Teoría de juegos

Ejercicios: segunda parte

1. El juego estático

	I	C	D
A	3,1	0,0	5,0
M	2,1	1,2	3,1
B	1,2	0,1	4,4

se juega dos veces, observándose el resultado de la primera etapa antes de que empiece la segunda. ¿Puede alcanzarse en la primera etapa la ganancia (4,4) en un equilibrio perfecto en subjuegos con estrategias puras? En caso afirmativo, especifique las estrategias que lo permiten. En caso negativo, demuestre por qué no.

2. Considere el siguiente juego estático

	I	C	D
A	4,2	2,1	0,0
M	1,2	3,3	1,6
B	0,0	6,1	2,4

   (a) Si el juego se juega dos veces, conociéndose antes de comenzar la segunda etapa el resultado de la primera, ¿es posible lograr que, en equilibrio perfecto en subjuegos, se juegue (M,C) en la primera etapa?

   (b) Si el juego se juega tres veces ¿es posible lograr que, en equilibrio perfecto en subjuegos, se juegue (M,C) en la primera etapa?

3. Dos jugadores participan en una subasta de primer precio a sobre cerrado por un objeto (es decir que cada jugador ofrece un precio por lo que se vende, gana quien hace la oferta más alta y paga un precio igual al que ofreció). Cada jugador valúa el objeto que se vende en 2. Note que cada jugador conoce su propia valuación y la de su rival. Para simplificar, suponga que se pueden hacer ofertas por cuatro valores solamente: 0, $\frac{1}{2}$, 1 y $\frac{3}{2}$. En caso de empate, el objeto se asigna a cada jugador con probabilidad $\frac{1}{2}$.

   (a) ¿Cuáles son los equilibrios en estrategias puras de este juego?

   (b) Suponga ahora que los mismos jugadores se enfrentan varias veces, y que al finalizar cada subasta los dos jugadores ven el resultado y el monto que paga el ganador. Entonces, saben perfectamente qué hizo su rival. El objeto subastado vale 2 para cada jugador en cada subasta.

i. Si los jugadores se enfrentan dos veces, ¿es posible que, en equilibrio, en la primera subasta los dos jugadores ofrezcan cero?
ii. ¿Es posible que, en equilibrio, ambos jugadores ofrezcan cero la primera vez que se enfrentan si participan de tres subastas sucesivas?

4. Dado el siguiente juego estático:

	a	m	b
A	-2,-3	1/2,-1/2	2,0
M	-1/2,1/2	1/2,1/2	1,-2
B	0,2	-2,1	1,1

(a) Suponga ahora que el juego estático se repite solamente **dos** veces sin descuento. ¿Existe algún equilibrio perfecto en subjuegos en el que se juega (B, b) en la primera etapa? Si es así, dé un ejemplo. Si no, indique por qué no existe.

(b) Suponga ahora que el juego estático se repite solamente **tres** veces sin descuento. ¿Existe algún equilibrio perfecto en subjuegos en el que se juega (B, b) en la primera etapa? Si es así, dé un ejemplo. Si no, indique por qué no existe.

5. Dos ejércitos se enfrentan en una guerra de trincheras, al estilo de lo ocurrido durante la Primera Guerra Mundial. El conflicto se ha estancado y las trincheras se hallan en posiciones fijas y enfrentadas. Durante este período de estancamiento, dos divisiones enemigas “se ven las caras” todos los días. Los comandantes de cada división deben decidir, simultáneamente, cómo actuarán con respecto a la división enemiga. Cada día, algunos soldados de cada división abandonan sus trincheras en busca de provisiones. La división enemiga puede dispararles o no hacerlo. Las utilidades de cada comandante son las siguientes. Si las dos divisiones disparan, su pago es cero. Si una de las divisiones dispara y la otra no, el pago es de 2 para el comandante de la división que disparó, y de -2 para el comandante enemigo. Si ninguna de las divisiones dispara, los dos comandantes tienen una utilidad de 1.

(a) i. Suponga que este es el último día en el que las divisiones se enfrentan. Plantee la interacción entre sus comandantes y prediga qué hará cada uno. ¿Es posible que ninguna de las divisiones dispare?
ii. ¿Es posible que ninguna de las divisiones dispare si quedan dos días para que terminen de enfrentarse? ¿Y si quedan tres?

(b) Suponga ahora que ambos comandantes tienen una tercera alternativa: atacar a la división enemiga utilizando su artillería. Si nadie utiliza la artillería, los pagos son los descriptos en (a). Si una división utiliza la artillería, la utilidad de la división rival (independientemente de lo que esa división haga) es -4. La división que utiliza la artillería tiene una utilidad de -1 si su rival dispara, de 0 si su rival no dispara y de -4, por supuesto, si su rival utiliza la artillería

i. Plantee la situación que se daría en el último día del enfrentamiento. ¿Cuáles son los equilibrios? ¿Es posible que ninguna de las divisiones dispare ni utilice la artillería?

ii. ¿Es posible que ninguna de las divisiones dispare ni utilice la artillería si faltan dos días para que termine el enfrentamiento?

6. Considere el siguiente juego estático

	I	C	D
A	4,2	2,1	0,0
M	1,2	3,3	1,6
B	0,0	6,1	2,4

Suponga que el juego se repite infinitas veces y los jugadores tienen un factor de descuento δ. ¿Para qué valores de δ es posible que (M,C) se juegue en un equilibrio perfecto en subjuegos?

7. Recuerde el modelo de duopolio de Bertrand con productos homogéneos visto en clase. Las empresas fijan sus precios simultáneamente. La demanda de mercado es $D(p)$, donde $p = \min\{p_1, p_2\}$. La demanda que corresponde a cada empresa es

$$D_i(p_i, p_j) = \begin{cases} D(p_i) & \text{si } p_i < p_j \\ D(p_i)/2 & \text{si } p_i = p_j \\ 0 & \text{si } p_i > p_j \end{cases}$$

y cada empresa tiene una función de costos dada por $C_i(q_i) = cq_i$. Para simplificar, suponga que $D(p) = \alpha - \beta p$ (siempre que $p < \alpha/\beta$).

(a) ¿Cuál es la elección de precios por parte de las firmas que maximiza su beneficio conjunto? ¿Cómo se compara con el equilibrio de Nash del juego?

(b) Suponga ahora que esta interacción entre las firmas se repite infinitas veces. Demuestre que las empresas pueden utilizar estrategias del gatillo (utilizando el equilibrio de Nash del juego estático como castigo) para mantener el nivel de precios que maximiza su beneficio conjunto en un equilibrio perfecto en subjuegos si y sólo si $\delta \geq 1/2$.

8. Dos socios participan de un proyecto. Simultáneamente, deben elegir un nivel de esfuerzo $e_i \in \{0, 1, 2\}$. Al elegir simultáneamente, no pueden coordinar sus niveles de esfuerzo. Si un socio i elige un nivel de esfuerzo e_i, entonces sufre un costo (medido en dinero) de esfuerzo igual a $\frac{e_i^3}{3}$. Además, una vez dados los niveles de esfuerzo de los dos socios, el proyecto rendirá un retorno monetario de $2e_1e_2$. Es decir que la utilidad de cada agente i está dada por

$$e_1e_2 - \frac{e_i^3}{3}.$$

(a) Suponga primero que esta interacción entre los socios ocurre una única vez. Represente las utilidades de los socios en una matriz. Halle los equilibrios de Nash en estrategias puras del juego.

(b) Suponga ahora que esta interacción entre los socios se repite infinitamente. Los socios computan el valor presente de sus utilidades utilizando un factor de descuento δ. ¿Para qué valores de δ existe un equilibrio perfecto en subjuegos en el que los dos socios eligen un esfuerzo de 2 en cada período?

9. Tome la siguiente versión del dilema del prisionero repetida infinitamente.

	C	NC
C	-5,-5	2,-7
NC	-7,2	0,0

En clase se presentó un equilibrio perfecto en subjuegos, dado por estrategias del disparador, que genera que se juegue (NC,NC) en cada etapa para ciertos valores de δ. Suponga ahora que, en lugar de utilizar estrategias del disparador, se emplean las estrategias en las que cada jugador elige:

"Jugar NC en la primera etapa. En las etapas siguientes, si en la etapa anterior se jugó (C,NC) o (NC,C), entonces jugar C por T etapas. Luego de pasadas las T etapas, volver a jugar NC"

(a) ¿Para qué valores de δ es este perfil de estrategias un equilibrio perfecto en subjuegos si T=1?

(b) ¿Para qué valores de δ es este perfil de estrategias un equilibrio perfecto en subjuegos si T=2?

(c) Compare sus resultados en (a) y en (b) con el resultado expuesto en clase para las estrategias del gatillo. Explique.

10. Considere el siguiente juego estático

	I	C	D
A	1,1	1,1	6,-1
M	1,0	x, x	0,2
B	0,7	0,2	4,4

en el que $x \in (-\infty, +\infty)$.

(a) Si este juego se juega dos veces, ¿para qué valores de x es posible que se juegue (B,D) en la primera etapa del juego repetido?

(b) Si este juego se juega tres veces, ¿para qué valores de x es posible que se juegue (B,D) en la primera etapa del juego repetido? Compare este conjunto de valores con el obtenido en (a) e interprete.

(c) Si este juego se repite infinitas veces y los jugadores tienen factor de descuento δ, ¿para qué valores de δ es posible sostener que se juegue (B,D) en un equilibrio perfecto en subjuegos? ¿Cómo depende su respuesta de x?

(d) Suponga ahora que $x = 4$ y considere la siguiente situación en el marco del juego repetido infinitamente. Luego del primer período, cada cambio en la acción elegida entre un período y otro tiene, para cualquier jugador, un costo de $k > 0$. Por ejemplo, si el jugador 1 elige A en la etapa t y B en la etapa $t+1$, tiene que pagar un costo de $k = 1$; sin embargo, si tanto en la etapa t como en la etapa $t+1$ elige A, no paga costo alguno. El costo k se aplica a cualquier jugador cada vez que cambia la acción elegida. ¿Para qué valores de δ es posible lograr que se juegue (B,D) en un equilibrio perfecto en subjuegos? En términos generales, ¿es más fácil o más difícil lograr la cooperación con $k = 1$ que con $k = 0$?

11. Dado el siguiente juego estático:

	I	C	D
A	0,7	2,5	7,0
M	5,2	3,3	5,2
B	7,0	2,5	4,-1

(a) ¿Es posible lograr que se juegue (M,I) cuando el juego se juega dos veces? ¿Y cuando se juega tres veces?

(b) Si el juego se repite infinitamente, ¿es posible que se generen utilidades medias de 3,5 para los dos jugadores en un equilibrio perfecto en subjuegos?

(c) ¿Para qué valores de δ es posible lograr que en un equilibrio perfecto en subjuegos se juegue (A,C) en las etapas impares y (M,D) en las pares si el juego se repite infinitas veces?

(d) Suponga ahora que el juego se repite infinitamente, con el rol del jugador 2 ocupado siempre por el mismo agente y el rol del jugador 1 ocupado por un agente distinto en cada etapa. ¿Existe algún equilibrio perfecto en subjuegos en el que los jugadores 1 jueguen A en cada etapa? ¿Existe alguno en el que jueguen M en cada etapa? ¿Y B? Considere únicamente estrategias puras.

12. Considere el siguiente juego entre una empresa y un trabajador. El trabajador decide si esforzarse y producir por tanto a un nivel y con un costo por el esfuerzo de c, o no esforzarse, no producir nada y no incurrir en ningún costo. Lo que se produzca es propiedad de la empresa, pero ésta puede compartirlo con el trabajador pagándole un salario como se describe a continuación. Suponga que al principio el trabajador dispone de una oportunidad alternativa con un valor de cero (neto del costo por

esfuerzo) y que no se puede obligar al trabajador a aceptar un salario por debajo de cero. Suponga también $y > c$, de manera que esforzarse es eficiente.

El desarrollo temporal es el siguiente: primero el trabajador escoge un nivel de esfuerzo, a continuación tanto la empresa como el trabajador observan el nivel de producción y finalmente la empresa elige un salario para pagar al trabajador. Suponga que no existe manera de hacer cumplir los contratos salariales: no hay ninguna restricción sobre la elección del salario por parte de la empresa.

(a) Halle el equilibrio perfecto en subjuegos de este juego.

(b) Suponga ahora que el horizonte de este juego es infinito. La firma participa del juego en todos los períodos y enfrenta a una sucesión de trabajadores, cada uno de los cuales participa del juego solamente en un período. Adicionalmente, todos los jugadores conocen la historia del juego al comenzar cada etapa. La empresa tiene un factor de descuento δ. Halle un equilibrio perfecto en subjuegos en el que cada trabajador se esfuerza y produce por tanto a un nivel y. ¿Bajo qué condiciones es un equilibrio?

13. Suponga que el siguiente juego estático con dos jugadores se juega infinitas veces.

	I	C	D
A	3,1	0,0	5,0
M	2,1	1,2	3,1
B	1,2	0,1	4,4

De acuerdo con el teorema "*folk*" visto en clase, ¿qué utilidades medias pueden sostenerse en un equilibrio perfecto en subjuegos si los jugadores son suficientemente pacientes? ¿Es $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ parte del conjunto de utilidades medias factibles? En caso afirmativo, indique brevemente y sin mayores detalles qué estrategias podrían utilizarse para sostener dichas utilidades medias en equilibrio perfecto en subjuegos.

14. Suponga que la firma II es un monopolista en el mercado de un cierto tipo de computadoras para uso científico. Este mercado es un "monopolio natural", es decir, sólo una firma puede sobrevivir en él en el largo plazo. II enfrenta a un único potencial competidor, la firma I. I y II eligen sus estrategias simultáneamente. II elige uno de dos precios para sus computadoras, alto (A) o bajo (B). I elige si entrar al mercado (E) o no entrar (NE). Para I, entrar es costoso. Si no entra, entonces II disfruta de su poder monopólico para siempre. Si I entra, entonces competirán por algún tiempo, pero la firma con los costos más altos eventualmente tendrá que abandonar el mercado. Existe una probabilidad ρ de que los costos de II sean inferiores a los costos de I, y esto es de dominio público. II conoce sus costos cuando elige su precio, pero I no conoce los costos de II. Por el contrario, los costos de I son de dominio público. Las siguientes

matrices reflejan los beneficios de las firmas en función de sus decisiones y sus costos.

Si los costos de II son superiores a los de I:

I	II: A	B
E	100,20	100,5
NE	0,90	0,30

Si los costos de II son inferiores a los de I:

I	II: A	B
E	-20,60	-20,20
NE	0,120	0,70

(a) Represente este juego en forma extensiva como un juego con información imperfecta. ¿Cuáles son las estrategias disponibles para II? ¿Y para I?

(b) Halle todos los equilibrios bayesianos de Nash en estrategias puras de este juego.

15. Tome el ejemplo de competencia en precios visto en clase: la firma II sabe si los bienes que ella y la firma I produce son sustitutos perfectos o complementos, pero la firma I lo ignora. Esta asigna probabilidad ρ a que los bienes sean sustitutos perfectos. Las matrices que siguen representan los beneficios de las firmas para distintas combinaciones de precios altos (A), medios (M) y bajos (B).

Sustitutos

	A	M	B
A	5,5	0,8	0,6
M	8,0	4,4	0,6
B	6,0	6,0	3,3

Complementos

	A	M	B
A	5,5	6,3	10,1
M	3,6	4,4	5,2
B	1,10	2,5	3,3

(a) Represente este juego con información incompleta como un juego con información imperfecta.

(b) Obtenga todos los equilibrios bayesianos de Nash del juego en estrategias puras.

16. Halle todos los equilibrios bayesianos de Nash en estrategias puras del siguiente juego:

(a) i. El azar determina si los pagos son como en el juego 1 o como en el juego 2, siendo cada juego igualmente probable.

ii. El jugador 1 se entera de si el azar ha elegido el juego 1 o el 2, pero el jugador 2 no.

iii. El jugador 1 elige A o B. Simultáneamente, el jugador 2 elige I o D.

iv. Los pagos son los que se dan en el juego que determina el azar.

Juego 1

	I	D
A	1,1	0,0
B	0,0	0,0

Juego 2

	I	D
A	0,0	0,0
B	0,0	2,2

17. Dos agentes pertenecen a un grupo que debe estar representado en una reunión. Los dos agentes desean que el grupo esté representado, pero ninguno de los dos desea concurrir a la reunión, porque ello es costoso. La asistencia del grupo a la reunión es un bien público para ellos: si uno de los agentes concurre, el restante agente recibe el mismo beneficio concurra él también o no (aunque pagará un costo si concurre que no pagaría sin concurrir). La siguiente matriz refleja las utilidades de los agentes. A representa la opción de *asistir* a la reunión, mientras NA representa la elección de *no asistir*.

	A	NA
A	4-c_1,4-c_2	4-c_1,4
NA	4,4-c_2	0,0

(a) Suponga que $c_1 = c_2 = 1$ y esto es dominio público. Halle todos los equilibrios de Nash del juego. Repita para $c_1 = c_2 = 3$. En los equilibrios en estrategias mixtas, indique con qué probabilidad el grupo estará representado en la reunión.

(b) Ahora suponga que los costos de asistencia c_i no son dominio público: el costo de concurrir para cada agente i es información privada de i. El costo de cada agente es de 3 con probabilidad p y de 1 con probabilidad $1 - p$. Es dominio público que los costos de los dos agentes se determinan de manera independiente según dicha distribución de probabilidad. Represente este juego con información incompleta como un juego con información imperfecta. Si $\frac{1}{4} \leq p \leq \frac{3}{4}$, demuestre que el juego tiene un equilibrio bayesiano de Nash en el que los agentes con costo bajo concurren a la reunión y los agentes con costo alto no lo hacen. ¿Con qué probabilidad estará el grupo representado en la reunión?

18. Considere un duopolio de Cournot que opera en un mercado con demanda inversa $P(Q) = a - Q$, donde $Q = q_1 + q_2$ es la cantidad agregada en el mercado. Ambas empresas tienen unos costos totales de $c_i(q_i) = cq_i$, pero la demanda es incierta: es alta ($a = a_A$) con probabilidad θ y baja ($a = a_B$) con probabilidad $1 - \theta$. Además, la información es asimétrica. La empresa 1 sabe si la demanda es alta o baja, pero la empresa 2 no lo sable. Todo esto es información de dominio público. Las dos empresas eligen simultáneamente. Haga supuestos sobre a_A, a_B, θ y c de manera que todas las cantidades de equilibrio sean positivas. ¿Cuál es el equilibrio bayesiano de Nash de este juego?

19. Se realiza una elección entre dos candidatos, A y B, para conducir una entidad. Existen únicamente **dos votantes**. Los dos votantes están plenamente de acuerdo en cuál es el mejor candidato, pero qué candidato ocupa el tope de sus preferencias depende de las circunstancias que la entidad debe enfrentar. Si las circunstancias son duras, el candidato A es el mejor para los dos votantes. Si las circunstancias son favorables, ambos consideran que el candidato B es el mejor.

    Cada votante obtiene una utilidad de 1 si el mejor candidato (dadas las circunstancias) es el que gana, de 0 si el peor candidato gana, y de 1/2 si se produce un empate. La votación es simultánea, y cada participante puede votar por A, votar por B o abstenerse de votar. Gana el candidato que más votos obtiene, y si los dos candidatos obtienen un el mismo número de votos (un voto o ningún voto para cada uno) el resultado de la elección es un empate.

    El votante 1 sabe si la entidad enfrenta circunstancias duras o favorables. El votante 2, sin embargo, no lo sabe; él cree que las circunstancias son duras con probabilidad 0,9, y favorables con probabilidad 0,1. Toda esta información es de dominio público.

    (a) ¿Cuántos tipos tiene cada jugador en este juego? Construya las correspondientes matrices de pagos.

    (b) ¿Existe algún equilibrio bayesiano de Nash en el que el votante 2 vota por A? Si halla algún equilibrio de tal tipo, verifique si en él alguno de los votantes está utilizando una estrategia (débil o estrictamente) dominada.

    (c) ¿Existe algún equilibrio bayesiano de Nash en el que el votante 2 se abstiene? Si halla algún equilibrio de tal tipo, explique intuitivamente por qué el votante 2 decide no votar por ninguno de los candidatos.

20. Existe un monto de \$3 a repartir entre dos personas. Ellos acuerdan efectuar el reparto de la siguiente manera. Cada jugador i ($i = 1, 2$) escribirá en un papel una suma s_i en pesos entera, sin centavos (es decir, solamente pueden escribir \$0, \$1, \$2 o \$3). Los papeles se revelarán simultáneamente. Si $s_1 + s_2 \leq 3$, entonces cada jugador i recibe la suma s_i que escribió en su papel. Si $s_1 + s_2 > 3$, entonces los dos jugadores reciben \$0 (donan los \$3 a una institución de beneficencia).

    Cada uno de los jugadores, sin embargo, no conoce exactamente la función de utilidad del otro (pero, desde ya, conoce la propia). Es posible que la utilidad de un jugador esté dada por la cantidad de dinero con la que termina el juego. Pero también es posible que le importe no recibir menos que el rival: en este caso, el jugador tiene una utilidad dada por la cantidad de dinero con la que termina el juego menos un costo de 2 si es que termina el juego con menos dinero que su rival. Cada jugador cree que la función de utilidad del rival corresponde al primer caso con probabilidad $\frac{1}{3}$, y al segundo con probabilidad $\frac{2}{3}$. *Nota: no olvide que se trata de un juego simétrico.*

(a) Plantee las matrices relevantes para el juego.

(b) Elimine todas las estrategias dominadas (estricta o débilmente). Puede efectuar la eliminación de manera iterada. ¿Qué estrategias sobreviven para cada jugador?

(c) Halle todos los equilibrios bayesianos de Nash en estrategias puras del del juego sin considerar las estrategias eliminadas en (b).

21. Considere el siguiente juego:

	A	B
A	2,2	0,θ
B	θ,0	1,1

Existen dos posibles valores de θ: 0 y 3. Ambos valores son igualmente probables. El jugador 1 observa la realización de θ, pero el jugador 2 no lo hace.

(a) Halle todos los equilibrios en estrategias puras de este juego.

(b) En cada equilibrio obtenido en (a), halle las utilidades esperadas logradas por el jugador 1 y por el jugador 2. Para el jugador 1, compute su utilidad esperada antes de que él mismo sepa si $\theta = 0$ o $\theta = 3$ (es decir, antes de que mueva la naturaleza).

(c) Suponga ahora que este juego se repite. Los valores que toma θ son independientes entre períodos (es decir, en cada período la naturaleza elige θ nuevamente con la misma distribución de probabilidad). Entonces, aun cuando el jugador 1 observe la elección de la naturaleza en cada etapa, no sabe cuál será la elección en etapas posteriores. El jugador 2 nunca observa el valor actual ni futuro de θ. Una vez terminada una etapa, en cambio, al recibir sus pagos observa el valor de θ de la etapa terminada.

i. Si este juego se juega dos veces y las utilidades no son descontadas, ¿es posible que en equilibrio se juegue siempre (A,A), independientemente del valor de θ?

ii. Si el juego se repite infinitas veces y ambos jugadores emplean un factor de descuento δ, ¿para qué valores de δ es posible que en equilibrio se juegue siempre (A,A), independientemente del valor de θ?

22. Tres jugadores participan en una subasta. El objeto en venta tiene un valor de 1 para los tres, y esta información es de dominio público. El procedimiento de venta es una subasta de *tercer precio*. Es decir, gana quien hace la oferta más alta (en caso de empate, quienes hicieron la oferta

más alta ganan con probabilidades iguales), y quien recibe el objeto paga una suma igual a la tercera oferta más alta. Para simplificar, suponga que las ofertas de los jugadores deben pertenecer al conjunto $\{0, 1, 2\}$.

(a) Represente el juego generado por la subasta en forma matricial.

(b) ¿Es cierto que, para cada jugador, ofrecer una suma igual al valor del objeto para él domina débilmente a ofrecer una suma menor que el valor del objeto?¿Es cierto que domina débilmente a ofrecer una suma superior al valor del objeto?

(c) Halle los equilibrios de la subasta.

23. Considere una subasta de primer precio a sobre cerrado en la cual las valuaciones de los participantes están distribuidas de forma independiente y uniforme en $[0, 1]$y la utilidad corresponde al caso de neutralidad al riesgo y valores privados.

    (a) Demuestre que si hay n participantes, la estrategia de ofrecer $\frac{n-1}{n}$ veces la propia valuación es un equilibrio bayesiano de Nash simétrico.

    (b) ¿Los jugadores ofrecen más o menos agresivamente a medida que crece n? ¿Qué ocurre cuando $n \to \infty$?

24. El poseedor de un objeto desea venderlo a uno de dos posibles compradores, I y II. Las valuaciones de los compradores son su información privada, y sólo se sabe que $v_I, v_{II} \sim U[0, 1]$. El vendedor hace una oferta única no modificable: fija un precio al cual vendería su objeto. Los compradores deciden simultáneamente si aceptan o no la oferta. Si uno de los compradores acepta y el otro no, el primero recibe el objeto y paga el precio fijado por el vendedor. Si los dos aceptan, el vendedor adjudica el objeto a uno de los compradores tirando una moneda al aire, y el ganador paga el precio fijado por el vendedor. Si ninguno de los compradores acepta, el objeto no se vende. El valor del objeto para el vendedor es cero. Los tres jugadores son neutrales al riesgo, sus valuaciones son independientes y las utilidades corresponden al caso de valores privados.

    (a) ¿Cuál es el ingreso esperado para el vendedor cuando fija un precio de $\frac{1}{2}$?

    (b) ¿Cuál es el ingreso esperado para el vendedor cuando fija un precio p?

    (c) ¿Cuál es el precio óptimo para el vendedor?

    (d) ¿Es creíble la "amenaza" del vendedor de no vender el objeto si nadie acepta su oferta? ¿Por qué?

    (e) Suponga que el vendedor hace una sucesión de ofertas del tipo mencionado, bajando su precio si nadie acepta. ¿Cómo se compara esto con los tipos de subastas vistos en clase?

25. Considere el caso de subasta con valores comunes visto en clase. Dos oferentes, I y II, participan en una subasta por un objeto cuyo valor es $v_I + v_{II}$. I conoce v_I pero no conoce v_{II}, en tanto que II conoce v_{II} pero no conoce v_I. Es de dominio público que I cree que v_{II} se distribuye uniformemente en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, y que II cree que v_I tiene exactamente la misma distribución. v_I y v_{II} son independientes. Los oferentes son neutrales al riesgo.

    Suponga que el objeto se vende a través de una subasta de primer precio a sobre cerrado. Verifique que $b_i(v_i) = v_i$, $i =$ I,II es un equilibrio bayesiano de Nash de esta subasta. ¿Cuál es la utilidad que obtiene un oferente i con valuación v_i si gana? ¿Puede el ganador tener utilidad negativa?

26. Suponga que la firma II es un monopolista en el mercado de un cierto tipo de computadoras para uso científico. Este mercado es un "monopolio natural", es decir, sólo una firma puede sobrevivir en él en el largo plazo. II enfrenta a un único potencial competidor, la firma I. II *mueve primero* y elige uno de dos precios para sus computadoras, alto (A) o bajo (B).Una vez observada la decisión de II, I elige si entrar al mercado (E) o no entrar (NE). Para I, entrar es costoso. Si no entra, entonces II disfruta de su poder monopólico para siempre. Si I entra, entonces competirán por algún tiempo, pero la firma con los costos más altos eventualmente tendrá que abandonar el mercado. Existe una probabilidad $\frac{1}{2}$ de que los costos de II sean inferiores a los costos de I, y esto es de dominio público. II conoce sus costos cuando elige su precio, pero I no conoce los costos de II. Por el contrario, los costos de I son de dominio público. Las siguientes matrices reflejan los beneficios de las firmas en función de sus decisiones y sus costos.

    Si los costos de II son inferiores a los de I:

		II	
		A	B
I	E	100,20	100,5
	NE	0,90	0,30

    Si los costos de II son superiores a los de I:

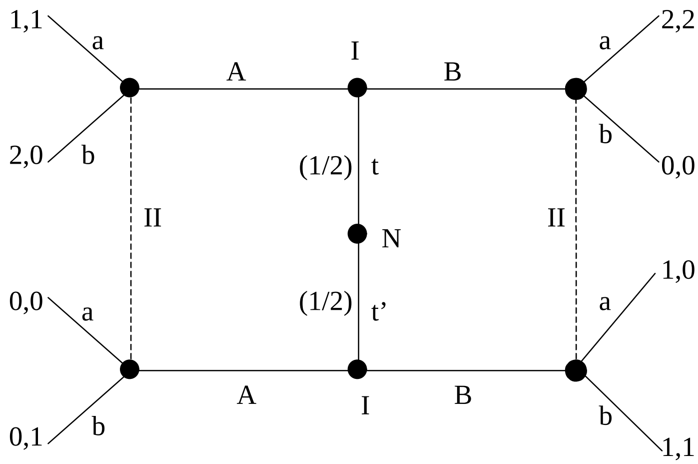
		II	
		A	B
I	E	-20,60	-20,20
	NE	0,120	0,70

    (a) Aplique la transformación de Harsanyi para convertir a este juego en un juego con información completa pero imperfecta. Dibuje el correspondiente árbol del juego.

    (b) Halle todos los equilibrios bayesianos perfectos en estrategias puras de este juego.

27. Halle todos los equilibrios bayesianos perfectos, de separación y de agru-

pación, con estrategias puras en el siguiente juego:



28. Dos países, A y B, se hallan en una situación de conflicto. Es más, se sabe que el país B está considerando lanzar una ofensiva militar contra el país A, y cuenta con un ejército poderoso para hacerlo.

El país B no conoce exactamente el poderío militar del país A. Cree que A es militarmente fuerte con probabilidad $\frac{1}{2}$, y militarmente débil con igual probabilidad. Las utilidades para cada país si B ataca a A dependen de si A es fuerte o débil, según la siguiente tabla:

	B ataca	B no ataca
A es débil	-50, 50	0,0
A es fuerte	-40,-10	0,0

donde el primer número representa la utilidad de A y el segundo la utilidad de B.

Previamente a que B decida si ataca a A o no, A puede decidir la invasión de un tercer país, C. A no tiene ningún interés o beneficio derivado de dicha ofensiva, sino solamente costos. Específicamente, una invasión a C tiene un costo de 60 si es débil, y de 30 si es fuerte.

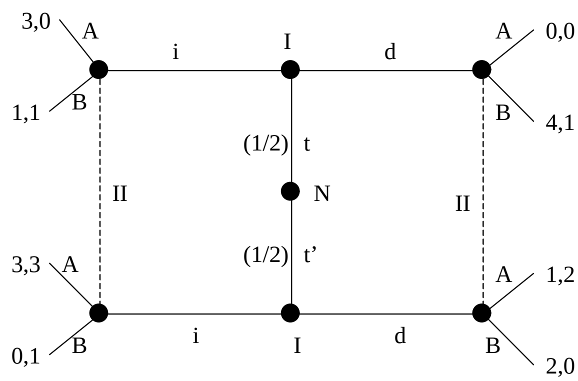
B observa la decisión de A de atacar o no a C y luego decide si lanza su ofensiva contra A o no.

(a) Dibuje el árbol de este juego.

(b) ¿Existe algún equilibrio bayesiano perfecto en el que A ataca a C tanto si es fuerte como si es débil?

(c) ¿Existe algún equilibrio bayesiano perfecto en el que A ataca a C si es fuerte pero no lo hace si es débil? Si existe tal equilibrio, explique intuitivamente qué ocurre en él.

29. Halle todos los equilibrios bayesianos perfectos en estrategias puras del siguiente juego de señalización:



30. Dos individuos, I y II, pueden casarse. Con probabilidad 1/4, el individuo I es "bueno"(B), y con probabilidad 3/4 es "malo"(M). El jugador I conoce su tipo, pero el jugador II lo ignora. El jugador II no tiene información privada. El jugador I puede proponer dos tipos de matrimonio: uno basado en la confianza (C) o uno basado en un contrato prenupcial (P). Una vez que I le ofrece una alternativa, II decide si acepta casarse o no.

    Si luego de recibir una propuesta C, II decide rechazarla, los dos jugadores obtienen una utilidad de 0. Si una propuesta P es rechazada, el jugador II recibe una utilidad de 0, pero el jugador 1 recibe una utilidad de -1, debido al costo de redactar el contrato.

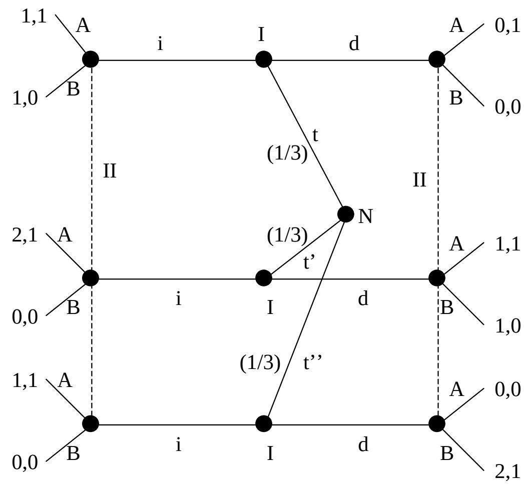
    Si el jugador I acepta una oferta, C los pagos para los dos jugadores son como (1,2) si I es bueno y (-2,-1) si I es malo. Si el jugador I acepta una oferta P, las utilidades son (2,2) si I es bueno y (2,-1) si I es malo.

    (a) Represente este juego a través de un árbol. ¿Cuántos subjuegos tiene?
    (b) Halle todos los equilibrios bayesianos perfectos de separación.
    (c) ¿Existe algún equilibrio de agrupación en el que el jugador I ofrece una relación basada en la confianza (c) tanto si es bueno como si es malo?

31. En el siguiente juego de señalización con tres tipos para el emisor,

    (a) ¿existe algún equilibrio bayesiano perfecto de agrupación en el que los tres tipos del emisor eligen i?
    (b) ¿existe algún equilibrio bayesiano perfecto en el que los tipos t y t' del jugador I eligen d y el tipo t" elige i?

(c) ¿existe algún equilibrio bayesiano perfecto en el que los tipos t y t' del jugador I eligen i y el tipo t" elige d?



32. Un consumidor demanda un bien de la firma que lo produce. La utilidad que el consumidor deriva de la compra es $\theta - p$, donde θ es el valor del producto para el consumidor y p es el precio que paga por él. El producto puede ser de alta calidad (en cuyo caso el valor para el consumidor es $\theta = \theta_A > 0$) o de baja calidad (en tal caso el valor para el consumidor es $\theta = \theta_B = 0$). La calidad del bien es conocida por la firma, pero no por el consumidor. El costo de producir un bien de calidad alta es c_A, mientras que el costo de producir un bien de calidad baja es c_B, con $c_B < c_A$.

    El desarrollo temporal es el siguiente. En primer lugar, la naturaleza elige el tipo de la firma: productora de bienes de alta calidad (con probabilidad x) o productora de bienes de baja calidad (con probabilidad $1-x$). A continuación, el consumidor demanda el producto en dos períodos sucesivos. En cada uno de ellos, la firma fija un precio y después el consumidor decide si comprar o no. Pero sólo es posible que compre el bien en el período 2 si ya lo ha comprado en el período 1. Al comprar y consumir el producto, el consumidor observa su calidad. Consideramos aquí la posibilidad de que el precio en el período 1 actúe como señal de la calidad del producto.

    (a) Suponga que el consumidor compró el producto en el primer período y observó que su calidad es baja. ¿Es posible que repita su compra en el período 2?

    (b) Suponga que el consumidor compró el producto en el primer período y observó que su calidad es alta. ¿Qué precio fijará la firma en el período 2?

    (c) Sea p_1 el precio que la firma cobra en el primer período. ¿Cuál es entonces el beneficio total (es decir, considerando los dos períodos) de una firma de baja calidad? ¿Cuál es el beneficio para una firma de alta calidad?

(d) Considere la posibilidad de un equilibrio de agrupación: los dos tipos de productor eligen el mismo precio en el primer período.

i. ¿Cuál es el máximo precio posible en tal equilibrio? ¿Por qué?

ii. Suponga que las firmas fijan tal precio. Calcule el beneficio de cada tipo de firma. ¿Bajo qué condiciones son los dos positivos? (Note que si alguno es negativo, el tipo de firma correspondiente preferirá no producir, por lo que no habrá un equilibrio de agrupación).

iii. Suponiendo que dichas condiciones se cumplen, especifique creencias del consumidor que sostengan el precio hallado en (i) en un equilibrio bayesiano perfecto.

(e) Considere ahora la posibilidad de un equilibrio de separación.

i. ¿Qué precio podrá cobrar en dicho equilibrio una firma de calidad baja?

ii. ¿Qué precio podrá cobrar una firma de calidad alta? Nota: *recuerde que debe ser cierto que una firma de calidad baja no desea "hacerse pasar" por una firma de calidad alta.*

iii. ¿Cuál es el beneficio de la firma de calidad alta al máximo precio que puede cobrar? ¿Bajo que condiciones es positivo? (Note que de no ser positivo, no habría un equilibrio de separación).

iv. Interprete el fenómeno de los "precios introductorios" o "precios para nuevos clientes" a la luz de sus resultados.