La Teoría de Juegos: una Herramienta Matemática para las Ciencias Sociales

Ignacio García Jurado
Universidad de La Coruña

Esquema

- Introducción a la teoría de juegos
- El equilibrio de Nash
- Ejemplos y aplicaciones del equilibrio de Nash

Introducción a la teoría de juegos

La Teoría de Juegos es la teoría matemática de las situaciones conflictivas.

En una situación conflictiva:

- Varios agentes toman decisiones.
- En función de las decisiones de todos se produce un resultado.
- Cada agente tiene sus propias preferencias sobre el conjunto de posibles resultados.

Teorías de la Decisión

	Un Objetivo	Varios Objetivos
Un Decisor	Teoría de la Decisión Unipersonal	Teoría de la Decisión Multiobjetivo
Varios Decisores	Teoría Cooperativa de Juegos	Teoría No Cooperativa de Juegos

Modelos cooperativos y no cooperativos

- **Los modelos cooperativos son aquéllos que asumen que los jugadores disponen de mecanismos que les permiten tomar acuerdos vinculantes.**
- **Los modelos NO cooperativos son aquéllos que asumen que los jugadores NO disponen de mecanismos que les permiten tomar acuerdos vinculantes.**

El Dilema del Prisionero

	Delatar	No Delatar
Delatar	-10 -10	0 -15
No Delatar	-15 0	-1 -1

Contents of Volume I

Contents of Volume II

Contents of Volume III

“Handbook of Game Theory”. R. Aumann and S. Hart (eds.). Elsevier. 1992/1994/2002

Algunos hitos en la historia de la teoría de juegos

- Antecedentes: Cournot, Zermelo, Borel.
- 1928. John von Neumann demuestra el teorema minimax.

John von Neumann

Nacido el 28 de Diciembre de 1903 en Budapest, Hungría.

Fallecido el 8 de Febrero de 1957 en Washington DC, Estados Unidos.

Algunos hitos en la historia de la teoría de juegos

- Antecedentes: Cournot, Zermelo, Borel.
- 1928. John von Neumann demuestra el teorema minimax.
- 1944. “Theory of Games and Economic Behavior”. John von Neumann y Oskar Morgenstern.

"...it is apparent from the evidence presented above that all the technical aspects of the theory may be credited to von Neumann."

"Morgenstern's role was crucial. (…) He focused the latter (von Neumann) attention, he acted as a spark."

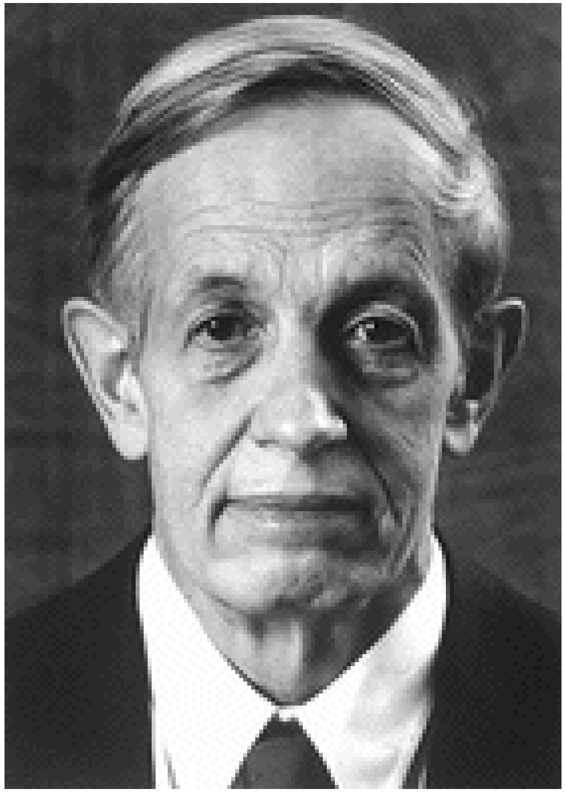
Leonard RJ (1995) From Parlor Games to Social Science: von Neumann, Morgenstern and the Creation of Game Theory. Journal of Economic Literature 33, 730-761.

Algunos hitos en la historia de la teoría de juegos

- Antecedentes: Cournot, Zermelo, Borel.
- 1928. John von Neumann demuestra el teorema minimax.
- 1944. “Theory of Games and Economic Behavior”. John von Neumann y Oskar Morgenstern.
- 1950. Nash publica su primer artículo sobre el equilibrio.

John Nash

Nacido el 13 de junio de 1928 en Bluefield, Estados Unidos.

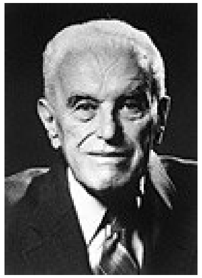


www.nobel.se/economics/laureates

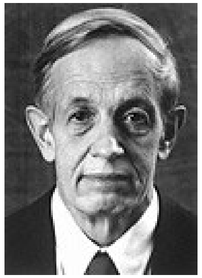
Algunos hitos en la historia de la teoría de juegos

- Antecedentes: Cournot, Zermelo, Borel.
- 1928. John von Neumann demuestra el teorema minimax.
- 1944. “Theory of Games and Economic Behavior”. John von Neumann y Oskar Morgenstern.
- 1950. Nash publica su primer artículo sobre el equilibrio.
- 1971. Aparece el International Journal of Game Theory.
- 1989. Aparece el Games and Economic Behavior.
- 1994. Nobel de Economía para Harsanyi, Nash y Selten.

Los tres galardonados con el Premio Nobel de Economía en 1994



John Harsanyi
(1920-2000)



John Nash
(1928-)

Reinhard Selten
(1930-)

En palabras de la Real Academia Sueca de Ciencias, el motivo de este galardón es que estos tres científicos han realizado "un análisis pionero del equilibrio en la teoría de juegos no cooperativos".

Algunos hitos en la historia de la teoría de juegos

- Antecedentes: Cournot, Zermelo, Borel.
- 1928. John von Neumann demuestra el teorema minimax.
- 1944. “Theory of Games and Economic Behavior”. John von Neumann y Oskar Morgenstern.
- 1950. Nash publica su primer artículo sobre el equilibrio.
- 1971. Aparece el International Journal of Game Theory.
- 1989. Aparece el Games and Economic Behavior.
- 1994. Nobel de Economía para Harsanyi, Nash y Selten.
- 1999. La ISDG crea el International Game Theory Review.
- 2000. First World Conference on Game Theory (IGTS).
- 2005. Nobel de Economía para Aumann y Schelling.

Los dos galardonados con el Premio Nobel de Economía en 2005

Thomas C. Schelling

(1921-)

Robert J. Aumann

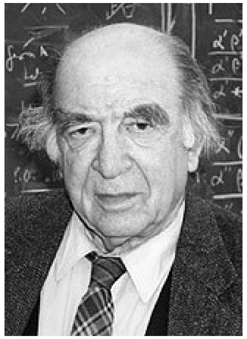
(1930-)

En palabras de la Real Academia Sueca de Ciencias, el motivo de este galardón es que estos dos científicos “han contribuido a mejorar nuestro conocimiento de la competencia y la cooperación, extendiendo y aplicando la teoría de juegos –un método usado para analizar la interacción estratégica entre diferentes agentes–. Su trabajo ha transformado las ciencias sociales traspasando ampliamente las fronteras de la economía. La investigación de Aumann y Schelling ha llevado más lejos el debate científico sobre la formación de instituciones sociales”.

Algunos hitos en la historia de la teoría de juegos

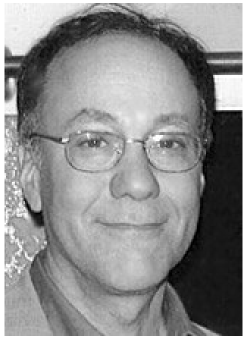
- Antecedentes: Cournot, Zermelo, Borel.
- 1928. John von Neumann demuestra el teorema minimax.
- 1944. "Theory of Games and Economic Behavior". John von Neumann y Oskar Morgenstern.
- 1950. Nash publica su primer artículo sobre el equilibrio.
- 1971. Aparece el International Journal of Game Theory.
- 1989. Aparece el Games and Economic Behavior.
- 1994. Nobel de Economía para Harsanyi, Nash y Selten.
- 1999. La ISDG crea el International Game Theory Review.
- 2000. First World Conference on Game Theory (IGTS).
- 2005. Nobel de Economía para Aumann y Schelling.
- 2007. Nobel de Economía para Hurwicz, Maskin y Myerson.

Los tres galardonados con el Premio Nobel de Economía en 2007



Leonid Hurwicz (1917-)

Eric Maskin (1950-)



Roger Myerson (1951-)

En palabras de la Real Academia Sueca de Ciencias, el motivo de este galardón es que estos tres científicos "han puesto los cimientos de la teoría del diseño de mecanismos".

"Mechanism design theory, initiated by **Leonid Hurwicz** and further developed by **Eric Maskin** and **Roger Myerson**, has greatly enhanced our understanding of the properties of optimal allocation mechanisms, accounting for individuals' incentives and private information. The theory allows us to distinguish situations in which markets work well from those in which they do not. It has helped economists identify efficient trading mechanisms, regulation schemes and voting procedures. Today, mechanism design theory plays a central role in many areas of economics and parts of political science".

El equilibrio de Nash

Juegos en forma estratégica

Un juego en forma estratégica con n jugadores es una $2n$-tupla

$$G = (X_1, \ldots, X_n, H_1, \ldots, H_n)$$

tal que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$,

- X_i es el conjunto de estrategias de i.
- $H_i : X = \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ es la función de pago de i, que asigna a cada $x \in X$ el pago $H_i(x)$ que i obtiene si se juega según x.

El Dilema del Prisionero

	Delatar	No Delatar
Delatar	-10 -10	0 -15
No Delatar	-15 0	-1 -1

El equilibrio de Nash

Un equilibrio de Nash del juego en forma estratégica $G = (X_1, \ldots, X_n, H_1, \ldots, H_n)$ es una combinación de estrategias $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tal que, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$H_i(x) \geq H_i(x_{-i}, x_i') \quad \forall x_i' \in X_i$$

siendo $(x_{-i}, x_i') = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

El Dilema del Prisionero

	Delatar	No Delatar
Delatar	-10 -10	0 -15
No Delatar	-15 0	-1 -1

El equilibrio de Nash

Un equilibrio de Nash del juego en forma estratégica $G = (X_1, \ldots, X_n, H_1, \ldots, H_n)$ es una combinación de estrategias $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tal que, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$H_i(x) \geq H_i(x_{-i}, x_i') \quad \forall x_i' \in X_i$$

siendo $(x_{-i}, x_i') = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

M. Davis (1986). "Introducción a la teoría de juegos". Alianza Editorial.
R. Gibbons (1992). "Un primer curso de teoría de juegos". Antoni Bosch. (www.antonibosch.com).
M.J. Osborne and A. Rubinstein (1994). "A course in game theory". The MIT Press.

“Much of the modern literature in economics (and related disciplines) takes the following form: A social situation is modelled, as a non-cooperative game, the Nash equilibria of the game are computed, and their properties are translated into insights into the original problem.”

H.W. Kuhn, J.C. Harsanyi, R. Selten, J.W. Weibull, E. van Damme, J.F. Nash and P. Hammerstein (1996). “The work of John Nash in game theory”. Journal of Economic Theory 69, 153-185.

“During the past two decades non-cooperative game theory has become a central topic in economic theory. Many scholars have contributed to this revolution, none more than John Nash.”

A. Rubinstein (1995). “John Nash: The master of economic modeling”. Scandinavian Journal of Economics 97, 9-13.

Ejemplos y aplicaciones del equilibrio de Nash

La Batalla de los Sexos

	Cine	Teatro
Cine	4 3	2 2
Teatro	1 1	3 4

J.M. Colomer (1998). “La transición a la democracia”. Anagrama.

EL GOLPE IMAGINARIO

CG	Rey	Pref. CG	Pref. Rey
Golpe	Golpe	4	3
No	No	3	4
Golpe	No	2	2
No	Golpe	1	1

Rey

CG		Golpe	No
	Golpe	4 3	2 2
	No	1 1	3 4

EL GOLPE REAL

CG	Rey	Pref. CG	Pref. Rey
Golpe	Golpe	4	2
No	No	3	4
Golpe	No	2	3
No	Golpe	1	1

Rey

CG		Golpe	No
	Golpe	4 2	2 3
	No	1 1	3 4

	P	I
P	-1 1	1 -1
I	1 -1	-1 1

Matching Pennies

No tiene equilibrios de Nash

	P	I	L
P	-1 1	1 -1	0 0
I	1 -1	-1 1	0 0
L	0 0	0 0	0 0

(L,L) es un equilibrio de Nash

Edgar Allan Poe
“La carta robada”

He conocido un chico, de unos ocho años de edad, cuyos éxitos adivinando en el juego de *pares y nones* atraían la admiración de todo el mundo. Este juego es simple, y se juega con canicas. Uno de los jugadores oculta en su mano una cantidad de esas canicas y pregunta al otro si ese número es par o no. Si el preguntado adivina, gana una; si no, pierde una. El niño del que hablo, ganaba todas las canicas de la escuela. Por consiguiente, tenía algún método para acertar, y éste se basaba en la simple observación y el cálculo de la astucia de sus contrincantes. Por ejemplo, si su contrario es un bobalicón y, levantando la mano cerrada, pregunta «¿son pares o nones? », y nuestro niño replica «nones» y pierde, a la segunda vez gana, porque se dirá a sí mismo «el bobalicón tenía pares la primera vez y su astucia es justamente la suficiente para llevarlo a poner nones en la segunda; por consiguiente, apostaré nones», apostará a nones y ganará. Ahora, con un bobo de un grado menor que el primero, hubiera razonado así: «Este tal, sabe que en el primer caso aposté a nones y en el segundo se le ocurrirá, en el primer impulso, una simple variación de pares a nones, como hizo mi otro contrario; pero entonces un segundo pensamiento le sugerirá que ésta es una variación demasiado simple, y, finalmente, decidirá elegir pares como antes. Por consiguiente, apostaré a pares»; apostará a pares y ganará. Este sistema de razonar en el niño de escuela, a quien sus compañeros llamaban afortunado, ¿qué es, en último término?
—Es simplemente —dije— una identificación del intelecto del razonador con el de su contrario.
—Eso es —dijo Dupin—; y después de preguntar al niño cómo efectuaba esa completa identificación en que residía su éxito, recibí la siguiente respuesta: «Cuando deseo saber cuán sabio o cuán estúpido, o cuán bueno o cuán malo es alguien, o cuáles son sus pensamientos en un determinado instante, acomodo la expresión de mi rostro tan cuidadosamente como me sea posible a la expresión del rostro de él, y entonces espero a ver qué pensamientos o sentimientos nacen en mi mente, y supongo que serán los que se corresponden a tal expresión.»

	P	I
P	-1 1	1 -1
I	1 -1	-1 1

Matching Pennies

No tiene equilibrios de Nash

	P	I	L
P	-1 1	1 -1	0 0
I	1 -1	-1 1	0 0
L	0 0	0 0	0 0

(L,L) es un equilibrio de Nash

Edgar Allan Poe
“La carta robada”

Teorema de Nash

Todo juego finito en forma estratégica en el que los jugadores pueden elegir loterías sobre sus conjuntos de estrategias tiene al menos un equilibrio de Nash.

La Paradoja de la Instigación

LADRÓN (L)

Roba	V Duerme	B
	V No Duerme	-C
No Roba		0

B=Botín

C=Cárcel

	D	ND
R	B -P	-C M
NR	0 S	0 0

VIGILANTE (V)

Duerme	L No Roba	S
	L Roba	-P
No Duerme	L No Roba	0
	L Roba	M

S=Siesta

P=Paro

M=Medalla

El único equilibrio de Nash de este juego es:

(S/(S+P+M),(P+M) /(S+P+M))

(C/(C+B),B/(C+B))

INSTIGACIÓN	CONSECUENCIA
C más grande	L roba lo mismo V duerme más
P, M más grandes	L roba menos V duerme lo mismo

(S/(S+P+M),C/(C+B)) es el único equilibrio de Nash.

El lanzamiento del sistema exafónico

	M	A
M	60 20	20 60
A	70 10	50 30

PEQUEÑO 1/2

	M	A
M	160 40	140 60
A	70 130	130 70

GRANDE 1/2

	M	A
M	110 30	80 60
A	70 70	90 50

((2/5,3/5),(1/5,4/5))

V=86

	MM	MA	AM	AA
M	110 30	110 30	80 60	80 60
A	70 70	90 50	70 70	90 50

	MM	MA	AM	AA
MM	110 30	110 30	80 60	80 60
MA	75 65	95 45	45 95	75 65
AM	115 25	105 35	105 35	95 45
AA	70 70	90 50	70 70	90 50

86	80	95

El modelo de duopolio de Cournot

- Los duopolistas 1 y 2 deben elegir las cantidades que producen de un cierto producto (x_1 y x_2, respectivamente).
- A cada duopolista i le cuesta cx_i producir x_i unidades.
- El precio en el mercado de cada unidad de producto es $a-(x_1+x_2)$ si $x_1+x_2<a$ o cero si $x_1+x_2 \geq a$.
- Se supone que $0<c<a$.

$$\Downarrow$$

$([0,\infty),[0,\infty),H_1,H_2)$

$$H_i(x_1,x_2)=\begin{cases}(a-x_1-x_2)x_i-cx_i & \text{si } x_1+x_2<a\\ -cx_i & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Un equilibrio de Cournot es un par $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\in[0,\infty)\times[0,\infty)$ tal que:

- $H_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\geq H_1(x_1,\bar{x}_2)\ \forall x_1\in[0,\infty)$
- $H_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\geq H_2(\bar{x}_1,x_2)\ \forall x_2\in[0,\infty)$

$$B_1(x_2)=\begin{cases}\frac{a-c-x_2}{2} & \text{si } x_2<a-c\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

$$B_2(x_1)=\begin{cases}\frac{a-c-x_1}{2} & \text{si } x_1<a-c\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

$\bar{x}_1=\bar{x}_2=\frac{a-c}{3}$. $H_i(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=\frac{(a-c)^2}{9}$.

En un monopolio...

$$H(x)=\begin{cases}(a-x)x-cx & \text{si } x<a\\ -cx & \text{en otro caso}\end{cases}$$

$\bar{x}=\frac{a-c}{2}$. $H(\bar{x})=\frac{(a-c)^2}{4}$.

El Modelo de Duopolio de Stackelberg

- El duopolista 1 elige $x_1 \in [0, \infty)$.
- El duopolista 2 observa x_1 y elige $x_2 \in [0, \infty)$
- Las ganancias de i vienen dadas por:

$$H_i(x_1, x_2) = \begin{cases} (a - x_1 - x_2)x_i - cx_i & \text{si } x_1 + x_2 < a \\ -cx_i & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Un equilibrio de Stackelberg es un par $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ tal que:

- $H_1(\bar{x}_1, B_2(\bar{x}_1)) \geq H_1(x_1, B_2(x_1)) \ \forall x_1 \in [0, \infty)$
- $\bar{x}_2 = B_2(\bar{x}_1)$

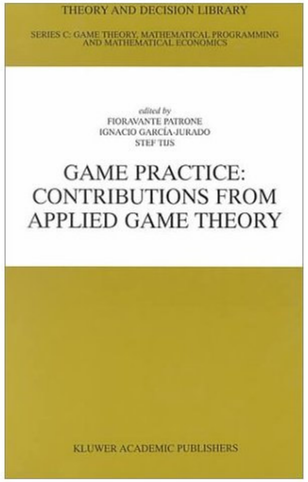
$$B_2(x_1) = \begin{cases} \frac{a-c-x_1}{2} & \text{si } x_1 < a - c \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\bar{x}_1 = \frac{a-c}{2}$. $H_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{(a-c)^2}{8}$. $\bar{x}_2 = \frac{a-c}{4}$. $H_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{(a-c)^2}{16}$.

	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 + \bar{x}_2$	$H_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$	$H_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$	$H_1 + H_2$
MONOPOLIO			$\frac{1}{2}$(a-c)			$\frac{1}{4}$(a-c)^2
COURNOT	$\frac{1}{3}$(a-c)	$\frac{1}{3}$(a-c)	$\frac{2}{3}$(a-c)	$\frac{1}{9}$(a-c)^2	$\frac{1}{9}$(a-c)^2	$\frac{2}{9}$(a-c)^2
STACKELBERG	$\frac{1}{2}$(a-c)	$\frac{1}{4}$(a-c)	$\frac{3}{4}$(a-c)	$\frac{1}{8}$(a-c)^2	$\frac{1}{16}$(a-c)^2	$\frac{3}{16}$(a-c)^2

Al contrario que en el lanzamiento del sistema exafónico, aquí es bueno ser el líder.

R. Gibbons (1992). “Un primer curso de teoría de juegos”. Antoni Bosch. (www.antonibosch.com).



F. Patrone, I. García-Jurado and S. Tijs (2000). "Game Practice: Contributions from Applied Game Theory". Kluwer Academic Publishers.

1. *Some Tips Concerning Application of Game Theory to Real Problems*
Michael Maschler

2. *Game Theory as a Tool for Market Design*
Alvin E. Roth

3. *On the Exploitation of Casino Games: How to Distinguish Between Games of Chance and Games of Skill?*
Peter Borm and Ben van der Genutgen

4. *Agreement Through Threats: The Northern Ireland Case*
Steven J. Brams and Jeffrey M. Togman

5. *The Dutch DCS-1800 Auction*
Eric van Damme

6. *Bird's Tree Allocations Revisited*
Vincent Feltkamp, Stef Tijs and Shigeo Muto

7. *How to Share Railways Infrastructure Costs?*
Vito Fragnelli, Ignacio García-Jurado, Henk Norde, Fioravante Patrone and Stef Tijs

8. *Why punish? Norms and Revenge in an Experimental Game*
Uri Gneezy and Avraham Stoler

9. *A Game-Theoretical Purspective for the Detection of Tacit Collusion*
Michele Grillo

10. *Structural Estimation of Auction Models*
Han Hong and Matthew Shum

11. *A Multiplicative Variant of the Shapley Value for Factorizing the Risk of Disease*
Matthias Land and Olaf Gefeller

12. *Experiments on Aucti□ns with Random Prizes and EU/non-EU Bidders*
Lucia Parisio

13. *Dynamic Games and Oligopoly Models of Technological Innovation*
Maria Luisa Petit and Boleslaw Tolwinski

14. *The Structure of Fair-Division Problems and the Design of Fair-Negotiation Procedures*
Matthias G. Raith

15. *Effectivity Functions and Parliamentary Governance Structures*
Stefano Vannucci

16. *Sequential Production Situations and Potentials*
Mark Voorneveld, Stef Tijs and Lina Mallozzi

17. *Approximate Envy-Free Procedures*
Dao-Zhi Zeng

La Teoría de Juegos: una Herramienta Matemática para las Ciencias Sociales

Ignacio García Jurado

Universidad de La Coruña