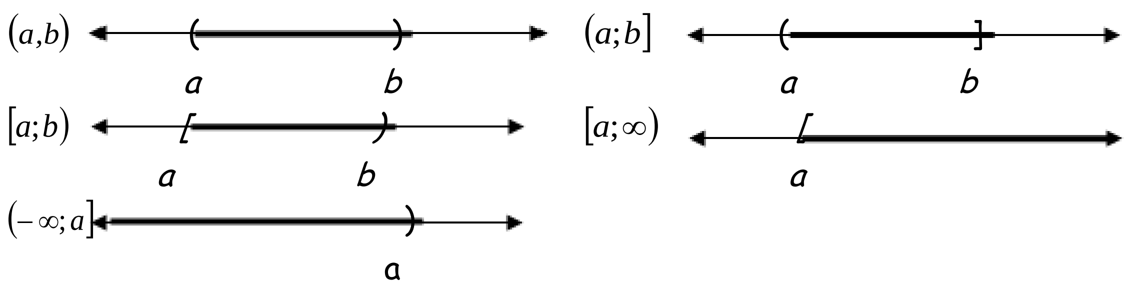
<u>Nota</u>: El símbolo ∞ denota infinito, es simplemente una convención de notación y no representa un número real, significa que siempre podemos encontrar uno más que cumple con esa condición.

- <u>Ejemplo 1</u>: $(-5,\infty)=\{x\in R: x>-5\}$ son todos los números reales mayores que -5 los que indicamos en este conjunto.

- <u>Ejemplo 2</u>: si queremos indicar el conjunto de números reales que sean mayores que 4 pero menores o iguales a 7 utilizamos la notación de conjunto $\{x\in R: 4<x\le 7\}$ y expresamos como intervalo así $(4;7]$

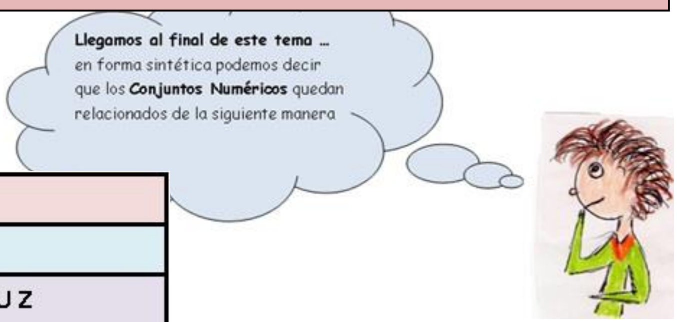
<u>Representación Gráfica de Intervalos</u>

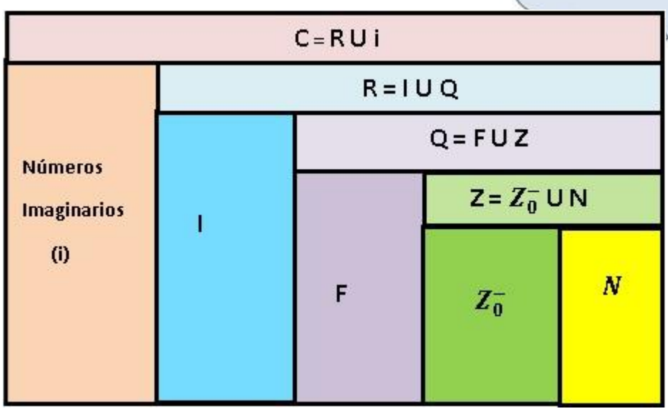
A los intervalos los podemos representar en la recta real, algunos de ellos son:



Como podemos ver, los conjuntos numéricos, siempre que trabajemos dentro del conjunto de números reales, pueden ser escritos en términos de conjunto, en términos de intervalos y pueden ser representados en una recta real, cosa que se muestra y resume en el siguiente cuadro:

Conjunto	Intervalo	Representación Gráfica
$\{x \in R : a < x < b\}$	(a, b)	a b
$\{x \in R : a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	a b
$\{x \in R : a < x \leq b\}$	$(a, b]$	a b
$\{x \in R : a \leq x < b\}$	$[a, b)$	a b
$\{x \in R : x \geq a\}$	$[a, \infty)$	a
$\{x \in R : x > a\}$	(a, ∞)	a
$\{x \in R : x \leq a\}$	$(-\infty, a]$	a
$\{x \in R : x < a\}$	$(-\infty, a)$	a





TRABAJO PRÁCTICO N° 2

1. Escribir el nombre de la propiedad que se verifica en cada expresión:

a) $\frac{3}{5}+\frac{5}{6}=\frac{5}{6}+\frac{3}{5}$ ……………………………………………………………………………

b) $5+0=5$ ……………………………………………………………………………

c) $-x.y+x.y=0$ ……………………………………………………………………………

d) $\left(-\frac{3}{4}\right).\left(-\frac{4}{3}\right)=1$ ……………………………………………………………………………

e) $\sqrt{2}+\left(-\sqrt{2}\right)=0$ ……………………………………………………………………………

f) $\left(3-\sqrt{2}\right).1=3-\sqrt{2}$ ……………………………………………………………………………

g) $\left(1+x^{2}\right).\left(1+x^{2}\right)^{-1}=1$ ……………………………………………………………………………

2. ¿Cuál de las siguientes igualdades son verdaderas $\forall a,b \in R$? Justifica

a) $a^{3}.a^{4}=a^{12}$

b) $a^{3}.a^{4}=a^{7}$

c) $\left(a^{3}\right)^{4}=a^{12}$

d) $a^{0}=1$

e) $a^{0}=1, \forall a\neq 0$

f) $a^{2}:a^{\frac{1}{2}}=a$

g) $(a+b)^{2}=a^{2}+b^{2}$

h) $(a+b+c)^{2}=a^{2}+b^{2}+c^{2}+2(ab+ac+bc)$

i) $(a+b)^{2}+(a-b)^{2}=2\left(a^{2}+b^{2}\right)$

3. Completa la siguiente tabla, cuando sea posible:

x	**-x**	**x $^{-1}$**	**x^{2}**
		- 2	
	0		
			$\frac{49}{25}$
$\sqrt{5}$			

	$2-\sqrt{3}$		
		$\sqrt{5}-\sqrt{3}$	

4. **Encuentra el resultado, aplicando propiedades cuando sea posible e indica a qué conjunto numérico pertenece:**

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}:\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}=$

c) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{3}=$

d) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2}:\left(\frac{27}{8}\right)^{-3}=$

e) $-\frac{5}{6}-\left(-\frac{11}{2}+\frac{6}{5}+1\right)=$

f) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}:\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=$

g) $\frac{4}{10}:\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{5}{3}-\frac{1}{4}:\frac{3}{5}=$

h) $\left(\frac{2}{3}-\frac{7}{2}-\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{1}{6^2}}\right)^{2}=$

i) $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+3\left(\frac{2}{3}-1\right)^{2}\right]\div\left[\left(\frac{1}{2}-1\right)\div 2\frac{1}{2}\right]=$

j) $1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2}}}=$

k) $2\sqrt{12}-3\sqrt{75}+\sqrt{27}=$

l) $\sqrt{24}-5\sqrt{6}+\sqrt{486}=$

m) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)^{2}=$

n) $\left(3-\sqrt{2}\right)^{2}=$

o) $\left(\sqrt{5}-3\right).\left(\sqrt{5}+3\right)=$

p) $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right).\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)=$

q) $\frac{5}{2\sqrt{2}}+\sqrt{8}-\frac{2}{3}\sqrt{18}=$

r) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}+\sqrt{12}-\dfrac{1}{4}\sqrt{75}=$

s) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3}\sqrt{12}-\dfrac{1}{5}\sqrt{8}=$

5. Expresa con un sólo cálculo combinado y determina el valor del resultado:

a) La mitad de la mitad de $\dfrac{3}{5}$

b) La mitad de la tercera de $-\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

c) La tercera parte de la mitad de $\dfrac{3}{\sqrt{2}-1}$

d) Al doble de la suma entre $\dfrac{3}{4}$ y 2, divídanlo por la mitad de la resta entre 1 y $\dfrac{1}{2}$

e) Al doble de $\dfrac{3}{4}$ súmenle 2 y luego divídanlo por la resta entre la mitad de 1 y $\dfrac{3}{2}$

f) Al opuesto del inverso multiplicativo de 2, réstenle la tercera parte de la suma entre $\dfrac{2}{3}\ y\ \dfrac{3}{2}$

g) A la suma entre 1 y el inverso de $\dfrac{5}{2}$, réstenle el cociente entre el opuesto del opuesto de $\dfrac{5}{2}\ y\ \ 1.$

6. Lee atentamente y luego resuelve los siguientes problemas

a) Elena va de compras con $180, gasta 3/5 de esa cantidad. ¿Cuánto dinero le queda?

b) Hace unos años Pedro tenía 24 años, que representan los 2/3 de su edad actual. ¿Qué edad tiene Pedro?

c) Si de 300 butacas que tiene un cine se ocuparon 180, ¿qué porcentaje de butacas están ocupadas?

d) Pablo realizó una compra que importa los 2/3 del dinero que le dio su madre, pero sobre ese valor le hacen un descuento del 15% ¿Cuánto dinero le dio su madre si le quedan $260?

e) Un quintero obtuvo 525 kg de frutas. Apartó 3/5 del total para fabricar dulce, le dio a su hermano los 2/3 del resto y lo que le quedaba lo vendió a $8 el kg, ¿cuánto obtuvo por la venta?

f) La municipalidad autorizó a realizar una huerta comunitaria en un terreno baldío. Un tercio del total se destinará a plantar hortalizas; en las $\dfrac{2}{5}$ partes de lo que queda se plantarán árboles frutales no cítricos y en el terreno restante, se plantarán frutales cítricos. ¿Qué parte del terreno original se destinará a los árboles frutales cítricos?

g) En la compra que efectuó Martín le descontaron el 15% sobre el total del ticket que incluía un TV a $800, un reproductor de DVD $450 y un equipo de audio a $1150. ¿Habría pagado lo mismo si el descuento se lo hubiesen hecho sobre cada uno de los tres artículos? Justificar.

h) De un tonel de vino que contenía 24,6 litros se sacaron primero 4,82 litros; luego, el doble de esa cantidad y por último se extrajeron 1,14 litros. El resto se envasó en botellas de 0,75 litros cada una. ¿Cuántas botellas pudieron llenarse?

i) En el club, un tercio de los socios juegan al vóley y la mitad de los jugadores de vóley son mujeres. ¿Qué parte del total de socios son las jugadoras de vóley?

j) Para ingresar a la Universidad el promedio exigible es de 70 puntos. Máximo sacó 72 y 63 puntos en los dos primeros parciales. ¿Cuántos puntos debe sacar en el próximo parcial para igualar o superar el promedio de aprobación?

k) Una empresa ofrece a sus empleados dos opciones de pago. La primera opción es una suma fija de $800 más el 4% de comisiones sobre todas las ventas y la segunda propone una suma fija de $600 más el 6% sobre el total de las ventas. ¿Para qué cantidad del total de ventas es mejor la primera opción que la segunda?

7. ¡¡A conjeturar!!

Situación 1:

a) Calcula obteniendo los resultados con calculadora y luego observa

- 1001 x 65 =
- 1001 x 82 =
- 1001 x 14 =

b) Conjetura el resultado, a partir de los obtenidos anteriormente, de:

- 1001 x 38 =
- 1001 x ab = (ab es un número de dos cifras)

Situación 2:

a) Calcula y observa

- 11 x 33 =
- 11 x 22 =
- 11 x 55 =

b) Conjetura sin calcular:

- 11 x 77 =
- 11 x ab = (ab es un número de dos cifras iguales)

Situación 3:

a) Calcula con calculadora y observa

- 1 x 8 + 1=
- 12 x 8 + 2 =
- 123 x 8 + 3 =
- 1 234 x 8 + 4 =

b) Conjetura sin calcular

- 12 345 x 8 + 5 =

- 1 234 567 x 8 + 7 =
- 12 345 678 x 8 + 8 =
- ¿Cuál sería la próxima operación dentro de la serie?

Situación 4:

a) Calcula con calculadora y observa
- 37 x 33 =
- 37 x 36 =
- 37 x 39 =
- 37 x 42 =
- 37 x 45 =

b) Conjetura sin calcular:
- 37 x 48 =
- 37 x 51 =
- 37 x 54 =
- ¿Continuará el mismo comportamiento para números más pequeños y más grandes que multiplican a 37?

8. Indica:

a) si los siguientes enunciados son verdaderos o falso, justificando mediante la definición de orden de números reales

$\frac{8}{4} < 5$ $\quad 0{,}27 < \frac{1}{5}$ $\quad -\frac{1}{4} > -0{,}5$ $\quad 5{,}3 < 0{,}27$

b) cuál de las siguientes desigualdades es correcta:

$0{,}80 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 0{,}86$ $\quad 0{,}80 < 0{,}86 < \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \frac{\sqrt{3}}{2} < 0{,}80 < 0{,}86$

9) Expresa simbólicamente cada uno de los siguientes enunciados, usando desigualdades:

a) El gasto público no puede exceder los $10.000.000 por año.
b) Se piensa que el producto bruto interno aumentará entre el 10 % y 15% durante el año 2.019.
c) Según los economistas se debe invertir en acciones cuando las tasas de interés varíen entre el 14 y 15%.
d) Los impuestos no deben superar el 20% de los ingresos.
e) El costo de producción de un litro de leche no puede superar los $ 12 para que la empresa tenga utilidad.
f) En una fábrica de colchones, el costo de producción es como mínimo de $2.000 por colchón, mientras que los costos fijos son de $ 70.000. Se quiere que el costo total no supere los $550.000.

10) Determina la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones, justificando la respuesta de la siguiente manera:

- **Si es verdadera, enunciando la propiedad, ley o teorema que cumple**
- **Si es falsa, con un ejemplo que muestre que no es cierta**

Sabiendo que $\forall a, b, c \text{ y } d \in R$

a) Si a > 3, entonces a + 5 > 8
b) Si b < -2, entonces 2b > -4

c) Si a < ½ , por lo tanto, -2a > -1

d) $a > 1 \wedge b > 2$ en consecuencia $a + b > 3$

e) $a > b \wedge b > c$ en consecuencia $a > c$

f) $a > c$ entonces $a^2 > c^2$

g) $a^2 > 0$

h) Como $a < b$ entonces $a.(-c) > b.(-c)$

i) Si $-a < 3$ entonces $a > -3$

j) Si $a + b.c + c < d + b.c + c$ entonces $a < d$

k) $a > b$ entonces $a + c > b + c$

l) $d > 0 \Rightarrow -2b < 0$

m) Si $a + 1 > b + 1 \wedge c > 0 \Rightarrow (a + 1).\ c > (b + 1).\ c$

11) Sabiendo que x, y ∈ R, 2 < x < 6 y que -4 < y < -2:

a) Halla el conjunto de números reales en que se encuentra cada una de las siguientes expresiones:

2x -y $\frac{x}{2}$ x + y 3x + 2y 2x – y

b) Expresa cada conjunto anteriormente obtenido, como un intervalo.

c) Representa en una recta numérica cada conjunto anterior.

12) Dados los siguientes conjuntos A = [2; 5) , B = (-4; 7], C = [-3;2), D = (3;7), halla, realizando las representaciones en rectas numéricas, el intervalo que resulta de:

- **A U B**
- C U D
- A U D
- B ∩ D
- A ∩ C
- C ∩ D
- B – A
- D – A

Y ahora? Me detengo a reflexionar!!

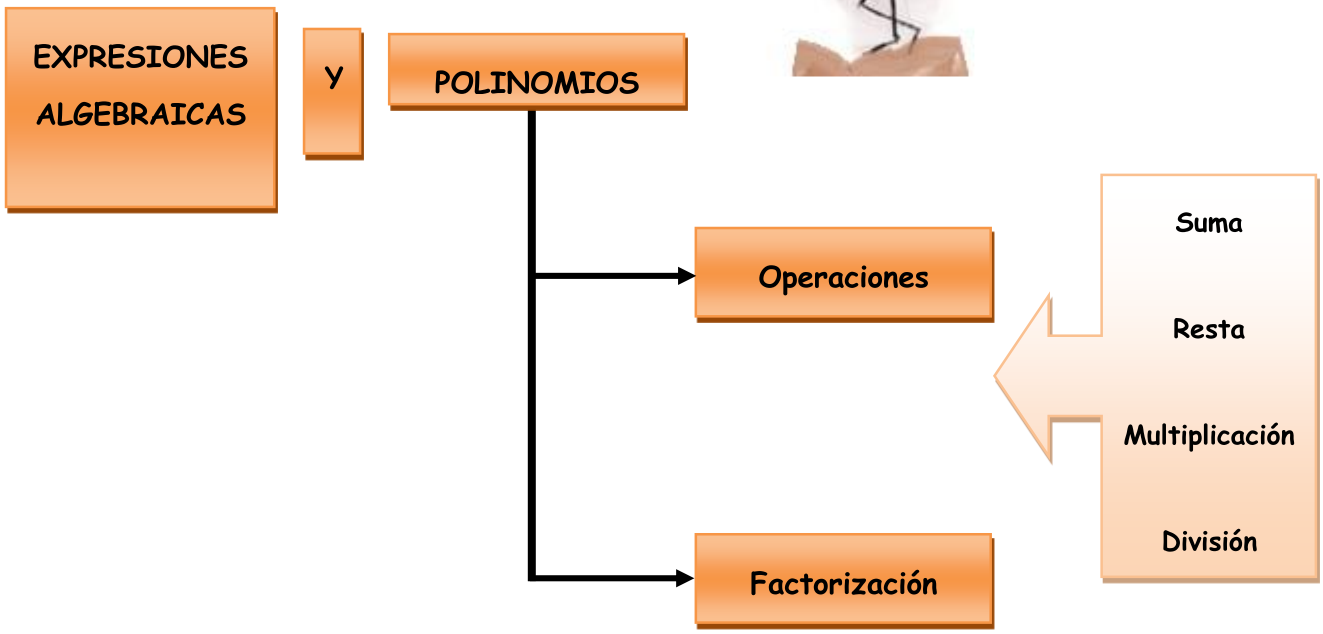
Marcar con una x en la columna que corresponda según los aprendizajes que consideres logrados, o que está en proceso o bien donde debes volver a intentar. Si la mayoría de las cruces están en la segunda y tercera columna, revisa tus conocimientos y vuelve a estudiar los mismos.

Metacognición	Lo Logré	Está en proceso	Debo volver a intentar
Conozco e identifico los tipos de conjuntos numéricos			
Reconozco y aplico las propiedades para resolver			
Aplico la propiedad distributiva cuando corresponde			
Resuelvo las operaciones (todas) en cada conjunto numérico (Naturales, enteros racionales y reales)			
Resuelvo operaciones con números irracionales, racionalizando denominadores			
Priorizo las operaciones cuando hay varias combinadas en un ejercicio			
Resuelvo problemas aplicando los distintos números			
Realizo conjeturas y obtengo soluciones dentro de los Números Enteros			
Comprendo el alcance y uso de la definición de orden en los números reales			
Identifico el orden entre dos números reales cualquiera			
Represento los números reales en una recta numérica			
Traduzco enunciados en los que se involucra el orden entre los números			
Aplico las propiedades para justificar enunciados			
Encuentro intervalos de números reales, en base a relaciones de orden dadas			

TEMA III

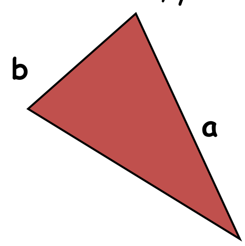
EXPRESIONES ALGEBRAICAS
Y
POLINOMIOS

Tema III "EXPRESIONES ALGEBRICAS Y POLINOMIOS"



Expresiones Algebraicas

El triángulo isósceles que ves a la derecha tiene dos lados iguales de medida **a**, y otro lado de medida distinta, **b**.



Por tanto, el perímetro (suma de las longitudes de sus lados) de este triángulo es: 2a + b

La expresión 2a + b es una **expresión algebraica**.

Usamos muchas veces cuando no son conocidos numéricamente los datos

DEFINICIÓN	*Una expresión algebraica es toda combinación de números y letras unidos por los signos de las operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación, división y potenciación.*

Si en este triángulo, los valores de los lados son: a = 4cm y b = 5cm, entonces el perímetro P es: P = 2 · 4 + 5 = 13 cm

Valor Numérico

El número 13 es el **valor numérico** de la expresión algebraica 2a + b para a = 4 y b = 5.

DEFINICIÓN	*El valor numérico de una expresión algebraica es el número que obtenemos al sustituir las letras por números y realizar las operaciones indicadas en la expresión.*

Una expresión algebraica puede tomar infinidad de valores numéricos distintos, dependiendo del valor que le demos a las letras en la expresión algebraica.

En el triángulo isósceles, si a = 4 y b = 2, el perímetro es 10; si a = 15 y b = 10, es 40, etc.

Lenguaje Algebraico

Cuando hablamos del perímetro del triángulo isósceles, podemos escribir la expresión que le corresponde en lenguaje algebraico, porque sabemos que, para calcularlo, debemos sumar todas las medidas que obtengamos del contorno de esa figura.

Por otro lado, en caso de que nos pidan la mitad de la edad que tendrá Pedro dentro de 5 años, hay que pensar cómo calcular la mitad y de qué piden esa mitad. Como lo requerido es la mitad de la edad que va tener Pedro dentro de 5 años, eso sabemos que calculamos sumando 5 a la edad actual del muchacho y luego obteniendo su mitad. Con lo cual, obtener la mitad de la edad que tendrá Pedro dentro de 5 años requerirá que designemos con P a la edad de Pedro y calculemos: $\frac{\mathrm{P}+5}{2}$

Así es que debemos conocer el significado de las palabras y su traducción al lenguaje algebraico.

Algunas expresiones algebraicas dependen de varias variables o valores que no conocemos y que sustituimos por letras.

Ahora estudiaremos un caso especial de expresiones algebraicas y así tenemos los polinomios. Quizá los polinomios no sean útiles en la vida diaria como lo es la suma o la multiplicación, sin embargo, su estudio ha permitido (y sigue permitiendo) el desarrollo de las matemáticas y con ello el desarrollo de la tecnología, de la industria y de todo lo que conocemos a nuestro alrededor...

Polinomio

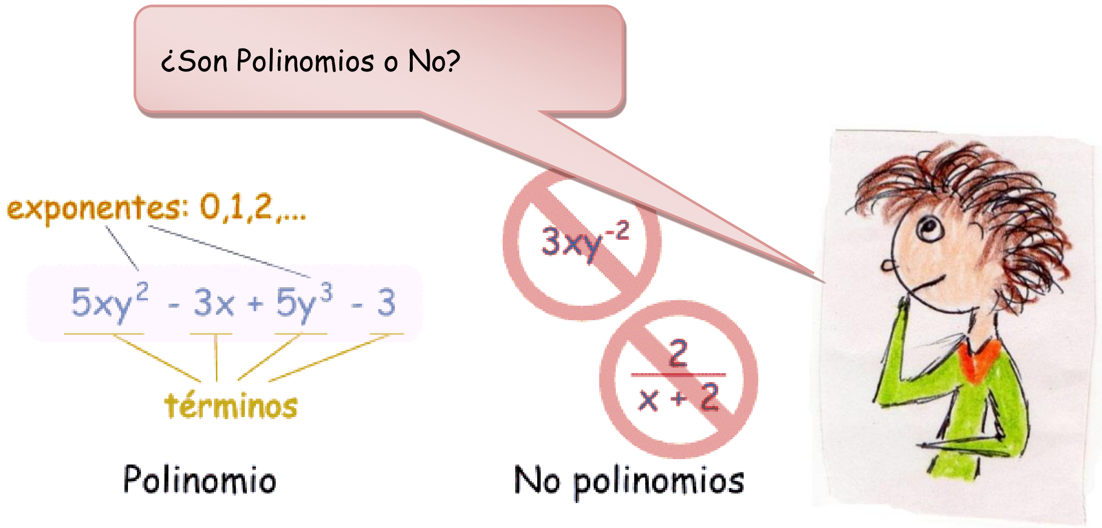
Las expresiones algebraicas y los polinomios podemos encontrarlos en varias ramas del conocimiento humano, como en la base de la informática.

También en economía los cálculos de intereses y duración de las hipotecas se realizan con expresiones polinómicas; así, por ejemplo, el capital *C* a un porcentaje x en 3 años se convierte en $C\cdot(1+x)^3$ que es el cubo de un binomio.

La medicina y otras ramas de la ciencia avanzan ayudadas de esta herramienta algebraica.

Ahora definiremos el concepto de polinomio.

DEFINICIÓN	*Se llama polinomio en "x" de grado "n" a una expresión del tipo:* $P(x)=a_0+a_1.x^1+a_2.x^2+...+a_n.x^n, n\in N_0$,*donde* $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ *son los coeficientes (y pertenece a los números reales)* $a_n\neq 0$ *y* x *es la indeterminada o variable.*



En general conviene iniciar el trabajo con una sola variable, que llamamos en general x, a_0 recibe el nombre de término independiente, a_n coeficiente principal y n es un número natural y su mínimo valor es 0, que indica el grado del polinomio.

Grado de un Polinomio: está determinado por el mayor exponente de la variable.

Ejemplos: $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ el grado es $n = 3$, $a_0 = 5$, $a_n = 1$

$Q(x) = x^2 - x^5$ el grado es $n = 5$, $a_0 = 0$, $a_n = -1$

$S(x) = 8$ el grado es $n = 0$, $a_0 = 8$, $a_n = 8$

$R(x) = 0$ este es el Polinomio nulo, que no tiene grado.

También otro concepto que debemos definir es el de:

Valor Numérico de un Polinomio

DEFINICIÓN	*Es el valor que obtenemos al sustituir la indeterminada por el valor dado y luego efectuar las operaciones.*

Ejemplo: Dado $P(x) = x^2 + 5x - 2$ hallar $P(-1)$. Para ello sustituimos la indeterminada x por el valor -1 y así obtenemos $P(-1) = (-1)^2 + 5(-1) - 2 = -6$

Otro de los conceptos esenciales en este tema de los polinomios es la igualdad de polinomios y así tenemos:

Igualdad de Polinomios

DEFINICIÓN	*Dos polinomios son iguales, si tienen el mismo grado y son iguales los coeficientes de los términos de igual grado.* *Es decir:* $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n \;\; y \;\; B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_mx^m$ *entonces* $A(x) = B(x) \;\Leftrightarrow\; n = m \;\; y \;\; a_0 = b_0,\; a_1 = b_1,\; a_2 = b_2,\; a_3 = b_3,\; \ldots,\; a_n = b_n,$

Ejemplo: Determinar el valor de k para que los polinomios P(x) y Q(x) sean iguales, siendo las expresiones de los mismos, $P(x) = x^2 + 5x - 2$ y $Q(x) = x^2 + (k-2).x - 2$.

Si partimos de la definición, los coeficientes de los términos del mismo grado deben ser iguales; o sea que para los términos de grado dos, 1= 1; para los de grado uno, 5 =k-2 de donde k=7 y para los términos independientes -2= -2

También es importante conocer la clasificación de polinomio.

Clasificación de Polinomios

Los polinomios se clasifican

- Por la cantidad de términos
  - → Monomio: un término
  - → Binomio: dos términos
  - → Trinomio: tres términos
  - → Cuatrinomio: cuatro términos
  - → Polinomio de n términos
- Polinomio Nulo → Es aquel que tiene todos sus términos nulos
- Polinomio Mónico → Es aquel cuyo coeficiente principal es 1

En la siguiente tabla mostraremos un ejemplo para cada caso:

Expresión	Grado n	Coeficiente principal a_n	Término independiente a_0	Clasificación
$A(x) = 5 - x^3 + \frac{8}{3}x^5$	5	$\frac{8}{3}$	5	trinomio
$B(x) = \frac{8}{3}x^2 + x^4$	4	1	0	binomio y mónico
$C(x) = 1 - 2x + \sqrt{2}x^2 + x^3$	3	1	1	cuatrinomio y mónico
$D(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	monomio
$E(x) = 0$	No tiene	------------	------------------	Polinomio nulo
$F(x) = \frac{3}{x-5}$	-------	------------	-----------------	No es polinomio

Otro concepto también importante es el siguiente:

Raíz de un polinomio

DEFINICIÓN	*La raíz de un polinomio en "x" es el valor de la indeterminada "x" para el cual el valor numérico de dicho polinomio es cero.* *Simbólicamente* a *es raíz de* $P(x) \Leftrightarrow$ $\mathbf{P(a) = 0}$

Ejemplo: $\sqrt{6}$ es una raíz o cero del polinomio $S(x) = x^2 - 6$ porque $S(\sqrt{6}) = (\sqrt{6})^2 - 6 = 6 - 6 = 0$

Así como resolvemos operaciones con los distintos conjuntos numéricos, también resolveremos operaciones con polinomios y así tenemos:

Operaciones con Polinomios

Con los polinomios podemos efectuar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.

Suma de Polinomios

DEFINICIÓN	*Para sumar polinomios, sumamos los coeficientes de los términos semejantes, es decir los términos que tienen el mismo grado.*

Por ejemplo: Dado los polinomios $P(x)=8x^4+x^2-5x-4$ y $Q(x)=3x^3+x^2-3x-2$, así para determinar $P(x) + Q(x)$, completamos y ordenamos en forma decreciente los polinomios y sumamos entre sí los coeficientes de los términos igual grado:

$$
\begin{aligned}
P(x) &= 8x^4 + 0x^3 + x^2 - 5x - 4 \\
Q(x) &= 3x^3 + x^2 - 3x - 2 \\
P(x) + Q(x) &= \mathbf{8x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 8x - 6}
\end{aligned}
$$

Polinomio Opuesto: es el polinomio que obtenemos al cambiar los signos a cada uno de los coeficientes del polinomio dado.

Por ejemplo, sea $Q(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 4$ entonces su opuesto es $-Q(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3x + 4$

Para definir la resta de polinomios, usaremos el concepto de polinomio opuesto y así tenemos que:

Resta o Diferencia de Polinomios

DEFINICIÓN	*Restar un polinomio Q(x) de otro polinomio P(x) significa, sumarle al polinomio P(x) el opuesto de Q(x), es decir:* $P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)]$

Por ejemplo: Calcular $P(x) - Q(x)$ con los polinomios del ejemplo anterior.

Para ello determinamos primero, el polinomio opuesto a Q(x); es decir –Q(x)= $-3x^3-x^2+3x+2$, luego completamos los polinomios y sumamos los coeficientes de igual grado:

$$P(x) = 8x^4 + 0x^3 + x^2 - 5x - 4$$
$$-Q(x) = \qquad -3x^3 - x^2 + 3x + 2$$
$$P(x) - Q(x) = 8x^4 - 3x^3 + 0x^2 - 2x - 2$$

$$grado[P(x) \pm Q(x)] \leq máximo \;\; grado[Q(x) \;\mathbf{o}\; P(x)]$$

Propiedades para la Suma de Polinomios

- **<u>Propiedad Conmutativa</u>**: Dados los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, entonces $P(x)+Q(x)=Q(x)+P(x)$.
- **<u>Propiedad Asociativa</u>**: Cualesquiera que sean los polinomios $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$, resulta que $P(x)+[Q(x)+R(x)]=[P(x)+Q(x)]+R(x)$
- **<u>Existencia del elemento neutro o idéntico</u>**: Para cualquier polinomio $P(x)$, siempre existe otro polinomio nulo ($\exists\ 0$) tal que $P(x)+0=P(x)$.
- **<u>Existencia del Opuesto o Inverso Aditivo</u>**: Para cualquier polinomio $P(x)$, siempre $\exists -P(x)$, tal que $P(x)+[-P(x)]=0$.

Ahora veremos otra de las operaciones fundamentales:

<u>Producto de un Escalar (un número real) por un Polinomio</u>

DEFINICIÓN	*Dado un polinomio* $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$ *y un escalar* $k \in R$ *definimos el producto del polinomio por dicho escalar a otro polinomio del mismo grado cuyos coeficientes se obtienen multiplicando el escalar por cada uno de los coeficientes del polinomio dado.*

Simbólicamente $k \cdot P(x) = k \cdot (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n) = k \cdot a_0 + k \cdot a_1 x + k \cdot a_2 x^2 + \cdots + k \cdot a_n x^n$

Ejemplo: **Determinar** $-\frac{5}{3}.(1 - 7x + 3x^3) = -\frac{5}{3} + \frac{35}{3}x - 5x^3$

Propiedades del producto de un escalar por un polinomio

- **Asociatividad para los escalares**: $\forall \alpha, \beta \in R \quad (\alpha \cdot \beta) \cdot P(x) = \alpha \cdot [\beta \cdot P(x)]$
- **Distributividad de un escalar** respecto de la suma de polinomios: $\forall \alpha \in R, \quad \alpha \cdot [P(x) + Q(x)] = \alpha \cdot P(x) + \alpha \cdot Q(x)$.
- **Distributividad de un polinomio** respecto de la suma de escalares: $\forall \alpha, \beta \in R, \quad (\alpha + \beta) \cdot P(x) = \alpha \cdot P(x) + \beta \cdot P(x)$.

Aplicaciones de los Polinomios en Economía-Ingreso, Costo y Utilidad

Entender conceptos fundamentales como ingreso, costo y utilidad, y conocer los efectos sobre estos factores frente a cambios en los precios y costos, permite optimizar las utilidades de la empresa.

Para ello comenzaremos con el concepto de **Ingreso (I)**; para las empresas el ingreso corresponde a las ***entradas económicas o remuneración que recibe por la venta de bienes y/o servicios***. El ingreso no contempla los costos o gastos en que se incurre para obtener este ingreso. Los ingresos se pueden clasificar en:

Ingreso total: ingreso obtenido por la venta de la totalidad de los productos.

Ingreso marginal: corresponde al ingreso generado por el aumento de la producción en una unidad.

Ingreso medio: corresponde al promedio de ingreso por unidad vendida, es decir, es el ingreso total dividido por el total de unidades vendidas.

Ahora seguiremos con el concepto de **Costo (C)**. Por su parte, los costos son el ***sacrificio incurrido para producir bienes y servicios***. Al igual que los ingresos, los costos pueden clasificarse en costos totales, marginales y medios. Por su parte, los costos totales se dividen en dos componentes:

Costos fijos (C_f): no varían con la cantidad producida. Derivan del mantenimiento de recursos fijos de producción, que deben pagarse aun cuando la empresa no produzca, por ejemplo, el alquiler de un local o el pago de un seguro contra incendio. Es importante considerar que los costos sólo se comportan como fijos en el corto plazo, dado que a largo plazo todos los costos son variables.

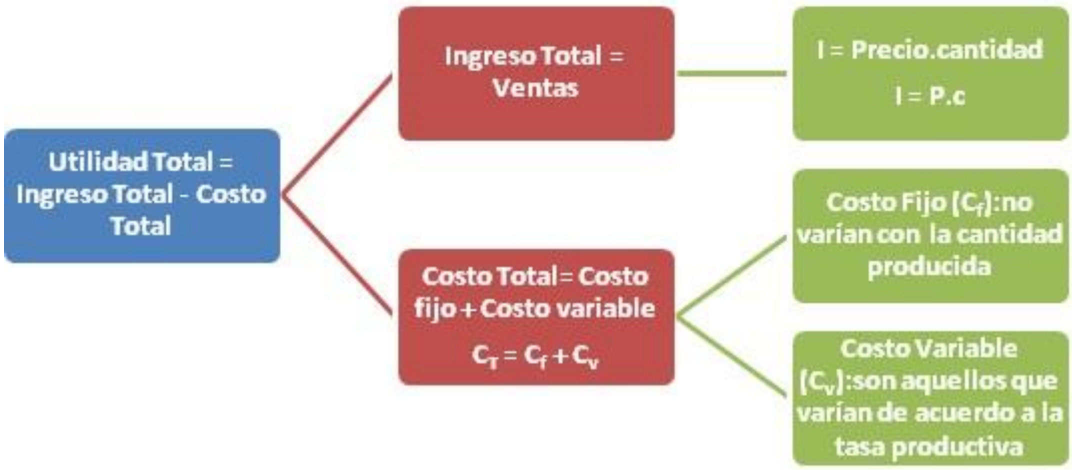
Costos variables (C_v): son aquellos que varían de acuerdo a la tasa productiva. Por ejemplo, el costo por insumos o materias primas o el uso de energía son variables dado que depende de la cantidad producida.

Así tenemos que $C_T = C_f + C_v$

Es importante diferenciar a los costos de los gastos. Mientras los costos se incurren para producir un bien o servicio, los gastos son aquellos destinados a la distribución o venta del producto, y a la administración. Los gastos por tanto no suelen ser atribuidos a un activo en particular. En efecto, no se realizan con el propósito de generar posteriores ingresos, sino que se incurre en los gastos por necesidad.

Y por último nos detenemos en la **Utilidad**, que es la ***diferencia entre los ingresos y todos los costos y gastos*** en los cuales se incurrió durante el período. También puede ser entendida como la ganancia que se obtiene al vender un producto. Por tanto, no considera los gastos en el cálculo y corresponde a un ***margen de contribución*** por producto.

$\text{Utilidad}_{\text{producto}} = \text{Ingresos}_{\text{producto}} - \text{Costos}_{\text{producto}}$



Ahora resolveremos algunos ejemplos:

Ejemplo 1: **La compañía AMEL hace un producto para el que el costo variable por unidad sea de \$60 y el costo fijo sea de \$80.000. Cada unidad (x) tiene un precio de venta de \$100. Determine la expresión polinómica en función de la indeterminada x de:**

- **Costo total**: $C_T(x) = 80.000 + 60x$
  Recordemos que $C_T = C_f + C_v$ donde $C_f = 80.000$ y $C_v = 60.x$
- **Ingreso**: $I(x) = 100x$ tener en cuenta que $I = P.c$ donde $P = 100$ y $c=x$

- **La Utilidad** $U(x)= 100x - (80.000 + 60x) = 40x - 80.000$

Ejemplo 2: **En una empresa, el número de altas de clientes de los últimos 10 años ha variado, ajustándose al polinomio $P(x) = -2x^2 + 40x + 60$, donde x es el número de años transcurridos. Si cada año se han dado de baja 15 clientes:**

- Halla el polinomio con el que se pueda calcular el número de clientes que ha tenido esta empresa a lo largo de estos diez años.

  $Q(x) = P(x) - 15x = -2x^2 + 40x + 60 - 15x = -2x^2 + 25x + 60$

- Utiliza este polinomio para dar el número de clientes que esta empresa tenía inicialmente, a los cinco años y a los diez.

  $Q(5) = -2.(5)^2 + 25.(5) + 60 = -50 + 125 + 60 = 135$

  $Q(10) = -2.(10)^2 + 25.(10) + 60 = -200 + 250 + 60 = 110$

Ahora continuamos con la multiplicación de polinomios, que se define:

Multiplicación de Polinomios

DEFINICIÓN	*Para multiplicar dos polinomios aplicamos reiteradamente la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma algebraica y las leyes de la multiplicación y de las potencias.*

Esta definición la podemos visualizar mejor si lo aplicamos a un ejemplo.

Ejemplo: Calcular el valor de $G(x)$, si $G(x) = P(x).Q(x)$, donde $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ y $Q(x) = 3x - 2$

$$G(x) = \left(2x^2 - 3x + 1\right).(3x - 2) = 2x^2.3x + 2x^2.(-2) - 3x.3x - 3x.(-2) + 1.3x + 1.(-2) =$$

$$G(x) = 6x^3 - 4x^2 - 9x^2 + 6x + 3x - 2 = 6x^3 - 13x^2 + 9x - 2$$

Es decir que aplicamos ley distributiva y luego agrupamos los términos semejantes.

Propiedades para la multiplicación de polinomios

Dados los polinomios $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ enunciamos las propiedades que cumplen:

Conmutativa: $P(x)Q(x) = Q(x)P(x)$.

Asociativa: $P(x)[Q(x)R(x)] = [P(x)Q(x)]R(x)$.

Existencia del elemento idéntico: Para todo $P(x)$ existe el polinomio unidad 1 tal que 1. $P(x).1 = P(x)$

Distributiva del producto para la suma: $P(x)[Q(x) + R(x)] = P(x)Q(x) + P(x)R(x)$.

Productos especiales de polinomios

En la multiplicación de polinomios tenemos casos especiales, y que es importante conocerlos, tales como:

Cuadrado de un Binomio

DEFINICIÓN	*Es un trinomio cuyo resultado es: el cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término.*

Simbólicamente (a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2

Por ejemplo: Calcular $(2-x)^2+\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\left(4-4x+x^2\right)+\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)=2x^2-\frac{10}{3}x+\frac{37}{9}$

Cubo de un Binomio

DEFINICIÓN	*Es un cuatrinomio cuyo resultado es: el cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo término, más el cubo del segundo término.*

Simbólicamente (a + b)^3 = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3

Por ejemplo: Calcular

$$(1-x)^3+\left(x-\frac{1}{2}\right)^3=\left(1-3x+3x^2-x^3\right)+\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{4}x-\frac{7}{8}$$

Producto de una suma por una diferencia

DEFINICIÓN	*Es igual a una diferencia de cuadrados; es decir el cuadrado de la primera base menos el cuadrado de la segunda base.*

Simbólicamente: (a + b) . (a – b) = a^2 – b^2

Por ejemplo:

- $(x^2+2)\left(x^2-2\right)=\left(x^2\right)^2-2^2=x^4-4$
- $(2-x)(2+x)-\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=\left(4-x^2\right)-\left(x^2-\frac{1}{9}\right)=\frac{37}{9}-2x^2$

Aplicaciones

Ahora resolveremos dos problemas de aplicaciones de las operaciones con polinomios.

1. **En unos grandes almacenes trabajan 20 vendedores que proporcionan unos ingresos por ventas de 6200 € al mes cada uno.**
   a) Calcula los ingresos totales proporcionados por estos 20 vendedores
   Recordando que I = P. c, para este caso I = 6200.20 = 124000

b) Por cada vendedor extra que se contrata, los ingresos de cada uno de ellos disminuyen en 150 €. Determina los ingresos mensuales totales en función del número x de vendedores extra que se contraten.
Ahora el nuevo precio $P(x) = 6200 - 150x$ y la nueva expresión de la cantidad es $C(x) = 20 + x$, por ello:
$I(x) = P(x) \,.\, C(x) = (6200 - 150x).(20 + x) = 124000 + 6200x - 3000x - 150x^2$
$I(x) = 124000 + 3200x - 150x^2$

c) Determina los ingresos que proporcionarían 21 vendedores y 22 vendedores.
Como x es el número de vendedores extras, si queremos ver para 21, significa que tenemos 1 vendedor extra
$I(1) = 124000 + 3200.1 - 150(1)^2 = 124000 + 3200 - 150 = 127050$

$I(2) = 124000 + 3200.2 - 150(2)^2 = 124000 + 6400 - 600 = 129800$

d) Utilizando el polinomio obtenido calcula qué sería más conveniente: que la empresa contratase a 10 vendedores o a 12 extras.
$I(10) = 124000 + 3200.10 - 150(10)^2 = 124000 + 32000 - 15000 = 141000$
$I\,(12) = 124000 + 3200.12 - 150(12)^2 = 124000 + 38400 - 21600 = 140800$
Sería conveniente que la empresa contrate 10 vendedores extras en lugar de 12.

2. **Tenemos un producto perecedero a la venta. Su precio inicial es de 20 € el kg, pero cada día que pasa este precio desciende 20 céntimos. Por otra parte, el primer día se consiguen vender 80 kg, y sabemos que cada día que pasa se venden 5 kg más. Si llamamos x al número de días transcurridos. Determina el polinomio que indica:**
a) El precio diario: $P(x) = 20 - 0{,}20x$

b) La cantidad diaria vendida: $C\,(x) = 80 + 5x$

c) El ingreso obtenidos: $I\,(x) = P(x) \,.\, C(x) = (20 - 0{,}20x).(80 + 5x) = 1600 + 84x - x^2$

TRABAJO PRÁCTICO N° 3

1) Completar el siguiente cuadro con lo pedido en cada caso:

Lenguaje coloquial	Lenguaje matemático
La suma entre un número y 2	x + 2
La diferencia entre un número y el opuesto de 5	
La cuarta parte de un número	
Perímetro de un rectángulo de base 5 y altura a	
El siguiente de un número	
Las tres quinta parte del siguiente de un número	
La suma entre el cuádruple de un número y la mitad de 12	
El cuadrado del siguiente de un número	
El área de un cuadrado de lado x	
La diferencia entre cuatro veces la edad de Santiago y la mitad de dicha edad	
El opuesto del inverso de un número	
La edad de Javier hace diez años	

2) En base al enunciado traducido, completa el resto de las expresiones algebraicas:

a)
- Edad de Damián ____________________
- Cuatro veces la edad de Damián: 4 . x
- Edad que tendrá Damián dentro de 3 años _________________
- Edad que tenía Damián hace 8 años ________________
- Las tres cuartas partes de la edad que tenía Damián hace 3 años _________________

b)
- El número de horas que funciona un motor por día: x
- El número de horas que funciona el motor en 18 días ______________

c) Suma de dos números distintos: x + y
- Mitad de la resta de dos números _______________________
- Producto de un número y el siguiente del otro____________________
- Producto del anterior de un número con el doble del siguiente del otro número __________________

3) ¿Cuáles de las siguientes expresiones son polinomios? Justificar la respuesta.

a) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$ $\quad$ $b)$ $-t^7 + \frac{1}{2}t^6 + \sqrt{7}$ $\quad$ $c)$ $\frac{1}{2z^3 - 3z^2 + 5}$

d) $\frac{5}{3}$ e) $2y^2 + y + y^{-1}$ f) $\sqrt{\frac{z-3}{2}}$

g) $3x + \sqrt{5}x^3 - 2$ h) $z + 6$

4) Escribir un polinomio que tenga las características indicadas en cada caso:

a) Ordenado y completo sin término independiente de grado 3.

b) De grado 5, completo y con coeficientes irracionales.

c) De grado 4 completo, de manera tal que ordenado en forma decreciente cada coeficiente se obtiene sumándole 3 al coeficiente anterior y que además se sabe, que el coeficiente del término x^2 es 5.

d) De grado 2, ordenado de menor a mayor, completo y cuyo coeficiente principal sea -3.

e) Mónico de grado 4, completo y con coeficientes números impares.

f) De grado 4, ordenado de forma creciente, completo, con término independiente igual a 1 y que cada coeficiente se obtenga restando 2 al anterior.

5) Completar el siguiente cuadro:

Polinomio P(x)	Coeficiente Principal	Término Independiente	Gr (P)	P(x) ordenado y completo
$-2x + x^2 + x^5$				
$\frac{1}{2} + x^4$				
$\frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{x}x + x^2$				
$\sqrt{5}x - \sqrt{3}x^2 - 1$				

6) Realizar la siguiente suma e indicar de qué grado es el polinomio resultado:

$$\begin{array}{r} 3x^3 - 5x^2 + 3x + 2 \\ +\quad 2x^3 + 4x^2 - 5x - 1 \\ \hline \end{array}$$

¿Qué grado tendría el polinomio resultado, si el coeficiente principal del segundo polinomio hubiera sido -3? Justificar

7) Dados los siguientes polinomios $A(x) = 3 - 2x + x^3$, $B(x) = x - 5 + 2x^4$, $C(x) = (x-2)^2$ y $D(x) = (x + 1)(x - 1)$

a) Resolver y ordenar en forma decreciente (escribir en forma completa)

A(x) B(x) C(x) D(x)

b) Completar la siguiente tabla

Expresión	Resultado	Coeficiente principal	Término independiente	¿Es mónico?	Grado

A(x) + B(x)					
B(x) - C(x)					
C(x) - 3 D(x)					
A(x) -2B(x)- D(x)					

8) Indicar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, justificando la respuesta.

a) Si sumamos dos polinomios de grado 3, el polinomio resultante siempre es de grado 3

b) Un polinomio es mónico si el coeficiente del término correspondiente a x^2 es igual a 1.

c) El polinomio N(x) = $-x^2+1-2x^3+x+x.(2x^2-1)$ es de grado 2 y está completo.

9) Unir con una flecha cada operación con su resultado

$(2x-1)^2 =$

$(2x-1)^3 =$

$(2x-1).(2x+1) =$

$4x^2-1$

$8x^3-1$

$4x^2+1$

$4x^2-4x+1$

$8x^3-12x^2+6x-1$

10) Interpretar y resolver los siguientes enunciados:

a) En una empresa, el número de altas de clientes de los últimos 10 años ha variado, ajustándose al polinomio $P(x) = -2x^2+40x+60$, donde x es el número de años transcurridos. Si cada año se han dado de baja 15 clientes:

- Halla el polinomio con el que se pueda calcular el número de clientes que ha tenido esta empresa a lo largo de estos diez años.
- Utiliza este polinomio para dar el número de clientes que esta empresa tenía inicialmente, a los cinco años y a los diez.

b) En unos grandes almacenes trabajan 20 vendedores que proporcionan unos ingresos por ventas de 6 200 € al mes cada uno.

- Calcula los ingresos totales proporcionados por estos 20 vendedores:
- Por cada vendedor extra que se contrata, los ingresos de cada uno de ellos disminuye en 150 €. Determina los ingresos que proporcionarían 21 vendedores y 22 vendedores.
- Determina los ingresos mensuales totales en función del número x de vendedores extra que se contraten.
- Utilizando el polinomio obtenido calcula qué sería más conveniente: que la empresa contratase a 10 vendedores o a 12.

c) Tenemos un producto perecedero a la venta. Su precio inicial es de 20 € el kg, pero cada día que pasa este precio desciende 20 céntimos. Por otra parte, el primer día se consiguen vender 80 kg, y sabemos que cada día que pasa se venden 5 kg más. Si llamamos x al número de días transcurridos. Calcula:

- El precio diario: $P(x) =$

- La cantidad diaria vendida: $C(x)$ =
- Los beneficios obtenidos (expresados como un polinomio): $B(x)$ =

d) La cantidad de kg de pollo, P y bistec, B, consumidas por persona en un estado determinado de 2005 a 2013 puede modelarse por $P(t) = 1.4t + 28.8$ y $B(t) = 0.16t^2 - 4.62 + 94.69$, donde $t = 5$ representa 2005. Encontrar un modelo $A(t)$ que represente una cantidad total de pollo y bistec, consumida de 2005 a 2013. Estimar la cantidad consumida, en 2010.

e) El consumo per cápita (consumo promedio por persona) de leche entera y de leche baja en grasa en Córdoba entre 2000 y 2013 puede calcularse por estos dos modelos de polinomios, $A(t)= 17.01- 0.60t$ (leche entera) y $B(t) = 8.92 + 0.47t - 0.0t^2$ (leche baja en grasas). En estos dos modelos, t representa el año; $t = 0$ representa 2000.

- Determina un modelo de polinomio que represente el consumo de leche per cápita (de ambos tipos) durante este periodo. Úselo para encontrar el consumo de leche per cápita en 2000 y en 2010.

- Durante el mismo periodo, el consumo de leche entera per cápita fue disminuyendo y el de leche baja en grasas fue aumentando. ¿El consumo per cápita combinado aumentó o disminuyó?

Ahora veremos una de las operaciones que resulta con cierto grado de dificultad su comprensión, pero intentaremos explicar lo más claro posible.

División de Polinomios

Dados dos polinomios P(x) y Q(x) tales que grado de P(x) $\geq$ grado Q(x) y Q(x) $\neq$ 0 siempre es posible encontrar dos polinomios C(x) y R(x) tales que: P(x) = Q(x) . C(x) + R(x)

$$\begin{array}{l|l} P(X) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array}$$

donde P(x) es el polinomio dividendo, Q(x) el polinomio divisor

C(x) el polinomio cociente y R(x) es el polinomio resto, tal que:

grado R(x) < grado Q(x)

Recordar: P(x) debe estar completo y ordenado según las potencias decrecientes de "x" y Q(x) debe estar ordenado en forma decreciente.

<u>Ejemplo</u>: Calcular el cociente y el resto de P(x) : Q(x) siendo $P(x)= x^4 - 3x^2 + 2$ y $Q(x)= x - 3$

Como gr(P) = 4 y gr(Q) = 1, entonces gr(P) > gr(Q) por tanto la división es posible.

Primero: Ordenamos y completamos el polinomio dividendo $P(x)= x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 2$

Segundo: Ordenamos el polinomio divisor Q(x) = x - 3 (justo éste está ordenado)

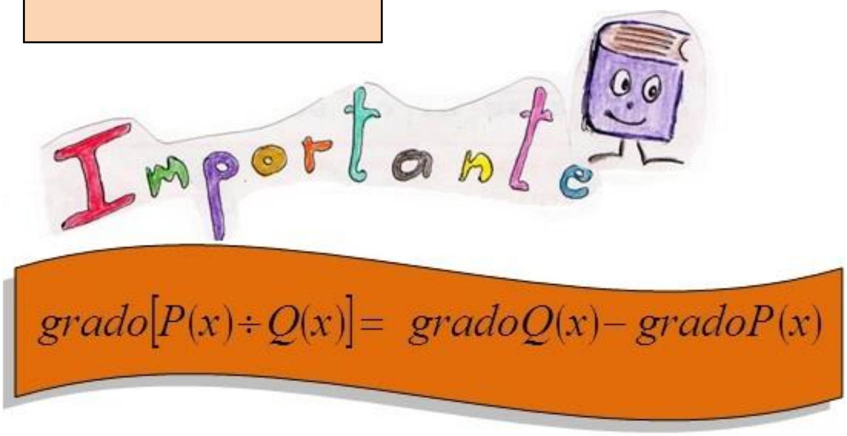
$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +0x^3 & -3x^2 & +0x & +2 & x-3 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +3x^3 & & & & x^3+3x^2+6x+18 \\ \cline{1-2}
 & 3x^3 & -3x^2 & & & \\
 & -3x^3 & +9x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 6x^2 & +0x & & \\
 & & -6x^2 & +18x & & \\ \cline{3-4}
 & & & 18x & +2 & \\
 & & & -18x & +54 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 56 &
\end{array}
$$

Los términos del producto *x(x-3)*, cambiado de signo se ubican debajo de los términos del mismo grado del dividendo

Calculamos $x^4 : x = x^3$

Sumamos los polinomios

El grado del polinomio resto es menor que el grado del divisor



Caso particular de división

Tenemos también al igual que en la multiplicación, casos especiales para la división, siempre pensando en la facilidad de los cálculos.

Regla de Ruffini

	*Cuando el divisor es un polinomio de la forma x± a podemos aplicar la* ***regla de Ruffini****. Con esta regla calculamos los coeficientes del polinomio cociente (que es de un grado menos que el polinomio divisor) y el resto de la división (que es de grado cero)*

Para ello completamos y ordenamos en forma decreciente el polinomio dividendo y sólo colocamos en la parte superior los coeficientes de dicho polinomio y en la parte izquierda escribimos el término independiente del polinomio divisor cambiado de signo.

Por ejemplo: si queremos dividir $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ por $Q(x) = x - 3$ resulta el esquema:

- Si el polinomio no es completo, lo completamos con ceros, añadiendo los términos que faltan.

En este caso $P(x) = x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 2$

- Colocamos los coeficientes del dividendo.

- Abajo a la izquierda colocamos el opuesto del término independiente del polinomio divisor (o sea, en nuestro ejemplo, 3)

	1	0	-3	0	2
3					

- Trazamos una raya y bajamos el primer coeficiente.

	1	0	-3	0	2
3					
	1				

- Multiplicamos ese coeficiente por el divisor (el número 3) y lo colocamos debajo del siguiente término.

	1	0	-3	0	2
3		3			
	1	3			

- Sumamos los dos coeficientes y luego volvemos a multiplicar este resultado por 3.

	1	0	-3	0	2
3		3	9		
	1	3	6		

- Repetimos el proceso anterior.

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	
	1	3	6	18	

- Volvemos a repetir el proceso hasta el último número.

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	54
	1	3	6	18	**56**

El último número obtenido es 56, que es el resto.

El cociente es un polinomio de grado inferior en una unidad al dividendo y cuyos coeficientes son los que hemos obtenido: $C(x) = x^3 + 3\,x^2 + 6x + 18$

En muchos casos es necesario calcular directamente el resto de la división sin realizar la división, para ello aprenderemos el siguiente teorema:

Teorema del Resto

DEFINICIÓN	*Para calcular el resto de la división de un polinomio $P(x)$ entre $x - a$ basta sustituir en $P(x)$ la x por a; es decir que el resto de la división es el valor numérico en $x = a$, por ello $R = P(a)$*

Ejemplo: Calcular directamente el resto de $P(x) : Q(x)$ siendo $P(x)= x^4 - 3\,x^2 + 2$ y $Q(x)= x - 3$

$R = P(3) = (3)^4 - 3.(3)^2 + 2 = 81 - 27 + 2 = 56$ $\qquad R = 56$

Sabias que:

- Si **R = 0** entonces **P(x) es divisible por Q(x)**
- Si **R = 0**, entonces **Q(x) es divisor de P(x)**

Factorización de Polinomios

DEFINICIÓN	*Factorizar un polinomio significa transformarlo en producto de polinomios de grado uno o polinomios irreducibles de mayor grado.*

Para factorizar un polinomio es necesario saber los conceptos de raíz de un polinomio, factor de un polinomio y polinomio irreducible. Entonces vamos a definirlos a cada uno de ellos.

Raíz de un Polinomio

Las raíces de un polinomio $P(x)$ son los valores de la indeterminada x que hacen que el polinomio se anule.

DEFINICIÓN	*"a" es una **raíz** de un polinomio $P(x)$, si y solo si $P(a) = 0$*

Ejemplos:

- 3 es una raíz o cero del polinomio $S(x) = x^2 - 9$ porque $S(3) = 3^2 - 9 = 9 - 9 = 0$
- Dado $P(x) = x^2 - 2\,x + 1$, para $x = 1$, el valor numérico es $P(1) = 1^2 - 2.1 + 1 = 0$, entonces $x = 1$ es raíz del polinomio y podemos decir que $P(x)$ es divisible por $(x - 1)$

a es raíz de P(x) ⇔ P(a) = 0
a es raíz de P(x) ⇔ P(x) es divisible por (x -a)

NOTA: el símbolo ⇔ significa “es equivalente a” o “si y sólo si”

Factor

	*Un polinomio $Q(x)$ de grado mayor o igual a uno es factor o divisor de otro polinomio $P(x)$ si y sólo si existe un polinomio $H(x)$ de grado mayor o igual que 1, tal que $P(x)=Q(x)\cdot H(x)$*

Ejemplo: $x-2$ es factor de $P(x)=x^2-5x+6$ porque $\exists$ $\mathrm{H}(x)=x-3$ tal que $P(x)=(x-2).H(x)$

Efectivamente si resolvemos el producto $(x-2).(x-3)=x^2-3x-2x+6=x^2-5x+6$

Polinomio Irreducible

	*Cuando un polinomio $P(x)$ no podemos expresarlo como producto de otros dos polinomios $Q(x)$ y $H(x)$ ambos de grado mayor o igual a uno, decimos que $P(x)$ es irreducible o primo.*

Ejemplo: $P(x)=2x-4$ es un polinomio irreducible porque si factorizamos $P(x)=2x-4=2(x-2)$ y en este caso el polinomio $P(x)$ está formado por dos factores en donde el factor 2 es un polinomio de grado cero lo cual no cumple la definición de factor (grado mayor o igual que 1) y el otro factor x - *2* que si es de grado 1.

Casos de Factoreos

Factorizar un polinomio significa entonces que debemos expresarlo como un producto de polinomios irreducible.

Para la factorización de polinomios hay distintos casos y reglas para cada uno de ellos. Así tenemos:

Factor Común

Aplicamos este caso cuando en todos los términos del polinomio hay factores numéricos y/o literales comunes; es decir que nos basamos en la propiedad distributiva.

Generalmente tenemos este caso $P(x)[A(x)+B(x)] = P(x)A(x)+P(x)B(x)$ donde $P(x)$ es el factor común.

El factor común de los coeficientes del polinomio es el Máximo Común Divisor de los coeficientes dados y, de la parte literal es la variable común a todos los términos con su menor exponente.

Por ejemplo: $\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^4 = \frac{1}{3}x^2(2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^2)$ el factor común es $\frac{1}{3}x^2$

Factor Común en Grupos

Aplicamos factor común por agrupación de términos, si los términos de un polinomio podemos reunirlos en grupos de términos con un factor común diferente en cada grupo.

Cuando podemos agrupar los términos dados en grupos de igual cantidad de términos, sacamos en cada uno de los grupos el factor común. Si queda la misma expresión en cada uno de los grupos entre los paréntesis, sacamos este nuevo factor común, quedando así un producto de nuevas expresiones.

Por ejemplo: Para aplicar este caso de factorización en $6x^3 - 2x^2 + 9x - 3$

Agrupamos los términos que tienen un factor común $(6x^3 - 2x^2) + (9x - 3)$

Sacamos el factor común de cada grupo $2x^2(3x - 1) + 3.(3x - 1)$

Como las expresiones encerradas entre paréntesis son iguales tenemos: $(3x - 1)(2x^2 + 3)$ que es nuestra respuesta.

La factorización de $6x^3 - 2x^2 + 9x - 3 = (3x - 1)(2x^2 + 3)$

Trinomio Cuadrado Perfecto

Recordemos que $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$. Esta igualdad nos permite factorizar cuando el polinomio dado es la expresión que figura como segundo miembro y debemos transformarlo como figura en el primer miembro.

Entonces, para aplicar este caso, el polinomio dado debe tener tres términos, dos de ellos cuadrados perfectos y positivos y el término restante debe cumplir la condición de ser el doble producto de las bases de los cuadrados perfectos. De ser así, el resultado sería el cuadrado de un binomio donde sus términos son las bases de los cuadrados perfectos y el signo que los separa dependerá del término restante.

Ejemplo: $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2.3.x + 3^2 = (x+3)^2$

Los cuadrados perfectos son: $x^2 = (x)^2$ y $9 = (3)^2$

El doble producto de las bases de dichos cuadrados es: $2.x.3 = 6x$ y como este término es positivo, entonces el binomio será una suma.

El resultado es: $(x+3)^2$

Otro ejemplo: $x^2 + 16 - 8x = x^2 - 2.4.x + 4^2 = (x-4)^2$

Los cuadrados perfectos son: $x^2 = (x)^2 \quad \text{y} \quad 16 = (4)^2$

El doble producto de las bases es: $2.x.4 = 8x$ y como este término es negativo en la expresión dada, entonces el binomio será una resta.

El resultado es: $(x-4)^2$

Diferencia de Cuadrados

Nos basamos en la identidad: $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$

Si el polinomio dado representa una diferencia de cuadrados, diremos que se puede factorizar como el producto de la suma por la diferencia de las bases de dichos cuadrados.

Ejemplos:

- $25x^2 - 16 = (5x)^2 - (4)^2 = (5x-4)(5x+4)$
- $\frac{16}{625}x^4 - 81 = \left(\frac{4}{25}x^2\right)^2 - (9)^2 = \left(\frac{4}{25}x^2 - 9\right)\left(\frac{4}{25}x^2 + 9\right) = \left(\frac{2}{5}x - 3\right)\left(\frac{2}{5}x + 3\right)\left(\frac{4}{25}x^2 + 9\right)$
- $x^2 - 3 = (x)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$

Suma o Diferencia de potencia impares de igual grado

Siempre es divisible por la suma o diferencias de las bases.

Factorizamos teniendo en cuenta que: $x^n + a^n$ es divisible por $x + a$ y que $x^n - a^n$ es divisible por $x - a$

Ejemplo: Factorizar $x^3 - 8 = x^3 - 2^3$; $x^3 - 8$ es divisible por $x - 2$. Si realizamos la división por Ruffini, obtenemos como cociente $x^2 + 2x + 4$. Por lo tanto: $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

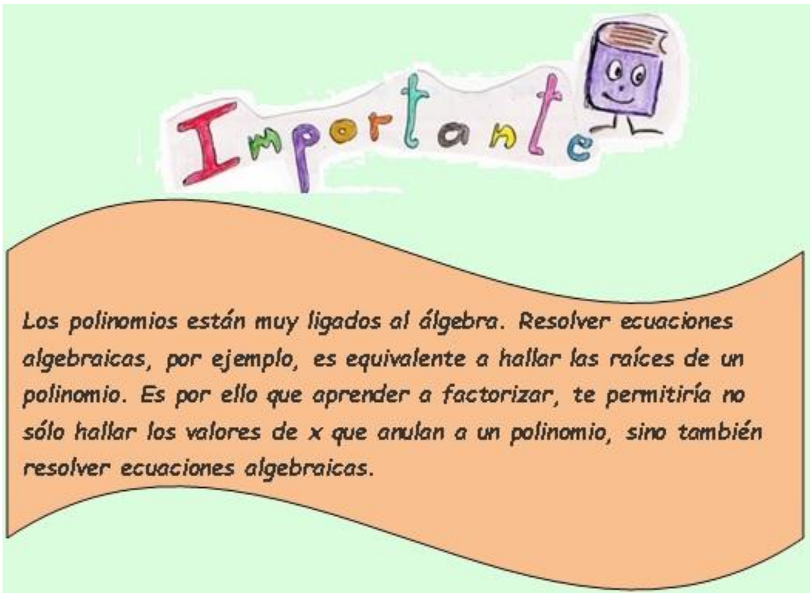
Factorizar $x^5 + 1 = x^5 + 1^5$; $x^5 + 1$ es divisible por $x + 1$. Si realizamos la división por Ruffini obtenemos como cociente $x^4 - x^3.1 + x^2.1^2 - x.1^3 + 1^4$. Por lo tanto: $x^5 + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$

Si n es IMPAR

- $x^n + a^n$ es divisible por $x + a$ SIEMPRE
- $x^n + a^n$ es divisible por $x - a$ NUNCA

Si n es PAR

- $x^n - a^n$ es divisible por $x + a$ SIEMPRE
- $x^n - a^n$ es divisible por $x - a$ SIEMPRE



Divisor Común de Mayor Grado

	*Llamamos **divisor común de mayor grado** (MCD) de dos o más polinomios, al polinomio de más alto grado que es divisor de todos ellos.*

<u>Ejemplo</u>: Consideremos los polinomios $P(x) = 6x^2 + 3$ y $Q(x) = 4x^4 - 1$

Los descomponemos en factores primos (o sea que los factorizamos)

$P(x) = 6x^3 + 3x = 3x.(2x^2 + 1)$

$Q(x) = 4x^4 - 1 = (2x^2 + 1).(2x^2 - 1) = (2x^2 + 1).\left(\sqrt{2}x - 1\right).\left(\sqrt{2}x + 1\right)$

Decimos que $2x^2 + 1$ es el polinomio de mayor grado que divide a $P(x)$ y a $Q(x)$, por lo tanto $2x^2 + 1$ es "*un*" ***divisor común de mayor grado*** de $P(x)$ y $Q(x)$

Simbólicamente: $MCD[P(x); Q(x)] = 2x^2 + 1$

Regla de Cálculo del MCD

Para calcular el divisor común de mayor grado de dos o más polinomios descomponemos cada polinomio en sus factores primos y hallamos el producto de los factores primos comunes, tomado cada uno con su menor exponente.

Ejemplo:

$P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2.(x^2 - 2x + 1) = x^2.(x-1)^2$

$Q(x) = x^7 - x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2}x^4 = x^4\left(x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = x^4(x-1).(x^2+1)$

Podemos observar que la expresión común es x y también $x-1$ y elegimos con el menor exponente, por ello el $MCD[P(x); Q(x)] = x^2(x-1)$

Múltiplo Común de Menor Grado

DEFINICIÓN	*Llamamos **múltiplo común de menor grado** (mcm) de dos o más polinomios al polinomio de menor grado que es múltiplo de todos ellos.*

Ejemplo: Consideremos los polinomios $P(x) = x^4 - x^3$ y $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x$

Descomponemos en factores primos (o sea que los factorizamos)

$P(x) = x^4 - x^3 = x^3.(x-1)$

$Q(x) = x^3 - 2x^2 + x = x.(x^2 - 2x + 1) = x.(x-1)^2$

Decimos que $x^3.(x-1)^2$ es el polinomio de menor grado que es múltiplo de $P(x)$ y de $Q(x)$, por lo tanto $x^3.(x-1)^2$ es "***el múltiplo común de menor grado***" de $P(x)$ y de $Q(x)$

Simbólicamente: mcm(P; Q) = $mcm[P(x); Q(x)] = x^3.(x-1)^2$

Regla de Cálculo del mcm

Para calcular el múltiplo común de menor grado de dos o más polinomios descomponemos cada polinomio en sus factores primos y hallamos el producto de los factores primos comunes o no comunes, tomado cada uno con su **mayor exponente**.

Ejemplo: Calcular el mcm de las siguientes expresiones

$P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2.(x^2 - 2x + 1) = x^2.(x-1)^2$

$Q(x) = x^7 - x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2}x^4 = x^4\left(x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = x^4(x-1).(x^2+1)$

m.c.m.(P; Q) = $mcm[P(x); Q(x)] = x^4.(x-1)^2.(x^2+1)$

Operaciones con Expresiones Algebraicas Racionales

Suma de Expresiones Algebraicas Racionales

DEFINICIÓN	*Para la suma, factorizamos los denominadores y luego calculamos el mcm de los denominadores y resolvemos la suma indicada.*

La suma de expresiones algebraicas racionales la definimos de forma análoga a la suma de números racionales.

Números Racionales	Expresiones Algebraicas Racionales
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a.d+b.c}{b.d}$	$\frac{P(x)}{Q(x)}+\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x).S(x)+R(x).Q(x)}{Q(x).S(x)}$

Ejemplo: Calcular $\frac{x}{x^2-4}+\frac{2}{x^2+4x+4}$

- Lo primero que debemos hacer es condicionar el denominador; en este caso $x \neq \pm 2$
- Luego factorizamos los denominadores $x^2-4 = (x-2).(x+2)$ y $x^2+4x+4=(x+2)^2$
- Después calculamos el mcm de los denominadores, que es mcm $=(x+2)^2.(x-2)$
- Ahora escribimos la expresión dada con sus denominadores factorizados

$$\frac{x}{x^2-4}+\frac{2}{x^2+4x+4}=\frac{x}{(x-2).(x+2)}+\frac{2}{(x+2)^2}$$

- Y por último resolvemos la operación indicada

$$\frac{x}{x^2-4}+\frac{2}{x^2+4x+4}=\frac{x}{(x-2).(x+2)}+\frac{2}{(x+2)^2}=\frac{x.(x+2)+2.(x-2)}{(x+2)^2.(x-2)}=\frac{x^2+4x-4}{(x+2)^2.(x-2)}$$

Multiplicación de Expresiones Algebraicas Racionales

DEFINICIÓN	*En la multiplicación factorizamos tanto los numeradores como los denominadores y luego simplificamos las expresiones, cuando sea posible y resolvemos la multiplicación indicada.*

La multiplicación de expresiones algebraicas racionales la definimos en forma análoga a la multiplicación de números racionales.

Números Racionales	Expresiones Algebraicas Racionales
$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{a\,.\,c}{b\,.\,d}$	$\frac{P(x)}{Q(x)}.\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x)\,.\,R(x)}{Q(x)\,.\,S(x)}$

Ejemplo: $\frac{x-1}{x^2-4}\,.\,\frac{x+2}{x^3-1}$ con $x \neq \pm 2 \ \wedge \ x \neq 1$

- Factorizamos los numeradores y los denominadores (en este caso sólo factorizamos los denominadores porque los numeradores son polinomios primos) $x^2-4=(x-2).(x+2)$ y $x^3-1=(x-1).(x^2+x+1)$

- Escribimos las expresiones dadas con sus numeradores y denominadores factorizados

$$\frac{x-1}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{x^3-1}=\frac{x-1}{(x-2).(x+2)}\cdot\frac{x+2}{(x-1).(x^2+x+1)}$$

- Simplificamos y resolvemos la operación $\frac{x-1}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{x^3-1}=\frac{\cancel{x-1}}{(x-2).\cancel{(x+2)}}\cdot\frac{\cancel{x+2}}{\cancel{(x-1)}.(x^2+x+1)}=\frac{1}{(x-2).(x^2+x+1)}$

División de Expresiones Algebraicas Racionales

DEFINICIÓN	*En la división factorizamos tanto los numeradores como los denominadores y luego simplificamos las expresiones, cuando sea posible y resolvemos la división indicada.*

Para dividir una expresión algébrica racional por otra se multiplica la primera por la inversa de la segunda.

Números Racionales

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a.d}{b.c}$$

Expresiones Algebraicas Racionales

$$\frac{P(x)}{Q(x)}:\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{S(x)}{R(x)}=\frac{P(x).S(x)}{Q(x).R(x)}$$

Ejemplo: las expresiones dadas son de distintos denominadores $\frac{x-1}{x^2-4}:\frac{x+1}{x+2}$ con $x\neq\pm2\ \wedge\ x\neq-1$

- Multiplicamos a la 1° expresión por el inverso de la 2° expresión

$$\frac{x-1}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{x+1}$$

- Factorizamos los numeradores y los denominadores

$$\frac{x-1}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{x+1}=\frac{x-1}{(x-2).(x+2)}\cdot\frac{x+2}{x+1}$$

- Simplificamos y resolvemos la operación indicada

$$\frac{x-1}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{x+1}=\frac{x-1}{(x-2).\cancel{(x+2)}}\cdot\frac{\cancel{x+2}}{x+1}=\frac{x-1}{(x-2).(x+1)}$$

TRABAJO PRÁCTICO N° 4

1) En la siguiente división que ya está resuelta, indica los polinomios dividendo, divisor, cociente y resto, como así también sus grados

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^3 & & +1 & x-2 \\
-x^3+2x^2 & & & x^2+2x+4 \\
\hline
2x^2 & & +1 & \\
-2x^2+4x & & & \\
\hline
 & 4x & +1 & \\
 & -4x & +8 & \\
\hline
 & & 9 &
\end{array}
$$

Verifica que, si multiplicamos el polinomio cociente por el polinomio divisor y le sumamos el resto, se reconstruye el polinomio dividendo.

2) Calcula el polinomio cociente y el resto de la división de P(x):Q(x), aplicando regla de Ruffini y luego compruebas el resto usando el Teorema del Resto.

$P(x) = 3 - 2x + 3x^3$ $\quad Q(x) = 1 + x$

$P(x) = 3x - 2x^4 + 3x^2$ $\quad Q(x) = x - 2$

$P(x) = x^3 - 8$ $\quad Q(x) = x - 2$

3) Determina cuáles de los siguientes valores son ceros o raíces de los siguientes polinomios:

$A(x) = 2x^2 - 10x + 12$ $\quad x_1= 2 \quad x_2= 1 \quad x_3= -2 \quad x_4= 3$

$B(x) = -2x + \sqrt{2}$ $\quad x_1= \frac{1}{2} \quad x_2= 2 \quad x_3= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x_4= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$C(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 1$ $\quad x_1= -1 \quad x_2= 1 \quad x_3= -\frac{1}{2} \quad x_4= \frac{1}{2} \quad x_5= 2$

4) Une con flechas cada polinomio de la primera columna con su o sus raíces de la segunda columna:

$x^2 - x$	0
$x^2 - 2x + 1$	- 1
$x^2 - 5x + 6$	1
$x^2 - 1$	2
$x^2 + 6x + 9$	- 2
$x^2 - 8x + 16$	- 3
$x^2 - 4x$	3
	4

¿Cuántas raíces debes buscar para cada polinomio? ¿Por qué?

5. Une con flechas cada polinomio de la primera columna con su o sus factores de la segunda columna:

$x^3 - 4x^2$	$x - 1$
	x
$x^3 - x$	$x + 1$
$x^3 - x^2$	$x - 4$
	$x - 2$
$x^3 - 9x$	$x + 2$
$x^3 - 9x^2$	$x - 3$
	$x + 3$
$x^3 - 4x$	$x - 9$

Luego de colocar las flechas, responde:

a) ¿De qué grado son los polinomios?

b) ¿Cuántos factores lineales tendrá cada polinomio?

c) ¿Hay polinomios que tengan más de un factor?

6) En la actividad anterior y una vez que determinaste cuáles son los factores:

a) ¿podrías indicar cuáles serían las raíces de esos polinomios?

b) Con esta información, verifica usando el Teorema del Resto.

c) Escribe los polinomios anteriores en forma factorizada.

7) Halla el MCD y el mcm entre los polinomios dados a continuación:

a) $A(x) = 3a^2x - 9a^2$ $\quad B(x) = x^2 - 6x + 9$

b) $A(x) = x^2 + 2x;$ $\quad B(x) = x^3 - 2x^2;$ $\quad C(x) = x^2 - 4$

c) $A(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x;$ $\quad B(x) = 3x^4 - 27x^2;$ $\quad C(x) = 5x^3 + 30x^2 + 45x$

d) $A(x) = x^4 + 8x - 4x^3 - 32;$ $\quad B(x) = a^2x^4 - 2a^2x^3 - 8a^2x^2;$ $\quad C(x) = 2x^4 - 4x^3 + 8x^2$

e) $A(x) = 1 - x^3;$ $\quad B(x) = 1 - x^2;$ $\quad C(x) = 1 - 2x + x^2$

8) Resuelve las operaciones indicadas, pero no te olvides las condiciones iniciales:

a) $\left(\dfrac{x^2 + 2x - 8}{x - 2} - 2\right) : 3 =$

b) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{xa + 2x - a - 2} \cdot \dfrac{5}{x - 1} + 1 =$

c) $\dfrac{\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x+1}{x-2}}{\dfrac{-6}{x-2}}=$

d) $\left(\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x+2}{x+1}\right).\dfrac{2+x}{2x+3}=$

e) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2-4(x-1)^{-1}.\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=$

f) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}\right).\dfrac{x+1}{x-1}=$

g) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}\right):\dfrac{x+1}{x-1}=$

h) $\dfrac{x-1}{x^2-4}.\left(x+\dfrac{4-x^2}{x-1}\right)=$

Y ahora? Me detengo a reflexionar!!

Marcar con una x en la columna que corresponda según los aprendizajes que consideres logrados, o que está en proceso o bien donde debes volver a intentar. Si la mayoría de las cruces están en la segunda y tercera columna, revisa tus conocimientos y vuelve a estudiar los mismos.

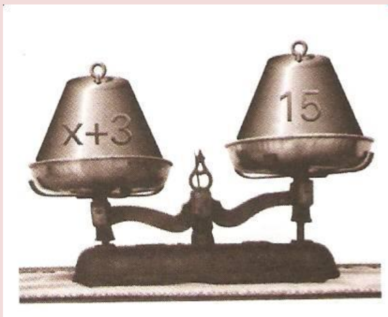
Metacognición	Lo Logré	Está en proceso	Debo volver a intentar
Traduzco enunciados al lenguaje algebraico			
Identifico cuándo una expresión es un polinomio y a sus elementos			
Busco el valor numérico de polinomios			
Resuelvo sumas y restas con polinomios			
Resuelvo productos de polinomios como así los productos especiales			
Aplico correctamente el algoritmo de la división entre polinomios			
Aplico la regla de Ruffini para el cálculo del cociente y del resto			
Sé cuándo puedo aplicar el Teorema del Resto			
Identifico los distintos casos de factoreo			
Calculo el MCD y el mcm de expresiones algebraicas			
Resuelvo operaciones con expresiones algebraicas			

TEMA IV
ECUACIÓN LINEAL
Y
CUADRÁTICA

TEMA IV "ECUACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

Ahora veremos....

- **Ecuación Lineal con una sola variable**
- **Tipos de soluciones**
- **Ecuación cuadrática**
- **Análisis del discriminante**
- **Aplicaciones**



"Si no creyera en la balanza,

en la razón del equilibrio.

Si no creyera en el delirio,

si no creyera en la esperanza"

("La maza"- Silvio Rodríguez)

A la imagen de la balanza la relacionamos inmediatamente con los conceptos de justicia, equilibrio, igualdad. En cuestiones cotidianas hablamos de "*igualdad de oportunidades*", de que "*todos somos iguales ante la ley*", de que "*todos los hombres son iguales ante los ojos de Dios*". Diferencia de opiniones respecto de estas ideas han causado importantes conflictos a la humanidad.

Cuando en matemática hablamos de igualdad, las cosas parecen estar más claras

- 2 + 2 = 4
- Área del rectángulo = b.h (de base b y altura h)
- En todo triángulo rectángulo, $H^2 = A^2 + B^2$ (teorema de Pitágoras)

También tenemos otras igualdades que deben ser estudiadas ya que nos ayudarán a resolver situaciones intra y extramatemática, como son las ecuaciones.

Ecuación

DEFINICIÓN	*Una **ecuación** es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas, denominados miembros, en las que aparecen valores conocidos o datos, y desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas.*

Los valores conocidos pueden ser números, coeficientes o constantes; y también incógnitas cuya magnitud pueda establecerse a través de las restantes ecuaciones de un sistema, o bien mediante otros procesos.

Las incógnitas, representadas generalmente por letras, constituyen los valores que se pretende hallar.

La igualdad planteada por una ecuación será cierta o falsa dependiendo de los valores numéricos que tomen las incógnitas; podemos afirmar entonces que una ecuación es una *igualdad condicional*, en la que sólo algunos valores de las letras (incógnitas) la hacen cierta.

Solución de una Ecuación

Llamamos *solución* de una ecuación a cualquier valor individual de dichas incógnitas que la satisfaga. Para el caso dado $3x - 1 = 9 + x$, la solución es $x = 5$ porque $3.5 - 1 = 9 + 5$

DEFINICIÓN	*Denominamos **solución** de una ecuación a todo número que verifica la igualdad.*

Conjunto Solución de una Ecuación

Resolver una ecuación es encontrar su *conjunto solución*, que es el conjunto de valores de las incógnitas para los cuales la igualdad se cumple.

DEFINICIÓN	*Denominamos **conjunto solución** de una ecuación al conjunto formado por todas las soluciones de la misma.*

Por lo general, los problemas matemáticos pueden expresarse en forma de una o más ecuaciones; sin embargo no todas las ecuaciones tienen solución, ya que es posible que no exista ningún valor de la incógnita que haga cierta a la igualdad dada.

En ese caso, ***el conjunto de soluciones de la ecuación será vacío y decimos que la ecuación no es resoluble***. De igual modo, ***puede tener un único valor, o varios, o incluso infinitos valores, siendo cada uno de ellos una solución particular de la ecuación***.

Si cualquier valor de la incógnita hace cumplir la igualdad (esto es, no existe ningún valor para el cual no se cumpla) la ecuación es en realidad una ***identidad*** .

Ecuaciones Equivalentes

DEFINICIÓN	*Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen el mismo conjunto solución.*

Por ejemplo, las ecuaciones $3x - 2 = 7$ y $2x - 1 = 14 - 3x$ son equivalentes. Para ello determinaremos el conjunto solución

$3x - 2 = 7$	$2x - 1 = 14 - 3x$
$3x = 7 + 2$	$2x + 3x = 14 + 1$
$3x = 9$	$5x = 15$
$x = \frac{9}{3}$	$x = \frac{15}{5}$
$x = 3$	$x = 3$
S= {3}	**S= {3}**

Al tener el mismo conjunto solución estas **ecuaciones son equivalentes**.

Existen operaciones que garantizan la equivalencia:

- **Sumar (o restar)** la misma expresión a (o de) ambos miembros de una ecuación, cuando la expresión tiene la misma variable de la ecuación.
- **Multiplicar (o dividir)** ambos miembros de una ecuación por la misma constante, exceptuado el cero.
- **Reemplazar** cualquiera de los dos miembros de una ecuación por una expresión igual.

Ahora nos centraremos en el estudio de las ecuaciones lineales y de las cuadráticas.

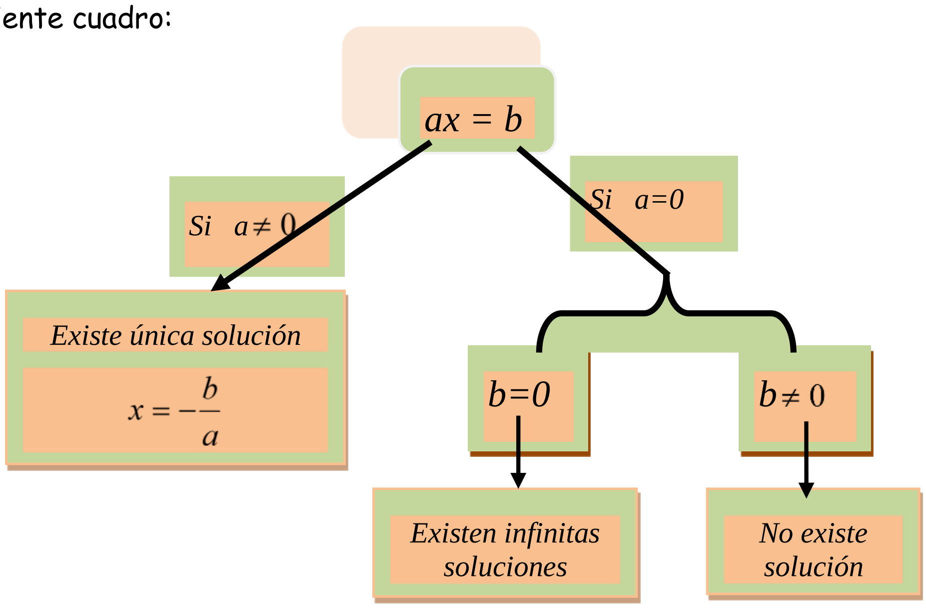
Ecuación Lineal con una Incógnita

DEFINICIÓN	*A una ecuación lineal en "x" podemos escribirla en la forma* ***a.x = b*** *donde a y b son constantes, que son números reales.*

Para resolver una ecuación lineal, llevamos a cabo operaciones hasta que llegamos a una ecuación equivalente, cuyas soluciones son evidentes. Esto significa una ecuación en la cual la incógnita se encuentra sola en un mismo miembro de la igualdad.

Tipos de Soluciones

El estudio de los tipos de soluciones de la ecuación $a.x = b$ (con a y $b \in$R) podemos resumirlo en el siguiente cuadro:



Ejemplo: Resolver y determinar el conjunto solución de:

✓ 2x – 4 = -12

2x – 4 + 4 = -12 + 4

2x = -8

2x : 2 = -8 : 2

x = -4 ésta es la solución buscada

El conjunto solución, que es unitario es S = {-4}, es decir que esta ecuación tiene única solución.

✓ 3(x-1) = 2(x-2) + x + 1 ⇔ 3x –3 = 2x - 4 + x +1

3x – 3 = 3x - 3

3x - 3x = -3 + 3

0x = 0

Esta igualdad verifica para cualquier valor de x, o sea que tiene infinitas soluciones, con lo cual se concluye que la solución es S =R. Este ejemplo corresponde a la ecuación denominada identidad.

- ✓ 5x – 2 = 3x + 5 + 2x

  5x – 2 = 5x + 5

  5x – 5x = 5 + 2

  0x = 7

Esta igualdad no verifica para ningún valor de x, o sea que no tiene solución, por ello el conjunto solución es vacío y lo expresamos S = $\{\ \}$

Análisis de parámetros en las ecuaciones lineales

En las ecuaciones lineales, encontramos algunas, donde aparecen otras letras diferentes a la incógnita. Estas nuevas letras reciben el nombre de parámetros.

Ahora realizaremos el análisis del parámetro, para determinar el tipo de solución de la ecuación lineal.

Por ejemplo: Indicar el valor del parámetro k para que las ecuaciones dadas tengan:

- única solución
- infinitas soluciones
- ninguna solución

✓ $k(kx-1)=2(2x-1)$

$k^2x-k=4x-2$

$k^2x-4x=k-2$

$(k^2-4)x=k-2$

$(k+2)(k-2)x=k-2$

A esta expresión la podemos asociar con su mínima expresión ax=b, de donde $a=(k+2)(k-2)\ \wedge\quad b=k-2$

- **única solución**: recordemos que $a\neq 0$, o sea que $(k+2)\neq 0\wedge(k-2)\neq 0$, por ello $k\neq \pm 2$
- **infinitas soluciones**: para este tipo de solución se cumple que $a=0\wedge b=0$; o sea que $(k+2)(k-2)=0\ \wedge\quad k-2=0$, por ello $k=2$
- **ninguna solución**: se cumple cuando $a=0\wedge b\neq 0$; es decir que $(k+2)(k-2)=0\ \wedge$ $k-2\neq 0$, por ello $k=-2$

✓ $x-1=k(x-k)$

$x-1=kx-k^2$

$x-kx=1-k^2$

$(1-k)x=1-k^2$

$(1-k)x=(1-k)(1+k)$

Si a esta expresión la asociamos con su mínima expresión ax=b, nos queda que $a=(1-k)\ \wedge\ b=(1-k)(1+k)$

- **única solución**: recordemos que $a\neq 0$, o sea que $(1-k)\neq 0$, por ello $k\neq 1$
- **infinitas soluciones**: se cumple que $a=0\wedge b=0$; o sea que $(1-k)=0\ \wedge$ $(1-k)(1+k)=0$, por ello $k=1$
- **ninguna solución**: se cumple cuando $a=0\wedge b\neq 0$; es decir que $(1-k)=0\ \wedge$ $(1-k)(1+k)\neq 0$, por ello no existe valor de k que cumpla esta condición.

Aplicaciones

Ahora presentamos algunos ejemplos de problemas que se resuelven aplicando ecuaciones:

Ejemplo 1: **El interés anual producido por $24000 excede en $156 al producido por $17000. Si la tasa anual que se aplica a los $17000 es el 1,8% mayor, que la aplicada a los $24000 ¿Cuál es la tasa anual de interés aplicada a cada cantidad?**

- Determinamos la incógnita x%: tasa anual de interés
  La expresión que indica la tasa anual de interés aplicada a los 240000 es x%.
  La expresión que indica la tasa anual de interés aplicada a los $1700 es (x + 1,8)%
- Expresamos algebraicamente en términos de la incógnita x:
  El interés que producen los $24000 es: $24000.\frac{x}{100}$
  El interés que producen los $17000 es: $17000.\frac{x+1,8}{100}$
- Planteamos la ecuación y la resolvemos:
  Como el interés que producen los $24000 excede en $156 a los intereses que producen los $17000, tenemos: $24000.\frac{x}{100} - 17000.\frac{x+1,8}{100} = 156$

  Multiplicamos a ambos miembros por 100 y tenemos: $24000x - 17000(x+1,8) = 15600$

  $7000x - 30600 = 15600$, entonces $X = 6,6\%$

Rpta: la tasa anual aplicada es del 6,6%

Ejemplo 2: **Se invierte $84000000 en bonos a una tasa de interés mensual del 2,59% y también en acciones a una tasa de interés del 3,99%. La inversión total dejó una rentabilidad del 3,09% mensual ¿Cuánto invirtió en bonos y cuanto en acciones?**

- Determinamos la incógnita x: dinero invertido en bono
  La expresión que indica lo que se invierte en acciones es: (84000000 – x)

- Expresamos algebraicamente en términos de la incógnita x:

  El dinero que indica lo que se invierte en bono a una tasa de interés mensual del 2,59% es $\frac{2,59}{100}x$.

  El dinero que indica lo que se invierte en acciones a una tasa de interés mensual del 3,99% es $(84000000 - x)\frac{3,99}{100}$

- Planteamos la ecuación y la resolvemos:
  Como la rentabilidad total es del 3,09%, significa $84000000\frac{3,09}{100}$
  Tenemos que la inversión en bonos + inversión en acciones = a la rentabilidad total

  $\frac{2,59}{100}x + (84000000 - x)\frac{3,99}{100} = 84000000\frac{3,09}{100}$

  Multiplicamos a ambos miembros por 100 y tenemos:

  $2,59x + 335160000 - 3,99x = 259560000$

  $-1,4x = -75600000$, entonces $X = 54000000$

Rpta: Lo invertido en bono es $54000000 y en acciones $30000000

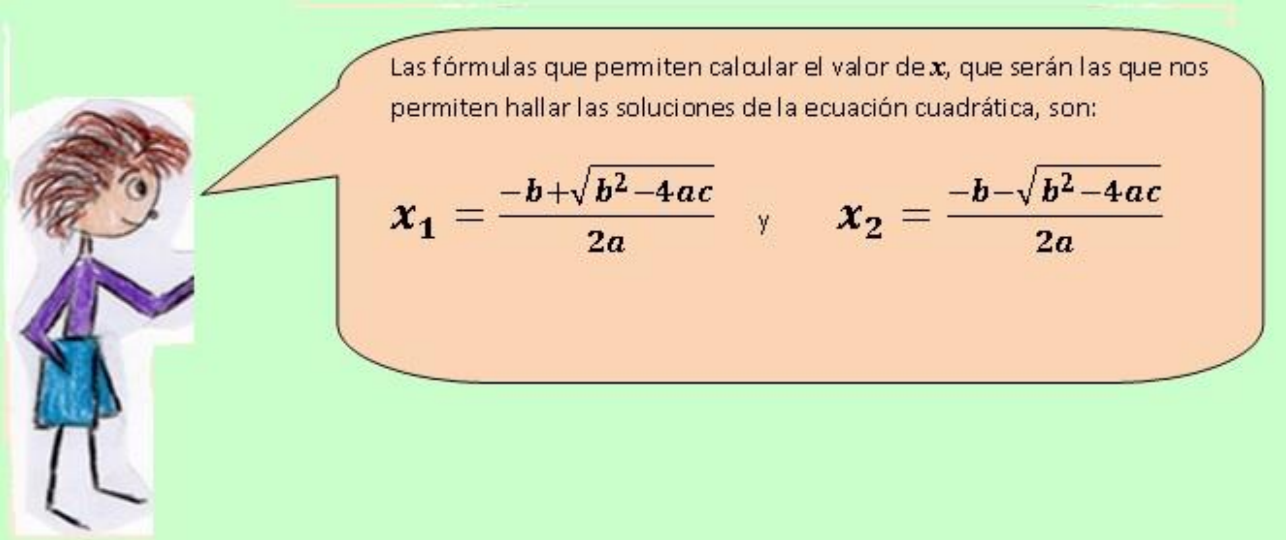
Ecuación Cuadrática con una Incógnita

Una **ecuación de segundo grado** o **ecuación cuadrática** es una igualdad que tiene la forma de una suma de términos cuyo *grado máximo es dos*, es decir, una ecuación cuadrática está representada por la igualdad a cero de un polinomio de segundo grado o un polinomio cuadrático.

DEFINICIÓN	*La expresión polinómica general de una ecuación cuadrática es:* $ax^2+bx+c = 0$, tal que $a \neq 0$ *donde* x *representa la incógnita;* a, b *y* c *son números reales;* a *es el coeficiente cuadrático (distinto de 0, pues si fuera cero, no sería ecuación cuadrática),* b *es el coeficiente lineal y* c *es el término independiente.*

Solución de una ecuación cuadrática

De una ecuación cuadrática con coeficientes reales existen siempre dos soluciones, no necesariamente distintas, llamadas *raíces*, que pueden ser reales o complejas (Justamente serán raíces, pues son las que anulan el polinomio cuadrático).



Encontramos las soluciones de la ecuación $x^2+3x+2 = 0$

- Primero identificamos a, b y c.
  $ax^2+bx+c = 0 \Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \Rightarrow a=1; b=3; c=2$

- Luego calculamos las raíces

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4.1.2}}{2.1} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2.1} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{-3+1}{2} = -1 = x_1 \\ \frac{-3-1}{2} = -2 = x_2 \end{cases}$$

$$S = \{-1; -2\}$$

Naturaleza de las Raíces de una Ecuación Cuadrática

La naturaleza de las raíces indica si éstas son reales o no, lo cual depende del valor del discriminante.

Llamamos **discriminante** de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ **a la expresión:** $\Delta = b^2 - 4ac$.

Esta naturaleza podemos resumirla de la siguiente manera:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4.a.c}$$

Si $\Delta < 0$ → $\nexists$ Raíces reales

Si $\Delta = 0$ → $\exists$ una raíz real doble

Si $\Delta > 0$ → $\exists$ dos raíces reales distintas

Por ejemplo: Indicar el tipo de soluciones que tienen cada una de las ecuaciones, pero sin calcular las mismas.

- ✓ $3x(x-1) + 2x^2 = x + 8$
  Para calcular el discriminante debemos tener igualada a cero y ordenados los términos cuadráticos, lineales e independiente.
  $3x^2 - 3x + 2x^2 - x - 8 = 0$
  $5x^2 - 4x - 8 = 0$ donde $a = 5; b = -4 \ y \ c = -8$ y ahora calculamos el $\Delta = b^2 - 4a.c = (-4)^2 - 4(5).(-8) = 16 + 160 = 176 > 0$, lo que significa que las raíces son reales y distintas.

- ✓ $(x-1)^2 - 2(x-1) = 2 - 2x$, realizamos las operaciones indicadas hasta obtener su mínima expresión:
  $x^2 - 2x + 1 - 2x + 2 = 2 - 2x$
  $x^2 - 2x + 1 = 0$ donde $a = 1; b = -2 \ y \ c = 1$ y ahora calculamos el $\Delta = b^2 - 4a.c = (-2)^2 - 4(1).(1) = 4 - 4 = 0$, lo que significa que las raíces son reales e iguales.

- ✓ $(x+3)^2 = -5$, calculamos el cuadrado del binomio del 1° miembro y luego igualamos a cero
  $x^2 + 6x + 9 = -5$
  $x^2 + 6x + 14 = 0$ donde $a = 1; b = 6 \ y \ c = 14$ y ahora calculamos el $\Delta = b^2 - 4a.c = (6)^2 - 4(1).(14) = 36 - 56 = -20 < 0$, lo que significa que las raíces no son reales.

Análisis de parámetros en las ecuaciones cuadráticas

Al igual que en las ecuaciones lineales, encontramos algunas ecuaciones cuadráticas, donde aparecen otras letras diferentes a la incógnita, es decir los parámetros.

Para determinar el tipo de solución de una ecuación cuadrática, donde figura un parámetro debemos realizar el análisis de dicho parámetro.

Por ejemplo: determinar el valor del parámetro m para analizar los distintos tipos de soluciones que puede tener la ecuación $(x+2)^2 - 2m = 3$.

Para ello calculamos el cuadrado del binomio, ordenamos los términos e igualamos a cero, para poder identificar los coeficientes. Luego determinamos el discriminante para analizar las distintas posibilidades.

$x^2 + 4x + 4 - 2m = 3$

$x^2 + 4x + 1 - 2m = 0$ donde $a = 1; b = 4 \ y \ c = 1 - 2m$ y calculamos el $\triangle = b^2 - 4a.c = (4)^2 - 4(1).(1-2m) = 16 - 4 + 8m = 12 + 8m$

Ahora analizamos los distintos tipos de soluciones:

- **Soluciones reales y distintas**: recordemos que $\triangle = b^2 - 4a.c > 0$, o sea que $12 + 8m > 0$, por ello $m > -\frac{3}{2}$
- **Soluciones reales e iguales**: para este tipo de solución se cumple que $\triangle = b^2 - 4a.c = 0$; o sea que $12 + 8m = 0$, por ello $m = -\frac{3}{2}$
- **Soluciones no reales**: se cumple cuando $\triangle = b^2 - 4a.c < 0$; es decir que $12 + 8m < 0$, por ello $m < -\frac{3}{2}$

Propiedades de la Ecuación Cuadrática

Las raíces de toda ecuación cuadrática verifican las siguientes propiedades:

- **La suma de las raíces de toda ecuación cuadrática** $a.x^2 + b.x + c = 0$ **es el cociente cambiado de signo entre el coeficiente del término lineal y el coeficiente cuadrático.**

Simbólicamente: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

- **El producto de las raíces de toda ecuación cuadrática** $a.x^2 + b.x + c = 0$ **es el cociente entre el término independiente y el coeficiente cuadrático.**

Simbólicamente: $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$

- **Toda ecuación cuadrática** $a.x^2 + b.x + c = 0$ **se la puede expresar en forma factorizada como el siguiente producto:**

Simbólicamente $a.(x - x_1).(x - x_2) = ax^2 + bx + c$

Lenguajes Matemáticos

Así como en nuestra vida cotidiana utilizamos distintos medios para comunicarnos: el lenguaje hablado y escrito, en sus diferentes idiomas, el lenguaje simbólico y el lenguaje de los códigos, también en Matemática utilizamos distintos lenguajes.

El lenguaje algebraico es una herramienta útil para resolver problemas, para demostrar propiedades matemáticas y hacer generalizaciones.

Los lenguajes utilizados en Matemática son:

- El **<u>lenguaje coloquial</u>**, formado por las palabras que utilizamos para conversar.

Por ejemplo:

- ✓ El triple de un número es igual a diez.
- ✓ L a edad de Juan supera en dos años a la de Pablo.
- ✓ El costo de vida de este año ha aumentado un 2% respecto del año anterior.

- El **<u>lenguaje simbólico o algebraico</u>**, formado por los símbolos específicos de la Matemática.
  Las expresiones anteriores traducidas al lenguaje simbólico son:
  - ✓ $3\ n = 10$ donde n representa un número cualquiera
  - ✓ $J = P + 2$ donde J representa la edad de Juan y P la edad de Pablo
  - ✓ $C = c + 0{,}02\ c$ donde C es el costo actual y c el costo anterior.

- El **<u>lenguaje gráfico</u>**, utilizado para brindar mucha información en poco espacio.

Por ejemplo:

- ✓ gráficos circulares
- ✓ gráficos de barras
- ✓ representaciones en ejes cartesianos (que utilizaremos en el próximo tema)

<u>Acciones para contribuir al desarrollo de la habilidad "Traducir del lenguaje común al algebraico"</u>

<u>Leer y analizar detenidamente la situación dada en el lenguaje común</u>.

- ✓ Lee el texto detenidamente.
- ✓ Divide el texto en oraciones y analiza en cada una de ellas los datos que te dan.
- ✓ Identifica las palabras claves y busca su significado correcto según el texto de la situación.

Precisar él o los datos de los cuales dependen o se derivan los demás.

- ✓ De los datos que te dan busca aquel o aquellos a partir de los cuales los demás datos están relacionados directamente.
- ✓ Subraya ese o esos datos o anótalos en algún lugar.

Asignar con una o más variables el o a los datos de los cuales dependen o se derivan los demás.

- ✓ Al o a los datos a partir de los cuales los demás datos están relacionados directamente, asígnale variables.
- ✓ Escribe el dato que asignaste a cada variable.

Relacionar o combinar los datos que dependen o se derivan del o de los esenciales a través de las variables asignadas a estos últimos.

- ✓ A través de cada variable asignada anteriormente expresa los demás datos que se relacionan directamente al dato correspondiente a esa variable empleando las palabras claves identificadas.
- ✓ Escribe cada expresión algebraica o cada ecuación que obtengas al relacionar o combinar todos los datos que te dan.

Comprobar que las relaciones o combinaciones determinadas en el lenguaje algebraico reflejan totalmente la situación dada en el lenguaje común.

- ✓ Revisa las variables que asignaste a los datos con los cuales crees que están relacionados directamente todos los demás, así como cada expresión algebraica o ecuación obtenida.
- ✓ Lee nuevamente el texto y verifica que todas las palabras claves se han tomado en cuenta y que el texto está reflejado totalmente en estas.

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

1) Un mago le dice a Juan: Piensa un número; añádele 15; multiplica por tres el resultado; a lo que salga, réstale 9; divide entre 3; resta 8 y dime qué número obtienes. Yo, "leyendo tu mente", puedo saber en qué número habías pensado. ¿Cómo consigue "el mago" averiguarlo tan rápido? Busca la ecuación con la que trabaja el mago.

2) Escribe una ecuación equivalente a cada una de las dadas, de manera que quede despejada la/s incógnita/s especificada/s entre paréntesis de cada una de las siguientes fórmulas:

a) $I = P\,r\,t$ **(P)** **b)** $C = 2\pi r$ **(r)** **c)** $A = \frac{1}{2}\,b\,h$ **(h)**

d) A = P + P r.t **(r)** **e)** A = $\frac{1}{2}(b_1 + b_2).h$ ***(b₁)*** **f)** *S* = $\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$ ***(v₀)***

3) ¿Para qué valores de x se verifican las siguientes igualdades?

a) x.0 = x **b)** x + 0 = x **c)** x.0 = 0 **d)** $\frac{0}{x} = 0$

4) Resuelve y determina el conjunto solución:

a) -4x – 5 = -3x + 3

b) 3 (2x – 1) = 8 (x - $\frac{9}{8}$)

c) $\frac{3x-2}{3} - x = -1 + \frac{x-1}{7}$

d) $(x + 2)^2 - x^2 + 5 = 0$

e) (x – 1) (3 + x) = $x^2 + 7$

f) (2x + 9)(4x-3) = $8x^2 - 2$

g) 2 (x - 1) = 3x +2 – x – 4

h) $\mathbf{2x - 1 = -x + 3x + 2}$

i) $x^2 - 25 = 0$

j) $4x^2 - 8x - 1 = 0$

k) $\frac{x - \sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{8}}{x + \sqrt{3}}$

n) $2x^2 - 3x + 1 = \frac{1}{2}(2x + 2)$

l) x (x^2-3x) – 4(x-1) =x^3

o) $(x + 1)^2 = (1-3x)^2$

m) $\frac{(x - \sqrt{2})}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{12}}{(x + \sqrt{2})}$

5) Halla las ecuaciones de segundo grado (con a =1), cuyas raíces son:

a) $x_1 = 3$ y $x_2 = -\frac{1}{3}$

c) $x_1 = \frac{2}{5}$ y $x_2 = -\frac{1}{2}$

b) $x_1 = \sqrt{2}$ y $x_2 = -\sqrt{2}$

d) $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

6) Encuentra dos números tales que su suma sea s y su producto p:

a) $s = -4$ y $p = 3$ *b)* $s = 2$ y $p = \frac{5}{9}$ *c)* $s = 0$ y $p = -\frac{7}{2}$

7) Determina el valor de k en cada caso:

a) $2x - kx = 6$ para que tenga:

- por solución $x = 2$
- única solución
- infinitas soluciones
- ninguna solución

b) $kx^2 - x = 0$ para que:

- una de sus soluciones sea $x = \dfrac{1}{2}$. ¿Cuál es la otra?
- Dos raíces reales y distintas
- Raíces dobles y reales
- No tenga solución en R.

c) $\frac{1}{x+k} + \frac{x^2}{k^2+kx} = \frac{x+k}{k}$ para que tenga:

- por solución x= $-\frac{1}{2}$
- única solución
- infinitas soluciones
- ninguna solución

d) $kx^2 + 2x = -2k - 3$ y el producto de las raíces sea igual a 3

e) $3kx^2 = 10 - 5x$ y la suma de las raíces sea igual a -2

8) Interpreta simbólicamente y luego resuelve la ecuación planteada para dar respuesta a lo pedido:

a) Halla los números enteros que verifican la condición pedida en cada uno de los siguientes casos:

- La quinta parte del anterior de un número es igual a 8. ¿Cuál es el número?
- La tercera parte del anterior de un número entero es cuatro unidades mayores que la quinta parte de su consecutivo. ¿Cuál es el número?
- La quinta parte del consecutivo de un número entero es cuatro unidades mayores que la sétima parte de su anterior. ¿Cuál número es?
- La octava parte del anterior de un número entero es dos unidades menor que la sexta parte de su consecutivo. ¿Cuál número es?

b) Una casa cuesta \$ 182000. Su valor es siete veces el costo del terreno sobre el que está construida. ¿Cuál es el valor del terreno?

c) Un negocio que fabrica y vende pulseras, las vende a \$10 cada pulsera. Además tiene gastos fijos de \$600 por mes y gastos por la compra de materia prima para fabricar las pulseras, que depende de las que fabrique y es de \$ 4 por pulsera. ¿Qué cantidad de pulseras se tienen que fabricar y vender, para que el ingreso iguale al gasto?

d) Los miembros de una empresa desean invertir \$3000000 en dos tipos de seguros que pagan dividendos anuales del 9% y del 6%, respectivamente. ¿Cuánto deberán invertir a cada tasa si el ingreso debe ser equivalente al que producirá al 8% la inversión total?

e) Un comerciante de la zona céntrica de la ciudad ofrece por el alquiler de su local un 30% de descuento al precio normal y aún obtiene una utilidad del 10%. Si le cuesta \$11000000 al comerciante, ¿cuál debe ser el precio normal?

Y ahora? Me detengo a reflexionar!!

Marcar con una x en la columna que corresponda según los aprendizajes que consideres logrados, o que está en proceso o bien donde debes volver a intentar. Si la mayoría de las cruces están en la segunda y tercera columna, revisa

Metacognición	Lo Logré	Está en proceso	Debo volver a intentar
Aplico propiedades para hallar el conjunto solución de una ecuación			
Clasifico las ecuaciones lineales según el tipo de solución			
Clasifico las ecuaciones cuadráticas según el tipo de solución			
Resuelvo problemas que involucren el planteo y resolución de una ecuación			
Identifico situaciones que tengan que ver con ecuaciones lineales o cuadráticas			

TEMA V
ECUACION
DE LA RECTA
Y
SISTEMAS DE
ECUACIONES LINEALES

TEMA IV "ECUACIÓN DE LA RECTA Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES"

Pares Ordenados

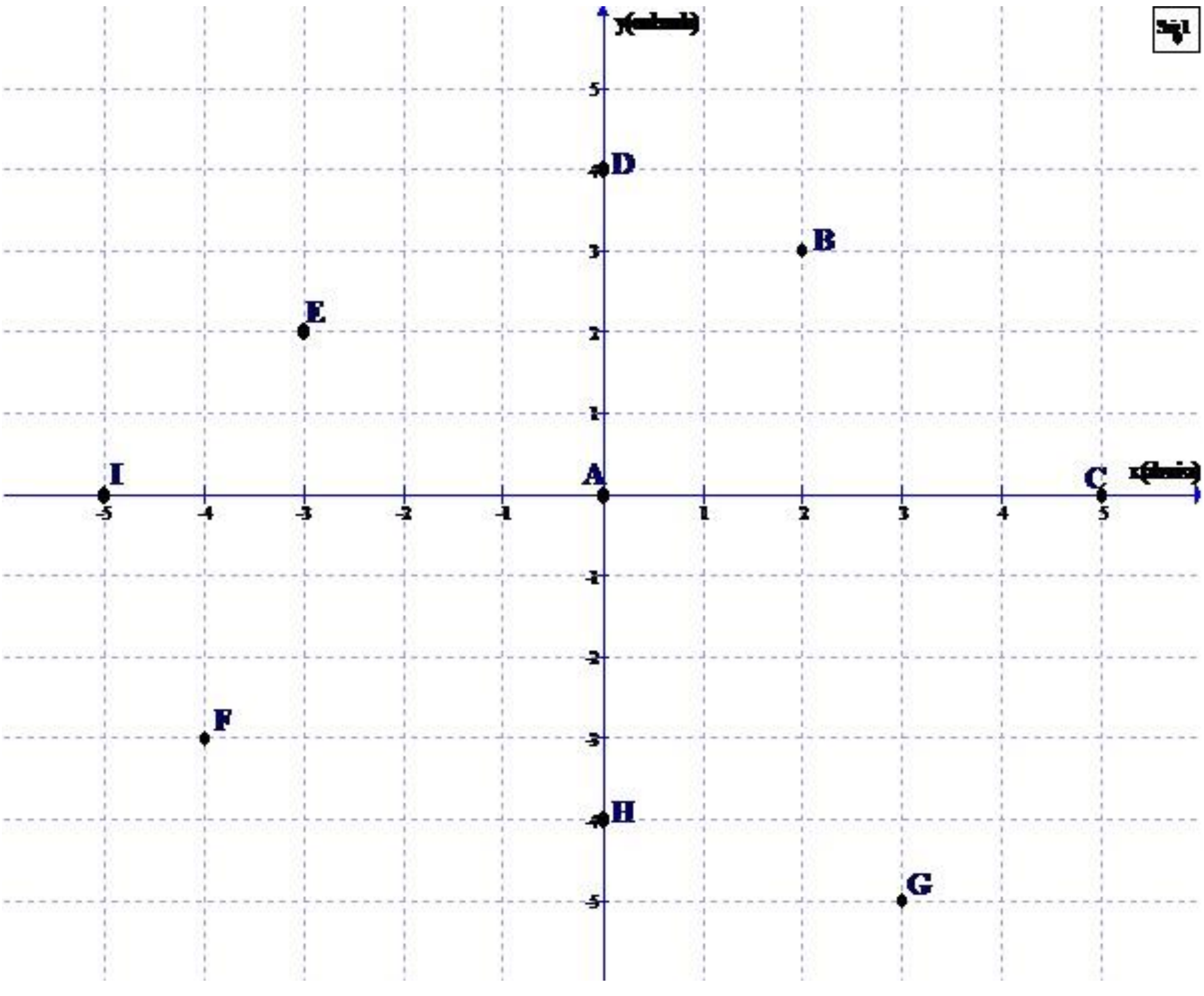
	*Dados dos números reales **x** e **y** en un cierto orden denominamos par ordenado a toda expresión de la forma **(x; y).***

Decimos ordenado porque x antecede a y; por lo tanto (x; y) $\neq$ (y; x).

Los pares ordenados representan puntos en el plano; donde a la primera componente **x** la representamos sobre el eje de las **abscisas** (horizontal) y a la segunda componente **y** sobre el eje de las **ordenadas** (vertical).

Por ejemplo: Representaremos en el plano cartesiano los siguientes puntos:

Puntos	A=(0;0)	B=(2;3)	C=(5;0)	D=(0;4)	E=(-3;2)	F=(-4;-3)	G=(3;-5)	H=(0;-4)	I=(-5;0)
Abscisa	0	2	5	0	-3	-4	3	0	-5
Ordenada	0	3	0	4	2	-3	-5	-4	0



¿Cuál es la característica común en los puntos D, A y H?

Ecuación de la Recta

Ahora sólo estudiaremos la ecuación de la recta que es la representación gráfica de la función lineal.

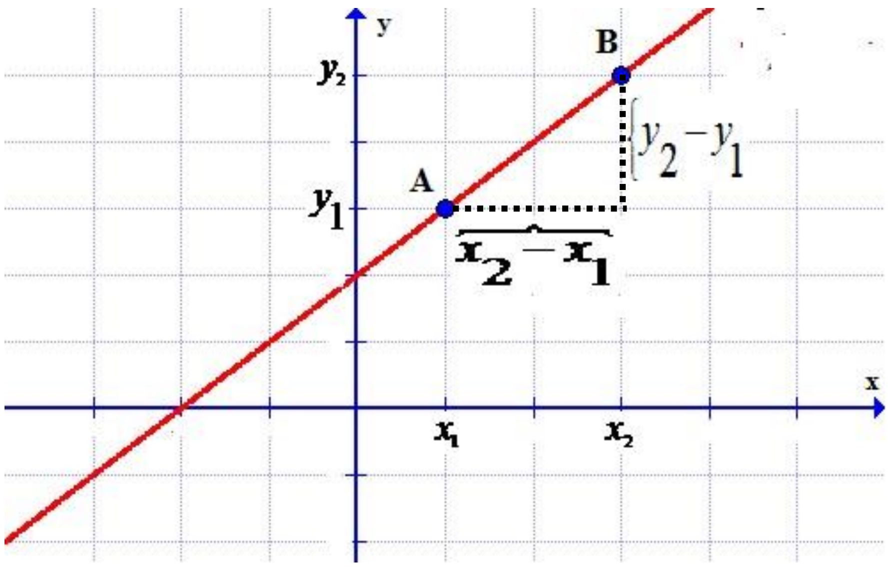
DEFINICIÓN	*Denominamos ecuación de la recta a toda expresión de la forma* $y = a.x + b$.

Ejemplos: $y = x - 5$ $\quad$ $y = -x + 3$ $\quad$ $y = \frac{2}{3}x - 3$

$y = 3x$ $\quad$ $y = -2x$ $\quad$ $y = 5$

En la ecuación de la recta debemos tener en cuenta los conceptos de pendiente, de ordenada al origen y la representación gráfica, que especificamos a continuación:

Pendiente: indica la inclinación de la recta $y = a.x + b$ respecto del semieje positivo de eje x, que la calculamos teniendo como datos dos puntos en el plano. El cociente $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es lo que denominamos pendiente, siendo los puntos $A = (x_1; y_1)$ y $B = (x_2; y_2)$



Si $a > 0$ la recta forma con el eje x un ángulo menor de 90° (ángulo agudo)

Si $a < 0$ la recta forma con el eje x un ángulo mayor de 90° (ángulo obtuso)

Si $a = 0$ la recta es paralela al eje x

Ejemplos: Para cada una de las expresiones dadas en los ejemplos anteriores, la pendiente es la indicada en cada caso:

$y = x - 5 \quad a = 1$ $\qquad$ $y = -x + 3 \quad a = -1$ $\qquad$ $y = \frac{2}{3}x - 3 \quad a = \frac{2}{3}$

$y = 3x \quad a = 3 \qquad\qquad y = -2x \quad a = -2 \qquad\qquad y = 5 \quad a = 0$

Ordenada al origen: es el valor donde la recta $y = a.x + b$ corta al eje y; es decir el punto de intersección de la recta con el eje y, que es (0;b).

Ejemplos: la ordenada al origen para cada una de las ecuaciones de los ejemplos anteriores es:

$y = x - 5 \quad b = -5 \qquad y = -x + 3 \quad b = 3 \qquad y = \frac{2}{3}x - 3 \quad b = -3$

$y = 3x \quad b = 0 \qquad y = -2x \quad b = 0 \qquad y = 5 \quad b = 5$

Representación Gráfica de la ecuación de la recta: como indica su nombre la representación gráfica es una línea recta.

Para representar gráficamente basta dar dos puntos en el plano que pertenezcan a la recta (es decir que las coordenadas -o puntos- verifiquen la ecuación dada)

Ejemplos: Si representamos gráficamente las siguientes rectas, a partir de dos puntos dados, tendremos:

$y = x - 5$

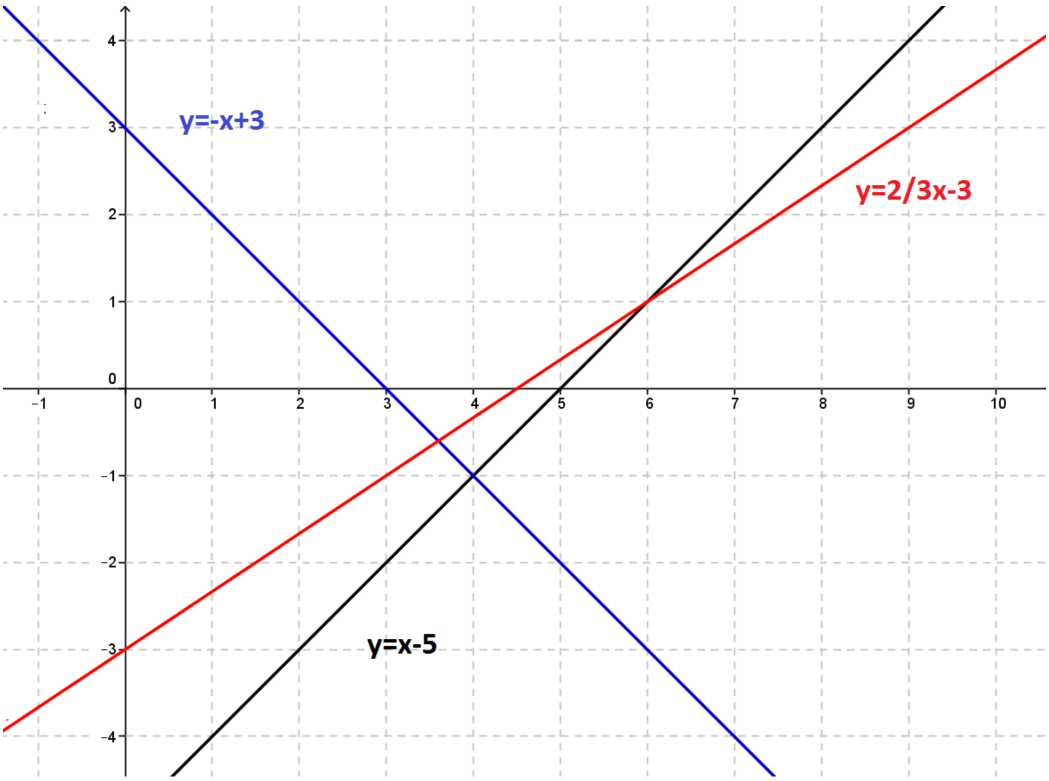
x	$y = x - 5$
0	-5
5	0

$y = -x + 3$

x	$y = -x + 3$
0	3
-3	0

$y = \frac{2}{3}x - 3$

x	$y = \frac{2}{3}x - 3$
0	-3
3	-1



Ahora representaremos las siguientes rectas, también haciendo la tabla de valores, a partir de dos puntos:

$y = 3x$

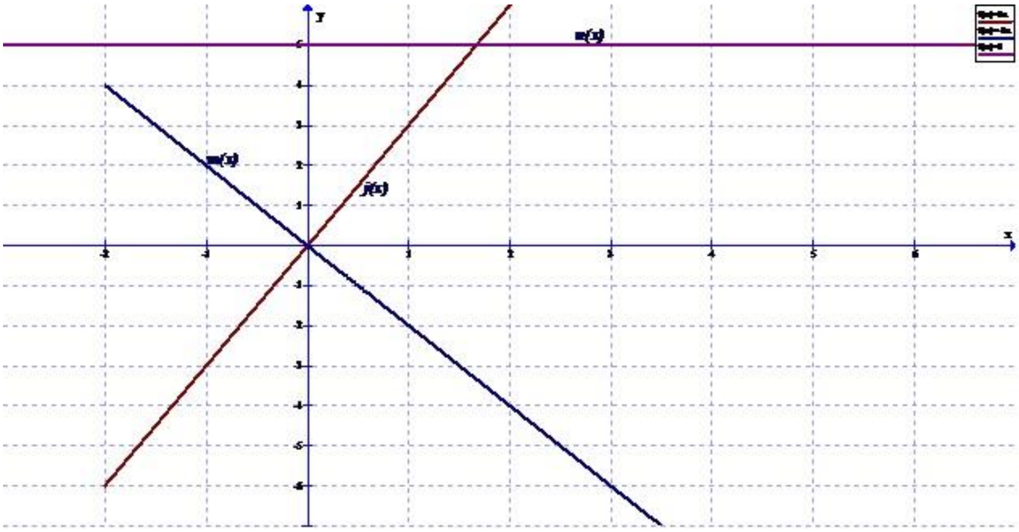
x	$y = 3x$
0	0
1	3

$y = -2x$

x	$y = -2x$
0	0
1	-2

$y = 5$

x	$y = 5$
0	5
1	5



Distintas Expresiones de la Ecuación de la Recta

Existen expresiones diferentes de la ecuación de la recta y las mismas son:

Ecuación Explícita

Está dada por la ya conocida expresión:

$$\boldsymbol{y = ax + b}$$

Ecuación General o Implícita de una recta

La ecuación de la recta también la podemos expresar con todos los términos en el lado izquierdo de la igualdad; es decir que la ecuación queda igualada a cero. Es lo que denominamos **ecuación general** o **implícita** de la recta:

$$Ax + By + C = 0$$

Ecuación Canónica o Normal de una recta

La ecuación de la recta, además la podemos expresar, de manera tal que quede igualada a 1 (cuando se posible) y los valores que dividen a x e y, indican los puntos de intersección con cada uno de los ejes respectivos.

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Ejemplos: Para cada una de las ecuaciones dadas, determinar las ecuaciones explícitas, implícitas y canónicas, según corresponda y sea posible. Representar gráficamente.

$y = 3x + \frac{4}{3}$ $\qquad 3x + 2y - 5 = 0$ $\qquad \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

Dada la recta $y = 3x + \frac{4}{3}$, esta expresión es la ecuación explícita, para la que obtendremos:

- Ecuación General: debemos igualarla a 0, por ello $y - 3x - \frac{4}{3} = 0$, que ordenando nos queda $-3x + y - \frac{4}{3} = 0$
- Ecuación Canónica: debemos igualarla a 1, para lo cual realizamos pasajes de términos de manera tal que quede igualada al valor del término independiente; es decir $y - 3x = \frac{4}{3}$. Ahora dividimos ambos miembros por $\frac{4}{3}$; o sea $\frac{y}{\frac{4}{3}} - \frac{3x}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow \frac{y}{\frac{4}{3}} + \frac{x}{-\frac{4}{9}} = 1$, de esto deducimos que corta al eje x en $-\frac{4}{9}$ y al eje y en $\frac{4}{3}$

Dada la recta $3x + 2y - 5 = 0$, esta expresión es la ecuación implícita, para la que obtendremos:

- Ecuación Explícita: debemos despejar el valor de la variable y, por ello $2y = -3x + 5$, que despejando el valor de y nos queda $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$
- Ecuación Canónica: debemos igualarla a 1, para lo cual realizamos pasajes de términos de manera tal que quede igualada al valor del término independiente; es decir $3x + 2y = 5$. Ahora dividimos ambos miembros por 5; o sea $\frac{3x}{5} + \frac{2y}{5} = \frac{5}{5} \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{5}{3}} + \frac{y}{\frac{5}{2}} = 1$, de esto deducimos que corta al eje x en $\frac{5}{3}$ y al eje y en $\frac{5}{2}$.

Dada la recta $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$, esta expresión es la ecuación canónica o normal, para la que obtendremos:

- Ecuación General: debemos igualarla a 0, por ello $\frac{2x+3y}{6} = 1$, que al realizar el pasaje del divisor 6 al otro miembro nos queda $2x + 3y = 6 \Leftrightarrow 2x + 3y - 6 = 0$
- Ecuación Explícita: debemos despejar el valor de la variable y, con lo que se obtiene $\frac{2x+3y}{6} = 1 \Leftrightarrow 2x + 3y = 6 \Leftrightarrow y = 2 - \frac{2}{3}x$

Ecuación punto-pendiente de una recta

Una recta queda perfectamente determinada por su inclinación y por un punto perteneciente a ella. Esto nos permite tener la siguiente definición:

DEFINICIÓN	*Sea $(\boldsymbol{x_0};\ \boldsymbol{y_0})$ un punto de una recta y $\boldsymbol{a}$ su pendiente, entonces su ecuación viene dada por la expresión $\boldsymbol{y - y_0 = a.(x - x_0)}$*

Ejemplo: Hallar la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto (-2, 4) y tiene pendiente 3.

En este caso simplemente debemos reemplazar los datos en la expresión indicada $y - y_0 = a.(x - x_0)$, y obtenemos así: $y - 4 = 3.(x + 2)$

De esta expresión podemos encontrar la ecuación explícita que es: $y - 4 = 3.(x + 2) \Leftrightarrow y - 4 = 3x + 6 \Leftrightarrow y = 3x + 10$, la ecuación implícita o general es: $y - 4 = 3.(x + 2) \Leftrightarrow y - 4 = 3x + 6 \Leftrightarrow -3x + y - 4 - 6 = 0 \Leftrightarrow -3x + y - 10 = 0$ y para obtener la canónica o normal se parte de $-3x + y = 10 \Leftrightarrow -\frac{3x}{10} + \frac{y}{10} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{-\frac{10}{3}} + \frac{y}{10} = 1$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

DEFINICIÓN	*Sean los puntos* $A = (x_1; y_1)$ *y* $B = (x_2; y_2)$ *dos puntos de una recta que no sea vertical*, entonces la ecuación está dada por la expresión:* $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ *donde la pendiente es* $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

(* La recta no puede ser vertical porque en tal caso el denominador se anula)

Ejemplo: Hallar la ecuación general de la recta que pasa por los puntos A= (-1; 2) y B = (3; -2)

Reemplazando los valores en la expresión dada, tenemos:

$$y - 2 = \frac{-2 - 2}{3 + 1}(x + 1) \Leftrightarrow y - 2 = -x - 1 \Leftrightarrow x + y - 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$$

Aplicaciones

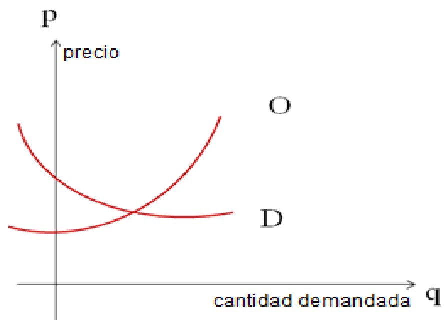
Ahora veremos las aplicaciones de las ecuaciones de la recta en Microeconomía (posible materia de cursado en la carrera de Lic. en Economía)

Curvas de Oferta y Demanda

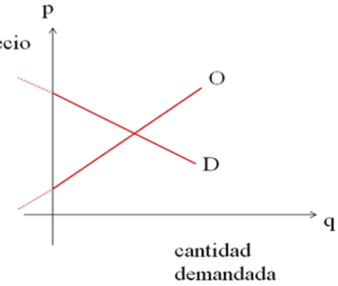
En la práctica, algunas ecuaciones de oferta y demanda son aproximadamente lineales en el intervalo que importa. Otras son no lineales.

En general, las ecuaciones de oferta y demanda lineales se utilizan para mayor simplicidad y claridad al ilustrar ciertos tipos de análisis.

En la práctica, una representación general de las curvas de oferta (O) y demanda (D) es la siguiente, donde p indica precio y q, cantidad demandada:



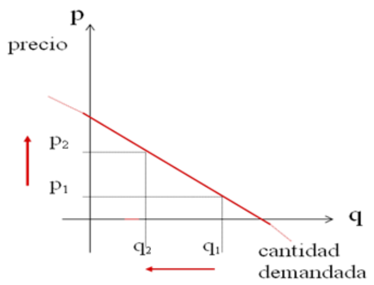
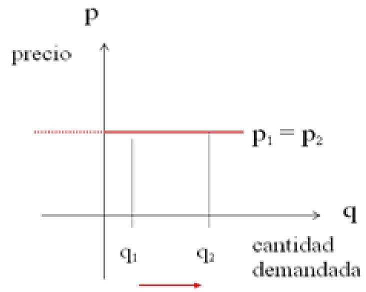
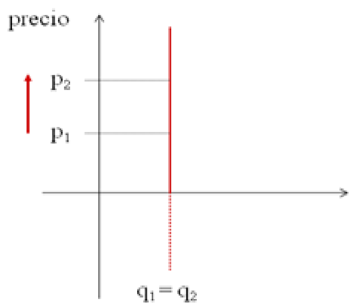
En este caso, en cambio, se representa la oferta y a la demanda como funciones lineales.



Debe notarse, eso sí, que sólo los segmentos de las ecuaciones que estén en el primer cuadrante son pertinentes al análisis económico. Esto ocurre porque oferta, precio y cantidad son, en general, cero o positivas.

Curvas de Demandas Lineales

Pueden existir distintos casos de curvas de demandas lineales, así tenemos:

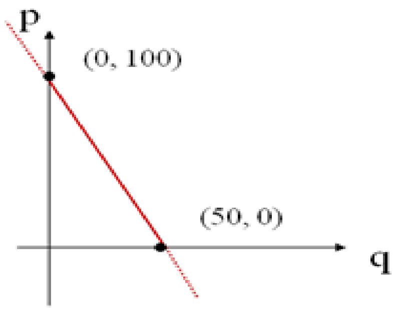
En el caso común, la pendiente de una curva de demanda es negativa, es decir, a medida que el precio aumenta, la cantidad demandada decrece y viceversa.	En algunos casos, la pendiente de una curva de demanda puede ser cero: precio constante sin considerar la demanda.	En otros casos la pendiente puede no estar definida: demanda constante sin importar el precio.
		

De acuerdo con la información disponible, puede resultar más conveniente utilizar una determinada forma de obtener la ecuación de una recta:

<u>Ejemplo 1</u>: **Cuando el precio es de 80 unidades monetarias (u.m.) se venden 10 relojes y se venden 20 cuando el precio es de 60 u.m. ¿Cuál es la ecuación de la demanda?**

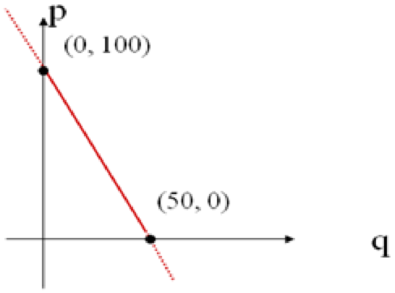
Solución: Con estos datos, conviene usar la forma *dos puntos* para la ecuación de una recta:

$p - p_1 = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}(q - q_1)$ donde q_1 =10, p_1 = 80, q_2 = 20 y p_2 = 60. Reemplazando y agrupando tenemos: 2 q + p - 100 = 0



<u>Ejemplo 2</u>: **Cuando el precio es de 100 u.m. no se vende ningún reloj; cuando son gratis, la demanda es de 50. ¿Cuál es la ecuación de la demanda?**

Solución: Con estos datos, conviene usar la forma *intersecciones* para la ecuación de una recta: $\frac{q}{a}+\frac{p}{b}=1$ y para este caso tenemos $\frac{q}{50}+\frac{p}{100}=1$, y su representación gráfica es:

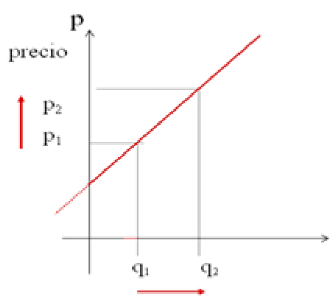
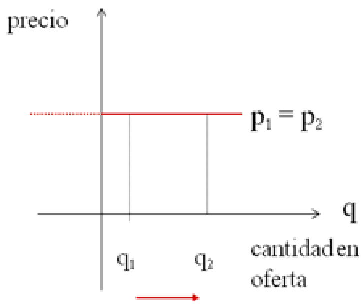
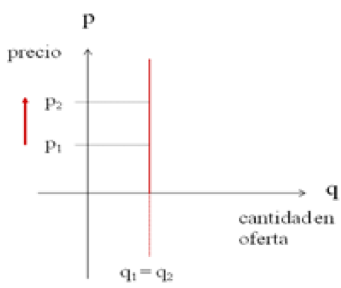


La ecuación de la demanda es: 2q + p -100 = 0

Observación: Note que es otra forma de plantear el mismo problema anterior.

Curvas de Ofertas Lineales

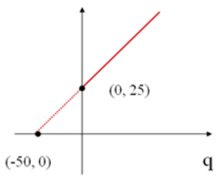
Detallamos los distintos casos según el valor de la pendiente de la ecuación de la oferta:

En el caso común, la pendiente de una curva de oferta es positiva, es decir, al aumentar el precio también aumenta el abastecimiento y viceversa.	En ciertos casos la pendiente de una curva de oferta puede ser cero lo que indica un precio constante e independiente de la oferta.	En otros casos la pendiente de la curva de oferta puede no estar definida: oferta constante e independiente del precio.
		

Ejemplo 1: **Cuando el precio es de 50 u.m. hay disponibles en el mercado 50 cámaras fotográficas; cuando el precio es 75 u.m. hay disponibles 100 cámaras. ¿Cuál es la ecuación de la oferta?**

Solución: Con estos datos, conviene usar la forma *dos puntos* para la ecuación de una recta:

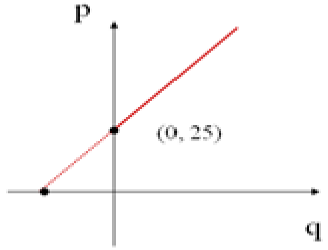
$p-p_1=\frac{p_2-p_1}{q_2-q_1}(q-q_1)$, reemplazando y agrupando: $p-50=\frac{75-50}{100-50}(q-50)$ y la ecuación de la oferta es: q - 2p + 50 = 0



Observación: Note que los puntos de la recta que están en el cuadrante II no son significativos para esta aplicación de las rectas.

Ejemplo 2: **Cuando el precio es de 25 u.m. no hay cámaras fotográficas disponibles en el mercado; por cada 10 u.m. de aumento en el precio se dispone de 20 cámaras más. ¿Cuál es la ecuación de la oferta?**

Solución: Con estos datos, conviene usar la forma *pendiente intersección* para la ecuación de una recta: $p = mq + b$. La pendiente de la recta es: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ y la intersección con el eje de los precios es (0,25). Por lo tanto, la ecuación de oferta es: q - 2p + 50 = 0

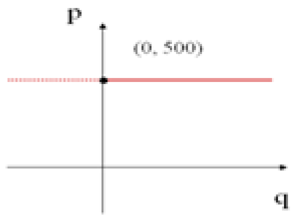


Observación: Note que esta es otra manera de plantear el mismo problema anterior.

Ejemplo 3: **De acuerdo con el contrato entre la compañía A y la de teléfonos, la compañía A pagará a la de teléfonos 500 u.m. al mes por las llamadas de larga distancia sin límite de tiempo. ¿Cuál es la ecuación de la oferta?**

Solución: El "bien" que está en oferta en este problema es *el tiempo de conexión en llamadas de larga distancia.*

Puesto que el precio es el mismo para cualquier valor del bien ofrecido, la oferta se representa por una línea horizontal con la ecuación: *p = 500*



Posiciones de Rectas en el Plano

Dos rectas en el plano pueden ser paralelas o secantes, ahora definiremos cada una de ellas.

Rectas Paralelas: son aquellas que no tienen puntos en comunes.

DEFINICIÓN	*Dos rectas son paralelas si y solo sí tienen la misma pendiente.* *Simbólicamente: Sean* $\boldsymbol{r_1: y = a_1x + b_1}$ *y* $\boldsymbol{r_2: y = a_2x + b_2}$ $\boldsymbol{r_1 // r_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2}$

Por ejemplo: Las rectas $r_1: 2x + y = 1$ y $r_2: y = -1 - 2x$ son rectas paralelas porque si determinamos sus pendientes $a_1 = -2$ y $a_2 = -2$ podemos observar que son iguales.

Para ello de la recta $r_1: 2x + y = 1$ debemos determinar la ecuación explícita, o sea despejar la variable y quedando $y = -2x + 1$ y para la recta r_2: ya está expresada en forma explícita $r_2: y = -1 - 2x$

Un caso particular de rectas paralelas son las coincidentes.

Rectas Coincidentes: son aquellas que tienen todos sus puntos en común.

DEFINICIÓN	*Dos rectas son coincidentes si y sólo sí tienen la misma pendiente y la misma ordenada al origen.* *Simbólicamente: Sean* $r_1: y = a_1 x + b_1$ *y* $r_2: y = a_2 x + b_2$ $r_1 es\ coincidente\ a\ r_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2$

Por ejemplo: Las rectas $r_1: 2x + y = 1$ y $r_2: y = 1 - 2x$ son rectas coincidentes porque las pendientes respectivas son $a_1 = -2$ y $a_2 = -2$ y sus ordenadas al origen también $b_1 = 1$ y $b_2 = 1$ son iguales. Es decir que son iguales entre sí sus pendientes y sus ordenadas al origen.

$r_1: 2x + y = 1 \Leftrightarrow y = -2x + 1$ y $r_2: y = 1 - 2x$

Rectas Secantes: son aquellas que tienen un único punto en común (punto de intersección)

DEFINICIÓN	*Dos rectas son secantes si y sólo sí tienen distintas sus pendientes.* *Simbólicamente: Sean* $r_1: y = a_1 x + b_1$ *y* $r_2: y = a_2 x + b_2$ $r_1 es\ secante\ a\ r_2 \Leftrightarrow a_1 \neq a_2$

Por ejemplo: Las rectas $r_1: 2x + y = 1$ y $r_2: y = -2 - 3x$ son rectas secantes porque si determinamos sus pendientes $a_1 = -2$ y $a_2 = -3$ podemos observar que son distintas.

$r_1: 2x + y = 1 \Leftrightarrow y = -2x + 1$ y $r_2: y = -2 - 3x$

Un caso particular de rectas secantes son las rectas perpendiculares.

Rectas Perpendiculares:

DEFINICIÓN	*Dos rectas son perpendiculares si y sólo sí el producto de las pendientes de ambas rectas es igual a -1.* *Simbólicamente: Sean* $r_1: y = a_1 x + b_1$ *y* $r_2: y = a_2 x + b_2$ $r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow a_1 a_2 = -1\ o\ bien\ \ a_1 = -\frac{1}{a_2}$

Por ejemplo: Las rectas $r_1: 2x + y = 1$ y $r_2: y = -2 + \frac{1}{2}x$ son rectas perpendiculares porque si determinamos sus pendientes $a_1 = -2$ y $a_2 = \frac{1}{2}$ podemos observar que el producto de ambas es igual a -1.

Ecuación Lineal con dos Incógnitas

DEFINICIÓN	*Es una expresión de la forma $ax + by = c$ donde a, b y c son números reales. Los números a y b son los coeficientes de las incógnitas x e y respectivamente y c recibe el nombre de término independiente.*

<u>Ejemplo</u>: $3x + 2y = 5$ es una ecuación lineal donde $\begin{cases} los\ coeficientes\ son\ a = 3,\ b = 2 \\ las\ incognitas\ son\ x\ e\ y \\ el\ término\ independiente\ es\ 5 \end{cases}$

<u>Conjunto solución</u>

DEFINICIÓN	*Al conjunto de pares ordenados $(r_1; r_2)$ denominamos solución de la ecuación $ax + by = c$ si al sustituirlo en la ecuación, satisface a la misma; o sea que $a.r_1 + b.r_2 = c$ es verdadero*

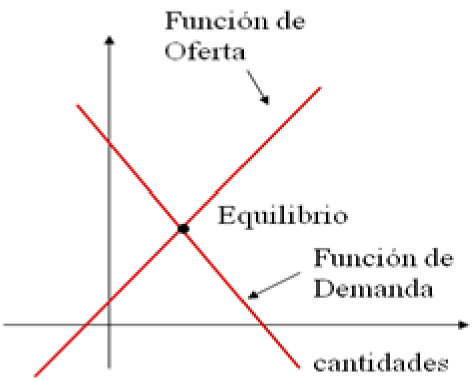
<u>Ejemplo</u>:

$(1;\ 1)$ es una solución de la ecuación $\mathbf{3x + 2y = 5}$ porque al reemplazar los valores de las incógnitas verifican la igualdad, en este caso: $3.1 + 2.1 = 5 = 5$. También podemos ver que $(-1;\ 4)$ es una solución de dicha ecuación; es decir que todos los puntos que verifican la ecuación son los de la recta $\mathbf{3x + 2y = 5}$.

Por ello podemos afirmar que **una ecuación lineal con dos incógnitas siempre tiene infinitas soluciones.**

Equilibrio del Mercado

Recordaremos las ecuaciones de Oferta y de Demanda que vimos anteriormente. Se dice que existe *equilibrio del mercado* en el punto (precio) en que la cantidad demandada de un artículo es igual a la cantidad en oferta.



Así si se usan las mismas unidades para q y p en ambas funciones (de oferta y de demanda):

La cantidad y el precio de equilibrio corresponden a las coordenadas del punto de intersección de las curvas de oferta y de demanda.

Algebraicamente, la cantidad y el precio de equilibrio se hallan resolviendo simultáneamente las ecuaciones de oferta y de demanda, siempre que se usen las mismas unidades en ambos casos.

Para hallar este punto de equilibrio debemos aprender a resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Sistemas de dos Ecuaciones Lineales con dos Incógnitas

DEFINICIÓN	*Un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas es un par de expresiones algebraicas que representamos de la siguiente forma:* $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ *donde* x *e* y *son las incógnitas,* a_1, a_2, b_1 *y* b_2 *son los coeficientes y,* c_1 *y* c_2 *son los términos independientes.*

Un ejemplo de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas es $\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=2 \end{cases}$

Cada una de las ecuaciones que componen el sistema, por separado, tendría infinitas soluciones, ya que hay infinitas parejas de números que suman 10 y, por otro lado, infinitos pares de números cuya resta sea 2. Sin embargo, al considerar juntas ambas ecuaciones para formar el sistema, estaremos buscando un par de números **(**x**,** y**)** que cumplan **a la vez** las dos condiciones.

Los sistemas de ecuaciones responden a planteamientos de problemáticas muy diversas. Por ejemplo, el sistema que hemos propuesto más arriba, podría ser el planteamiento para resolver un problema como el siguiente:

Entre lapiceras y cuadernos tengo diez piezas de material escolar. Tengo dos lapiceras más que cuadernos. ¿Cuántas lapiceras y cuadernos tengo?

Los sistemas de ecuaciones nos ayudan, por tanto, a plantear y resolver problemas similares al redactado anteriormente. Ahora vamos a profundizar en el conocimiento y manejo del planteamiento y la resolución de estos problemas utilizando como herramienta los sistemas de ecuaciones.

Cuya traducción y resolución sería:

x: número de lapiceras $\quad$ y: número de cuadernos $\quad$ $\begin{cases} x+y=10 \\ x=y+2 \end{cases}$

Resolución: $\begin{cases} x+y=10 \\ x=y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2+y=10 \\ x=y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=10-2 \\ x=y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{8}{4} \\ x=y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=6 \end{cases}$ $\quad S=\{(6;4)\}$

<u>Respuesta</u>: Son 4 cuadernos y 6 lapiceras.

Conjunto Solución

DEFINICIÓN	*El conjunto formado por el par ordenado $(x;y)$ que satisface simultáneamente las dos ecuaciones del sistema lo denominamos* ***Conjunto Solución*** *del sistema o sea a la expresión $\{(x;y)\}$.*

En el ejemplo anterior, buscábamos un par de números que cumplieran las dos ecuaciones del sistema. Pues bien, ese par de números **(x, y)** que satisface simultáneamente ambas ecuaciones de un sistema denominamos **Conjunto** S**olución** del sistema de ecuaciones.

En el caso del problema que utilizamos como ejemplo, la solución está dada por el par de números **(6, 4)**, es decir, x **= 6** e y **= 4**. Por tanto, la respuesta del problema planteado sería que tengo **seis** lapiceras y **cuatro** cuadernos. Debemos insistir en que 6 y 4 **no** son dos soluciones del sistema, sino que es una solución y ésta está formada por dos números.

¿Quiere decir esto que siempre un sistema de ecuaciones tiene un par de números por solución? Pues no. En realidad, un poco más adelante, veremos que un sistema de ecuaciones puede que no tenga solución, e incluso, puede que tenga infinitas soluciones. Esto dependerá del **tipo** de sistema de que se trate.

Equivalencia de Sistemas de Ecuaciones

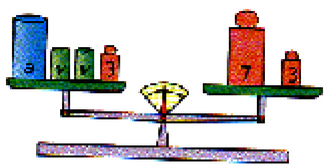
Para poder hablar de sistemas equivalentes, vamos a hacerlo primero de *ecuaciones equivalentes*.

Balanza 1

Supongamos que tenemos en una balanza un recipiente azul y dos verdes que pesan 7 kg. Esto lo podemos expresar como una ecuación de la forma: $a + 2v = 7$. Si en ambos platos de la balanza ponemos una pesa de 3 kg., la balanza seguirá equilibrada. A esta última acción la escribiremos con la ecuación: $a + 2v + 3 = 7 + 3$, es decir, $a + 2v + 3 = 10$. Estas dos ecuaciones tienen la misma solución y se dice que son **ecuaciones equivalentes**.

Balanza 2

Al sumar 3 kilos en los dos platillos se mantiene el equilibrio.



De la misma forma, si, en vez de sumar la misma cantidad, se multiplican los dos miembros de una ecuación por la misma cantidad, ambas ecuaciones tendrán la misma solución. Es decir:

Si sumamos una misma cantidad a los dos miembros de una ecuación o multiplicamos ambos por un mismo número distinto de cero, obtenemos una ecuación ***equivalente*** *a la dada.*

Definido el concepto de ecuación equivalente, ya podemos definir el de **sistemas equivalentes**:

DEFINICIÓN	*Dos sistemas de ecuaciones son* ***equivalentes*** *si tienen la(s) misma(s) solución(es).*

Aunque ya conozcamos la definición, debemos saber también qué operaciones nos permiten pasar de un sistema de ecuaciones a otro equivalente; para ello daremos las propiedades:

Propiedades de Sistemas Equivalentes

- **Sumar** un mismo número (no una incógnita) a ambos miembros de una de las ecuaciones del sistema.
- **Multiplicar** ambos miembros de una de las ecuaciones del sistema por un número distinto de cero.
- **Sumar una ecuación** a otra previamente multiplicada por un número cualquiera.
- **Despejar una incógnita** en una ecuación y **sustituir** la expresión obtenida en la otra ecuación.

Mediante cualquiera de los métodos relacionados antes obtenemos un sistema equivalente al dado y que, por tanto, tendrá las mismas soluciones que el primitivo.

Para el ejemplo del problema de lapiceras y lápices $\begin{cases} x+y=10 \\ x=y+2 \end{cases}$ la resolución es

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x=y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2+y=10 \\ x=y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=10-2 \\ x=y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{8}{2} \\ x=y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=6 \end{cases} \qquad S=\{(6;4)\}$$

Y las propiedades de sistemas equivalentes que se aplicaron fueron:

- Sustituir en la 1° ecuación el valor de x por $x = y + 2$
- Sumar -2 en ambos miembros de la 1° ecuación
- Multiplicar por $\frac{1}{2}$ en ambos miembros de la 1° ecuación
- Sustituir en la 2° ecuación el valor de y para obtener el valor de x

Clasificación de los Sistemas de acuerdo al tipo de solución

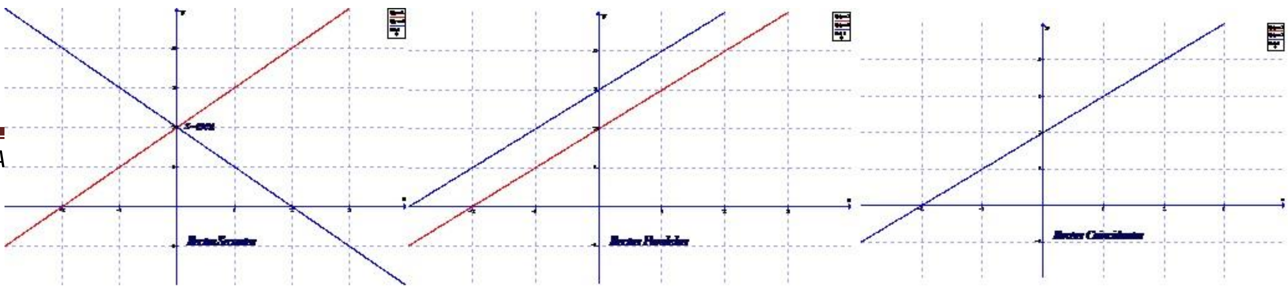
A los sistemas los podemos clasificar por el tipo de soluciones en:

Sistemas compatibles determinados (SCD): son aquellos que tiene única solución es decir que las líneas rectas se cortan en un solo punto, que representaría la solución. Para este caso, las rectas tienen distintas pendientes (rectas secantes).

Sistema compatible indeterminado (SCI): son aquellos que tienen infinitas soluciones. Las rectas estarán superpuestas (por lo tanto todos los puntos de las rectas son soluciones); es decir tienen la misma pendiente y ordenada al origen (rectas coincidentes)

Sistema incompatible (SI): son aquellos que no tienen solución. Las rectas son paralelas (ningún punto de intersección); es decir tienen la misma pendiente pero distintas ordenadas al origen (rectas paralelas)

A



SCD **SI** **SCI**

Métodos de Resolución

En cuanto a la resolución, los métodos que veremos en este tema, (que no son todos) se dividen en dos grupos: **métodos analíticos** y **método gráfico**.

Los métodos analíticos son los que permiten la resolución (y discusión) del sistema sin necesidad de recurrir a su representación gráfica, es decir, mediante la utilización de las propiedades de equivalencia de sistemas, ya vista anteriormente, y simples operaciones aritméticas.

Los **métodos analíticos**, que estudiaremos uno a uno, son tres: *sustitución*, *igualación* y *reducción*.

Métodos Analíticos

- de Sustitución
- de Igualación
- de Reducción por sumas o restas

Métodos gráficos: consiste en representar gráficamente ambas rectas y determinar si existe el punto de intersección (dicho punto es la solución del sistema).

De ahora en adelante, desarrollaremos, uno por uno, los diferentes métodos de resolución de los sistemas de ecuaciones y, simultáneamente, podemos ir haciendo, en cada caso, la discusión del conjunto solución del sistema. Vamos a empezar pues con:

Método de Sustitución: para resolver un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas por este método seguiremos los siguientes pasos:

- Despejamos una de las incógnitas de cualquiera de las ecuaciones dadas del

Evidentemente, cuando la incógnita que despejamos en el primer paso puede ser cualquiera y de cualquier ecuación, es mejor, por la facilidad de los cálculos posteriores, hacer una buena elección de ambas, incógnita y ecuación. Queremos decir que será más fácil operar después si, por ejemplo, elegimos una incógnita en una ecuación en la que "no tenga" coeficiente (es decir, que su coeficiente sea *1*), ya que, en ese caso, podremos evitar el cálculo con fracciones.

Hemos mencionado, en los párrafos anteriores, que, de manera simultánea, podemos ir haciendo la discusión del sistema, ¿Cómo? Pues bien, si en el proceso de sustituir la incógnita despejada en el primer paso en la otra ecuación e intentar resolverla nos quedase una expresión del tipo "*0 = 0*", o "$K = K$", siendo K un número cualquiera (por ejemplo, *4 = 4*), tendremos que el sistema es *compatible indeterminado* y tiene **infinitas** soluciones. Esto se debe a que, en ese caso, una de las ecuaciones es múltiplo de la otra y el sistema quedaría reducido a una sola ecuación, con lo que habría infinitos pares de números *(x, y)* que la cumplirían.

Por ejemplo $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x=8-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ 2x=8-2(4-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ 2x-2x=8-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ 0x=0 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones; y la solución se expresa de la siguiente manera: $S=\{(x;y)/\, y=4-x\}$. Este sistema es CI

Por otro lado, si la ecuación que nos resultase en el proceso anteriormente explicado fuera de la forma "K = *0*", siendo K cualquier número distinto de *0*, tendremos que el sistema es *incompatible* por lo que, en ese caso, **no tiene solución**. Esto es claro por la imposibilidad de la expresión aparecida. No habría, por tanto, ningún par de números *(x, y)* que cumplieran ambas ecuaciones del sistema.

Por ejemplo $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x=6-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ 2x=6-2(4-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ 2x-2x=6-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ 0x=-2 \end{cases}$ no tiene solución, o sea $S=\{\ \}$.

Por último, si no nos encontramos, al resolver el sistema, ninguna de los tipos antes descritos de ecuaciones y llegamos, al final de su resolución, a un valor para la incógnita x y a otro para la y, estos dos valores formarán el par *(x, y)* que nos da la solución del sistema y éste tendrá, por tanto una **única solución** y será un sistema *compatible determinado*.

Ejemplo de resolución de un sistema mediante el método de sustitución:

Entre Amalia y Sebastián tienen $600, pero Sebastián tiene el doble de pesos que Amalia. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Llamemos x al número de pesos de Amalia e y al de Sebastián. Vamos a expresar las condiciones del problema mediante ecuaciones: Si los dos tienen $600, esto nos proporciona la ecuación $x + y = 600$. Si Sebastián tiene el doble de pesos que Amalia, tendremos que $y = 2x$.

Ambas ecuaciones forman el siguiente sistema: $\begin{cases} x+y=60 \\ y=2x \end{cases}$

Vamos a resolver el sistema por el método de sustitución, ya que en la 2ª ecuación hay una incógnita, la y, ya despejada. Sustituimos el valor de $y = 2x$ en la primera ecuación, con lo que tendremos: $x + 2x = 600 \Rightarrow 3x = 600 \Rightarrow x = 600/3 \Rightarrow x = 200$

Ahora sustituimos $x = 200$ en la ecuación en la que estaba despejada la y, con lo que tendremos: $y = 2x \Rightarrow y = 400$

Por tanto, la solución al problema planteado es que Amalia tiene $**200** y Sebastián tiene $**400**.

<u>Método de Igualación:</u> Para resolver un sistema de ecuaciones por este método hay que despejar una incógnita, la misma, en las dos ecuaciones e igualar el resultado de ambos despejes, con lo que obtenemos una ecuación de primer grado. Los pasos son las siguientes:

- Despejamos la misma incógnita en ambas ecuaciones del sistema.
- Igualamos las expresiones obtenidas y resolvemos la nueva ecuación lineal con una incógnita que resulta.
- Calculamos el valor de la otra incógnita y sustituimos la ya hallada en una de las ecuaciones despejadas de primer paso.

A continuación, resolveremos el mismo ejercicio de la sección anterior mediante el método de igualación, que es el siguiente:

Entre Amalia y Sebastián tienen $600, pero Sebastián tiene el doble de pesos que Amalia. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Y el sistema es el siguiente: $\begin{cases} x+y=600 \\ y=2x \end{cases}$ Vamos a resolver el sistema por el método de igualación y ya que en la 2ª ecuación hay una incógnita, la y, despejada, vamos a despejar la misma incógnita en la otra ecuación, con lo que tendremos: $y = 2x$ y además despejamos la misma variable de la 1° ecuación $y = 600 - x \Rightarrow$ Igualamos y obtenemos que: $2x = 600 - x \Rightarrow 2x + x = 600 \Rightarrow 3x = 600 \Rightarrow x = 600/3 = 200$

Ahora sustituimos $x = 200$ en una de las ecuaciones en las que estaba despejada la y, con lo que tendremos: $y = 2x \Rightarrow y = 400$.

Por tanto, la solución al problema planteado es que Amalia tiene $**200** y Sebastián tiene $**400**, es decir, el mismo resultado.

Método de Reducción: Consiste en multiplicar una o ambas ecuaciones por algún(os) número(s) de forma que obtengamos un sistema equivalente al inicial en el que los coeficientes de la x o los de la y sean iguales pero con signo contrario. A continuación sumamos las ecuaciones del sistema para obtener una sola ecuación de primer grado con una incógnita. Una vez resuelta esta, hay dos opciones para hallar la otra incógnita: una consiste en volver a aplicar el mismo método (sería la opción más pura de *reducción*); la otra es sustituir la incógnita hallada en una de las ecuaciones del sistema y despejar la otra. Veamos los pasos a seguir:

- Multiplicamos las ecuaciones por los números apropiados para que, en una de las incógnitas, los coeficientes queden iguales, pero de signo contrario, en ambas ecuaciones.
- Sumamos ambas ecuaciones del nuevo sistema, equivalente al anterior.
- Resolvemos la ecuación lineal con una incógnita que resulta. Para este paso hay dos opciones:
  a. Repetimos el proceso con la otra incógnita.
  b. Sustituimos la incógnita ya hallada en una de las ecuaciones del sistema y despejamos la otra.

Ve [illegible] e *reducción*:

Entre Amalia y Sebastián tienen $600, pero Sebastián tiene el doble de pesos que Amalia. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Y el sistema es el siguiente: $\begin{cases} x + y = 600 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 600 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

Vamos a resolver el sistema por el método de reducción. Para ello, teniendo en cuenta que, en ambas ecuaciones, la y tiene coeficientes opuestos, podemos pasar a sumar directamente ambas y nos quedará:

$$\begin{array}{r} \boldsymbol{x + y = 600} \\ \underline{\boldsymbol{2x - y = 0}} \\ \boldsymbol{3x = 600 \Rightarrow x = 200} \end{array}$$

A partir de este momento es cuando podemos aplicar cualquiera de las dos posibilidades descritas más arriba. Vamos a terminar el ejercicio con la forma más pura posible de aplicación del método de reducción. Para ello, vamos a volver a aplicar el método para hallar el valor de la incógnita *y,* sin tener que recurrir a ninguna sustitución.

Multiplicamos la primera ecuación por *-2* y obtendremos el siguiente sistema, equivalente al inicial:

$$\begin{array}{r} -2x - 2y = -1200 \\ 2x - y = 0 \end{array}$$

Si sumamos ambas ecuaciones de este sistema tendremos: ***-3y=-1200 ⇒ y=1200/3⇒ y = 400***

Por tanto, la solución al problema planteado es que Amalia tiene $**200** y Sebastián tiene $**400**, es decir, el mismo resultado, evidentemente, que habíamos obtenido con los métodos de sustitución e igualación.

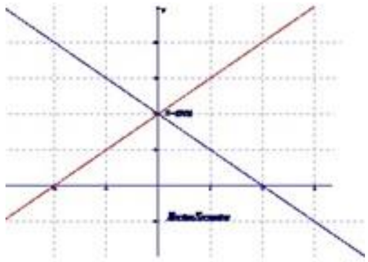
Método Gráfico de Resolución

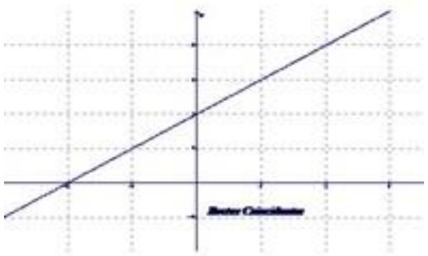
Cada una de las ecuaciones que forman un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas es la de una función de primer grado, es decir, una recta.

El *método gráfico* para resolver este tipo de sistemas consiste, por tanto, en representar en unos ejes cartesianos, o sistema de coordenadas, ambas rectas y comprobar si se cortan y, si es así, dónde. Esta última afirmación contiene la filosofía del proceso de *discusión* de un sistema por el método gráfico.

Hay que tener en cuenta, que, en el plano, dos rectas sólo pueden tener tres posiciones relativas (entre sí): se cortan en un punto, son paralelas o son coincidentes (la misma recta).

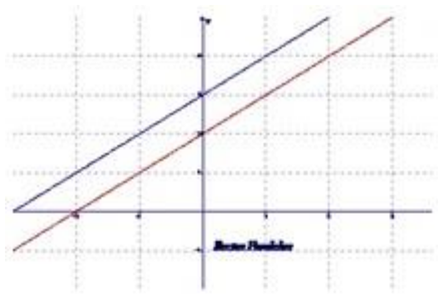
Si las dos rectas se cortan en un punto, las coordenadas de éste son el par *(x, y)* que conforman la única solución del sistema, ya que son los únicos valores de ambas incógnitas que satisfacen las dos ecuaciones del sistema, por lo tanto, el mismo es **compatible determinado (SCD)**.





Si ambas rectas son coincidentes, hay infinitos puntos que pertenecen a ambas, lo cual nos indica que hay infinitas soluciones del sistema (todos los puntos de las rectas), luego éste será **compatible indeterminado (SCI)**.

Si las dos rectas son paralelas, no tienen ningún punto en común, por lo que no hay ningún par de números que representen a un punto que esté en ambas rectas, es decir, que satisfaga las dos ecuaciones del sistema a la vez, por lo que éste será **incompatible (SI)**, o sea sin solución.



El proceso de resolución de un sistema de ecuaciones mediante el *método gráfico* se resume en los siguientes pasos:

- Despejamos la incógnita y en ambas ecuaciones.
- Construimos, para cada una de las dos funciones de primer grado obtenidas, la tabla de valores correspondientes.
- Representamos gráficamente ambas rectas en los ejes coordenados. En este último paso hay tres posibilidades:

  a) Si ambas rectas se cortan, las coordenadas del punto de corte son los únicos valores de las incógnitas x e y. **Sistema compatible determinado (SCD)**.

  b) Si ambas rectas son coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones que son las respectivas coordenadas de todos los puntos de esa recta en la que coinciden ambas. **Sistema compatible indeterminado (SCI)**.

  c) Si ambas rectas son paralelas, el sistema no tiene solución. **Sistema incompatible (SI)**.

V

gráficamente y comprobar que tiene la misma solución, cualquiera sea el método elegido.

Recordemos de nuevo el enunciado:

Entre Amalia y Sebastián tienen $600, pero Sebastián tiene el doble de pesos que Amalia. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

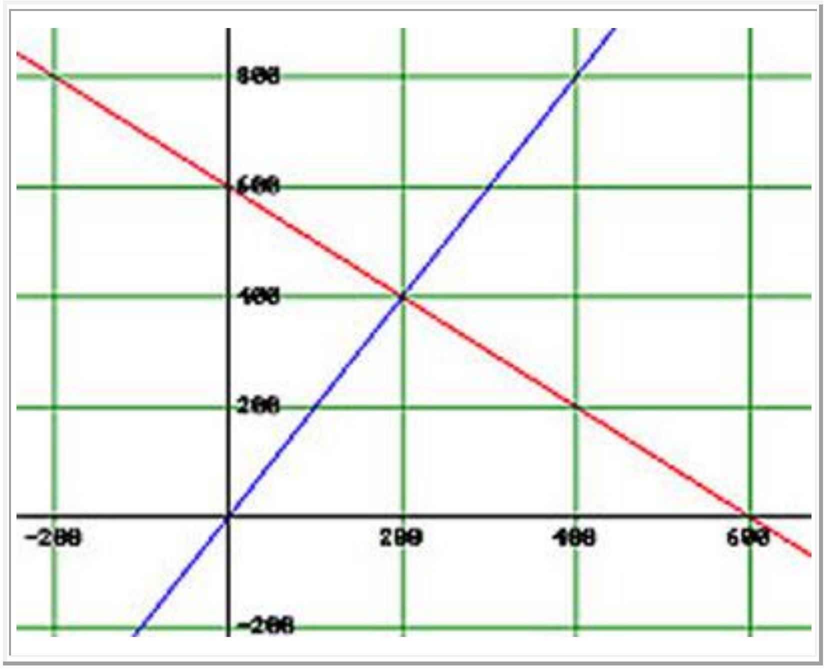
Y el sistema es el siguiente: $\begin{cases} x + y = 600 \\ y = 2x \end{cases}$

Para resolver el sistema por el método gráfico despejamos la incógnita y en ambas ecuaciones y tendremos: $\begin{cases} y = 600 - x \\ y = 2x \end{cases}$

Vamos ahora, para poder representar ambas rectas, a calcular sus tablas de valores:

$y = -x + 600$		$y = 2x$	
x	y	x	y
200	400	1000	200
600	0	200	400

Con estas tablas de valores para las dos rectas y eligiendo las escalas apropiadas en los ejes x e y podemos ya representar gráficamente:



Si observamos la gráfica, vemos claramente que las dos rectas se cortan en el punto *(200, 400)*, luego la solución del sistema es x *= 200* e y *= 400*. Por tanto, la respuesta al problema planteado es que Amalia tiene $**200** y Sebastián tiene $**400**, es decir, el mismo resultado, evidentemente, que habíamos obtenido con los tres métodos analíticos.

Aplicaciones del Punto de Equilibrio

Ejemplo 1: **Hallar el punto de equilibrio de las siguientes ecuaciones de oferta y demanda:**

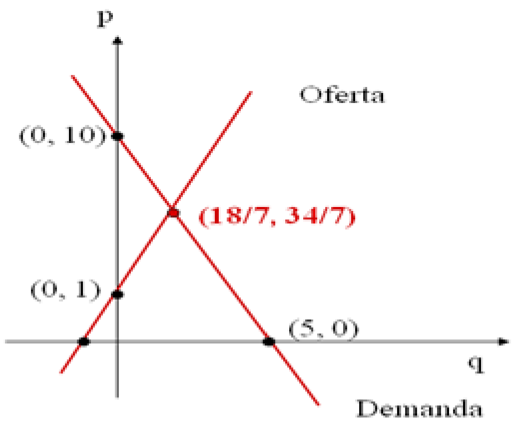
Oferta: p = 3/2 q + 1 Demanda p = 10 - 2q

Solución: Reemplazamos el valor de p en la segunda ecuación y obtenemos 3/2 q + 1 = 10 -2q

Despejamos el valor de q: q = 18/7

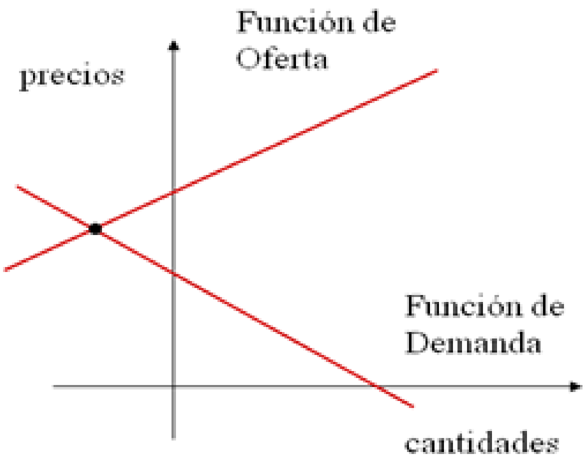
Reemplazamos en la primera ecuación y así obtenemos el valor de p: p = 34/7

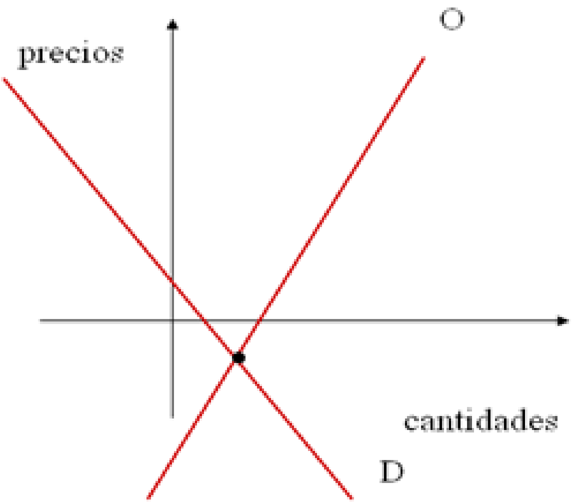
Por lo tanto el punto de equilibrio ocurre cuando el precio es 34/7 y la cantidad es 18/7



En general, para que un equilibrio tenga sentido, los valores de q y de y p han de ser positivos o cero, es decir que las curvas de oferta y demanda se han de intersectar en el primer cuadrante.

Ejemplos de puntos de equilibrio que no tienen sentido práctica son los siguientes:





Si bien estos puntos pueden determinarse matemáticamente, no tienen sentido en el contexto de equilibrio de mercado

Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

La *resolución de problemas* en general, y mediante sistemas de ecuaciones en este caso particular, es un proceso complejo para el que, desgraciada o afortunadamente (según se mire), no hay reglas fijas ni resultados teóricos que garanticen un buen fin en todas las ocasiones.

De todas formas, si hay algo que ayuda en cualquier caso a llevar a buen puerto la resolución de un problema es el orden. Por ello, hay que ser metódico y habituarse a proceder de un modo ordenado siguiendo unas cuantas fases en el desarrollo de dicha resolución.

Las cuatro fases que habrá que seguir para resolver un problema son:

- *Comprender el problema.*
- *Plantear el problema.*
- *Resolver el problema* (en este caso, el sistema).
- *Comprobar la solución.*

Todo ello quizás quede más claro si observamos el siguiente cuadro donde detallamos, una a una, las cuatro fases de este proceso:

1. Comprender el problema. • Leer detenidamente el enunciado. • Hacer un gráfico o un esquema que refleje las condiciones del problema. • Identificar los datos conocidos y las incógnitas.	**2. Plantear el problema.** • Pensar en las condiciones del problema y concebir un plan de acción, • Elegir las operaciones y anotar el orden en que debes realizarlas. • Expresar las condiciones del problema mediante ecuaciones.
3. Resolver el problema. • Resolver las operaciones en el orden establecido. • Resolver las ecuaciones o sistemas resultantes de la fase 2. • Asegurarse de realizar correctamente las operaciones, las ecuaciones y los sistemas.	**4. Comprobar la solución.** • Comprobar si hay más de una solución. • Comprobar que la solución obtenida verifica la ecuación o el sistema. • Comprobar que las soluciones son acordes con el enunciado y que se cumplen las condiciones de éste.

Veamos ahora con un ejemplo práctico el desarrollo de estas cuatro fases de la resolución de un problema mediante el uso de sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Ejemplo: *En un examen de 20 preguntas la nota de Juan ha sido un 8. Si cada acierto vale un punto y cada error resta dos puntos, ¿cuántas preguntas ha acertado Juan?, ¿cuántas ha fallado?*

Pasemos de inmediato a la **primera fase**. Una vez leído detenidamente el enunciado del problema y entendido éste, hay que tener claro qué es lo que se pregunta y cómo vamos a llamar a las incógnitas que vamos a manejar en la resolución del problema.

Está claro que las preguntas que hay que contestar son las del final del enunciado, es decir, cuántas preguntas ha fallado y cuántas ha acertado Juan. Llamemos entonces x al número de respuestas acertadas e y al de falladas.

En la **segunda fase**, hay que efectuar el planteamiento del problema. Atendiendo a las condiciones que nos propone el enunciado y a cómo hemos nombrado las incógnitas, tendremos las siguientes ecuaciones:

El número total de preguntas es 20, luego: $x + y$ ***= 20***

La nota es un 8 y cada fallo resta dos puntos: $x - 2y$ ***= 8***

Ya tenemos el sistema planteado $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$, por tanto, pasamos a la **tercera fase**, es decir, la resolución del sistema. Para ello, podemos utilizar cualquiera de los métodos vistos anteriormente. Si aplicamos, por ejemplo, el método de sustitución tendremos:

De la segunda ecuación: $x = 2y + 8$; sustituyendo en la primera: $2y + 8 + y = 20 \Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = 12/3 \Rightarrow y = 4$; sustituyendo en la ecuación del principio: $x = 16$.

Una vez halladas las soluciones del sistema, las traducimos a las condiciones del problema, es decir, tal y como habíamos nombrado las incógnitas, Juan ha acertado **16** preguntas y ha fallado **4**. Podemos pasar pues a la **cuarta fase** que consiste en comprobar si la solución es correcta.

Si ha acertado **16** preguntas, Juan tendría en principio **16 puntos**, pero, al haber fallado **4**, le restarán el doble de puntos, es decir **8**. Por tanto, ***16 - 8 = 8*** que es la nota que, según el enunciado del problema, ha obtenido. Luego se cumplen las condiciones del problema y la solución hallada es correcta y válida.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 6

1) Para los siguientes pares de puntos, encuentra la ecuación de la recta y represéntala gráficamente:

A = (2; 2) y B = (-3; -3) C = (-1; 4) y D = (3; 4)

E = (1; 3) y F = (0; 0) G = (-2; 3) y H = (1; -4)

¿En qué valor corta al eje de las y? ¿Qué relación existe entre dicho valor y la ordenada al origen?

2) Dada la ecuación $y = -\frac{1}{5}x + 3$

a) Indica la pendiente y la ordenada al origen

b) Escribe tres pares ordenados que pertenezcan y otros tres que no pertenezcan al gráfico

c) Representa gráficamente en tu carpeta y verifica, usando algún graficador de tu celular.

3) Determina la ecuación explícita, implícita y la canónica de la recta que cumple con lo siguiente, en cada caso y represéntala gráficamente:

a) Pasa por el punto (-2, 3) y tiene ordenada al origen -1

b) Pasa por el origen de coordenadas y tiene pendiente 3

c) Pasa por el punto (-1, -4) y tiene pendiente -2

d) Tiene por cero $x = -2$ y la ordenada al origen es 3

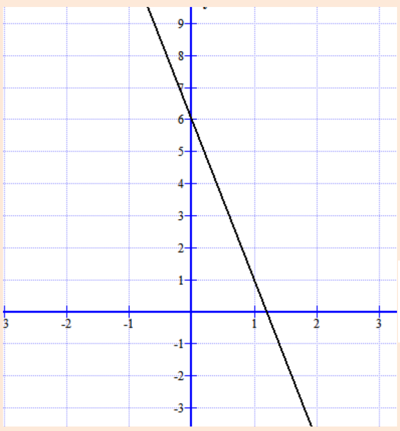
e) Pasa por los puntos (-1, -3) y (1 , 3)

f) Pasa por los puntos (2, 0) y es perpendicular a la recta $y = -\frac{1}{3}x + 2$

g) Pasa por el punto (2, -1) y es paralela a la recta y =2x + 3

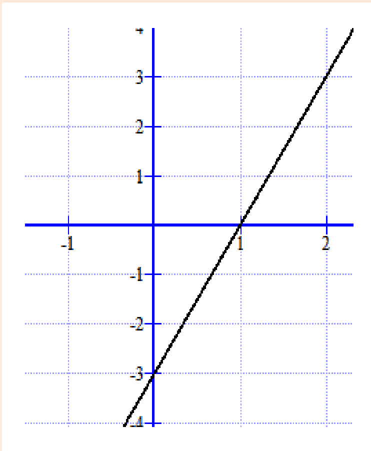
4) Escribe la ecuación implícita, explícita y canónica de la recta que corresponde a cada gráfico, indica cuál es la pendiente y la ordenada al origen.

a) y



x

b) y



x

5) Encuentra la ecuación pedida para los siguientes casos:

a) Suponga que los clientes demandarán 40 unidades de un producto cuando el precio es de \$12.75 por unidad, y 25 unidades cuando el precio es de \$18.75 cada una. Encuentre la ecuación de la demanda, suponga que es lineal. Determine el precio unitario cuando se demandan 37 unidades.

b) La demanda semanal para un CD es de 26000 unidades cuando el precio es \$12 cada una, y de 10000 cuando el precio unitario es de \$18. Encuentre una ecuación de demanda para el CD, suponga que es lineal.

c) El costo diario promedio, *C*, de un cuarto en un hospital de la ciudad se elevó \$59,82 por año, durante la década de 1990 a 2000. Si el costo promedio en 1996 fue \$1128,50, ¿cuál es una ecuación que describe el costo promedio durante esta década como una función del número de años T, desde 1990?

d) Un fabricante de refrigeradores producirá 3000 unidades cuando el precio sea de \$940 y 2200 unidades cuando el precio sea \$740. Suponga que el precio *p*, y la cantidad producida *q*, están relacionadas de manera lineal Encuentre la ecuación de oferta.

6) Determina analítica y gráficamente la posición de los siguientes pares de rectas en el plano. Verifica mediante el graficador, las posiciones de dichas rectas, comparando con su trabajo:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x - 3y - 3 = 0 \\ y = -\frac{3}{2}x + 2 \end{cases}$

7) Determina si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos y justifica, en cualquier caso:

a) La recta $\frac{x}{-\frac{6}{5}} + \frac{y}{3} = 1$ representa una recta paralela a la siguiente $-\frac{5}{2}x + y = 4$

b) La ordenada al origen de la recta representada por la ecuación $y + 2 = \frac{4}{3}x - 1$ es -1

c) La recta $-2y = \frac{2}{3}x + 1$ tiene como ordenada al origen a 1.

7) ¿De cuáles de estos sistemas es solución el par ordenado (1;-3)?

$\begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=-4 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+y=6 \\ x-y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-y=5 \\ 3x-2y=9 \end{cases}$

8) Completa los siguientes enunciados de manera que resulten verdaderos.

a) Si un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas no tiene solución, entonces la representación gráfica que le corresponde es ____________________________________

y el sistema recibe el nombre de ____

b) Si un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene infinitas soluciones, entonces la representación gráfica que le corresponde es ___________________________

y recibe el nombre de ____

c) Si un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es compatible determinado, entonces la representación gráfica que le corresponde es ____________________________

y recibe el nombre de ____

9) Completa los sistemas para que la solución de todos ellos sea $S=\{(2;-1)\}$

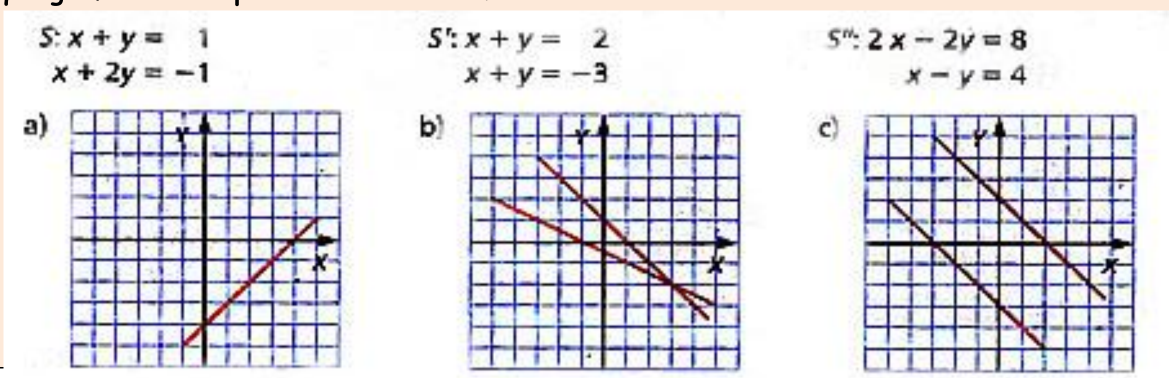
$\begin{cases} x+2y=\ldots \\ x-y=\ldots \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-y=\ldots \\ 3x-y=\ldots \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+y=\ldots \\ -2x-3y=\ldots \end{cases}$ $\begin{cases} -x-y=\ldots \\ 2x+y=\ldots \end{cases}$

10) Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas. Clasifícalos y verifica con tu celular, usando el graficador ALGEO.

$\begin{cases} 3x-2y-2=0 \\ \dfrac{x+y}{5}=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=-2 \\ -x-y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-y=1 \\ -4x+1y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 4x+6y=8 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x-2y=-1 \\ 10x-4y=-4 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-2y=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{4-5y}{3} \\ x=\dfrac{8y+2}{-6} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{2y-1}{3} \\ 6x+4y=3y \end{cases}$

11) Los gráficos a), b) y c) son la representación gráfica de los sistemas S, S' y S''. Indica qué gráfico corresponde a cada sistema:



12) Completa el sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$ para que en cada caso cumpla la siguiente condición:

a) Tenga solución única $S = \{(3;2)\}$

b) sea incompatible y **c)** sea compatible indeterminado

13) Interpreta y resuelve los siguientes problemas:

a) Cristina tiene un libro más que el doble de los que tiene Antonio. Si Cristina tiene 59 libros, ¿cuántos tiene Antonio?

b) El número de alumnos de la clase de Introducción a las Ciencias Económicas es la cuarta parte de los de la clase de Matemática. Entre ambas clases suman 150 estudiantes. ¿Cuántos asisten a Matemática?

c) Dentro de dos años, la edad de Juan será igual a la cuarta parte de la edad de su padre Tomás. Si, en cambio, trascurren 10 años, entonces Tomás tendrá el quíntuplo de la mitad de la edad de su hijo. ¿Cuántos años tenían Tomás y Juan hace 3 años?

d) Hay tres números tales que el segundo es el doble del primero y el tercero es uno menos que el triple del primero. Si la suma de los tres números es 35, hallar el número mayor.

e) La suma de las dos cifras de un número es 15. Si se invierten las cifras, se obtienen otro número que resulta ser 9 unidades mayores que el primero. ¿Cuál es el número?

f) Un lado de un lote triangular tiene una longitud igual al triple del segundo menos 13 m. El tercer lado mide 18 m más que el segundo. Para cercar el lote se necesitan 130 m de cerca. Hallar la longitud de cada lado.

g) Durante su inauguración, una tienda distribuyó 1000 recuerdos de dos clases. Unos costaban $ 2 y los otros $ 2,50. Si se gastó $ 2200 en los recuerdos, ¿cuántos se obsequiaron de cada clase?

h) Melisa y Carmela ahorraron $8600. la suma de la cuarta parte de lo ahorrado por Melisa y la mitad de loa horrado por Carmela es inferior en $550 a la cifra que ahorró Carmela ¿Cuánto ahorró Melisa?

i) Una familia sale de veraneo en auto con destino a las sierras cordobesas. Durante la estadía realiza diversos paseos; esos paseos les hicieron recorrer la mitad de los km que habían recorrido durante el viaje de ida. La vuelta es 105 km más larga que la ida porque deciden visitar un dique. Al regresar el cuenta kilómetros indica un recorrido total de 2580 km ¿Cuántos km recorrieron durante el viaje de ida?

j) La suma de los dos capitales que los hermanos tienen depositados es de $85000. Uno de ellos les reportan un interés del 15% anual y el otro un interés de 6% anual. La suma de los interese en un año es de 480$ ¿A cuánto asciende cada capital? (se supone interés simple)

k) Determinar la cantidad de dinero que tiene Luís y José, sabiendo que: si Luís da $20 a José, éste tendrá el doble de lo que le queda a Luís; si José da $20 a Luís, éste tendrá el triple de lo que le queda a José.

l) En una fiesta hay 49 personas. Por cada dos señoras hay un señor, y por cada señor hay cuatro niños. ¿Cuántas señoras, cuántos señores y cuántos niños hay en la fiesta?

m) En un Club, hay 300 socios. La cantidad de mujeres asociadas es 7/5 de la cantidad de varones. ¿Cuántas socias y cuántos socios hay en el club?

Y ahora? Me detengo a reflexionar!!

Marcar con una x en la columna que corresponda según los aprendizajes que consideres logrados, o que está en proceso o bien donde debes volver a intentar. Si la mayoría de las cruces están en la segunda y tercera columna, revisa tus conocimientos y vuelve a estudiar los mismos.

Metacognición	Lo Logré	Está en proceso	Debo volver a intentar
Conozco las coordenadas de un par ordenado			
Represento gráficamente la ecuación de una recta			
Identifico pendiente y ordenada al origen			
Escribo en sus distintas representaciones, la ecuación de una recta			
Reconozco cuando dos rectas son paralelas			
Reconozco cuando dos rectas son perpendiculares			
Resuelvo analíticamente un sistema de ecuaciones			
Escribo correctamente en forma simbólica, el enunciado de un sistema de ecuaciones			

$\frac{3}{4}$ $mx + b\sqrt{16}$ % $ # {}¿ ? % & $\frac{1}{2}$ $2x + 6 = 23$ ∪ ∅∃∈

$m \neq \pm\infty \sim \div < 876 \div \sqrt[4]{x} + 1\% + -7549879 \approx$

∀∂~! ∞20% $\frac{5}{8}$, 2345 ≠67%(2x+3).¼ bx + c = 0

854897651234567891008876433 ¾ 100%

U + - (-3) 768599864329990987652 33&6%

(-3+1/2)= 78659678590845325567%a+p =

$(-4)^3$ ¿? % 665478 90%45$53789078 $\sqrt[4]{x}$ m:,

m<0, x/45¡/{hgm78gl2x+4567x+9980’¿?/7

5&%~? ½ 56790><bmx+3=23, 56rrm78/$3

#g45,234*+-45(+6):% $\sqrt{16}$ $\sqrt{10}$ %45 45 $2x^3$

¾ 45%~! ∞20% $\frac{5}{8}$ ∪ ∅∃ 8 = 3x – 2 %~! ∞2 >≠

$\sqrt{2} \neq \sqrt{12}$, m<0, x/45¡/{hgm78gl2x} (-3/4):

5&%~? ½ 56790><b mx+3=23, 56rm78/$3

(-3+1/2)= 78 $(x-a)^2$ <10 m 25567%a + p =1

% $ # {−4} ¿ ? %& $\frac{1}{2}$ $2x + 6 = 23$ z + 3i =-23; 2i

¾ 45%~! ∞20% $\frac{5}{8}$ ∪ ∅∃ 8 = 3x – 2 %~! ∞2 >≠

():% $\sqrt{16}$ $\sqrt{10}$ %45 45 $2x^3$ 5&%~? ½ $\sqrt{2} \neq \sqrt{12}$

∀∂~! ∞20% $\frac{5}{8}$, 2345 ≠5#g +6):%

$\sqrt{16}$ $\sqrt{10}$ %45 45 $2x^3\sqrt{2}$,2/3,!

∀ ∪∩x/45¡/{hgm78gl2x} (-3/4): m<0, ±≠

÷x/45¡/{hgm78gl2x+4567x+9980’¿?/7

≠×≤≥ ∓∀∈ ∃∄∛∜αβγπμ ⇔⇏⟹ ∑∏ ⊂⊆⊥=

ISBN 978-987-778-947-8

9 789877 789478