PROGRESOS EN TEORÍA DE LOS JUEGOS Y SUS APLICACIONES

Compiladores:
Leandro Arozamena
Federico Weinschelbaum

Autores:
Leandro Arozamena
Alejandro Neme
Jorge Oviedo
Fernando Tohmé
Federico Weinschelbaum

Serie Progresos en Economía

Asociación Argentina
de Economía Política

Arozamena, Leandro
Progresos en teoría de los juegos y sus aplicaciones / Leandro Arozamena y Federico Weinschelbaum. - 1a ed. - Buenos Aires : Temas Grupo Editorial, 2011.
100 p. ; 22x15 cm.

ISBN 978-987-1826-08-7

1. Empresas. I. Weinschelbaum, Federico II. Título CDD 650

Fecha de catalogación: 05/10/2011

© AAEP – Asociación Argentina de Economía Política
Avda. Córdoba 637 piso 4º
C1054AAF - Ciudad de Buenos Aires, Argentina

© Temas Grupo Editorial SRL, 2011
Cerrito 136 Piso 3ºA
C1010AAD - Buenos Aires, Argentina

www.editorialtemas.com

Derechos reservados en el idioma español

1º edición, octubre de 2011

Comité TEMAS Grupo Editorial
Dirección: Jorge Scarfi
Coordinación general: Julieta Codugnello
Producción editorial: Inés Shute Dinamarca
Diagramación: Karin Bremer

ISBN 978-987-1826-08-7

Queda hecho el depósito que previene la ley 11.723
Impreso en Argentina.

Esta edición se terminó de imprimir en el mes de octubre de 2011
en Bibliografika de Voros S.A. Bucarelli 1160, Buenos Aires.

Queda prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos de este libro en cualquier forma y medio sin previo permiso por escrito de los autores y/o titulares de Copyright.

ÍNDICE

BREVE HISTORIA DE LA AAEP

La AAEP fue fundada en 1957 por los Dres. Juan E. Alemann, Roberto Alemann, Julio Broide, Benjamín Cornejo, Aldo Ferrer, Juan J. Guaresti (h), Carlos C. Helbling, Carlos Moyano Llerena, Julio H. G. Olivera, Federico Pinedo, Oreste Popescu, Ovidio Schiopetto, Francisco Valsecchi y el Ing. Francisco García Olano.

El origen de la AAEP se remonta a sendas invitaciones cursadas por los Dres. Adolph Jöhr y Louis Baudin, a mediados de la década de los cincuenta, a los Dres. Oreste Popescu y Julio H. G. Olivera*. Jöhr y Baudin, por entonces pertenecientes a la International Economic Association, sugirieron constituir una asociación representativa de los investigadores en "economía política". La convergencia de iniciativas de los Dres. Popescu y Olivera se cristalizó, el 26 de setiembre de 1957, con la decisión de crear la AAEP. El Dr. Olivera llevó adelante la ejecución de la fundación, la que tuvo lugar formalmente el 18 de noviembre del mismo año.

La historia de la Asociación puede dividirse en tres fases. Durante la primera etapa (1957-1965) la actividad se tradujo en encuentros periódicos para la discusión de temas específicos. En 1958 se realizó la primera reunión de análisis económico. Durante este período la AAEP constituyó varios "centros regionales". La segunda etapa (1966-1972) se caracterizó por la incorporación a la AAEP de representantes de centros e institutos de investigación. A partir de entonces, las reuniones de centros de investigación económica se realizaron en el marco de la AAEP. Se inició en 1968 la rotación de la sede y de las autoridades ejecutivas entre los principales centros. En 1972 tuvo lugar la última reunión de la AAEP organizada sobre la base de trabajos de los centros e institutos de investigación. Desde 1973 hasta el presente la AAEP se encuentra en su tercera etapa, con su sede permanente en la ciudad de Buenos Aires. La AAEP es una institución formada por investigadores y académicos en economía y que interactúa en forma directa con los mismos. Ell espíritu de una amplia representación institucional y regional ha quedado impreso en la actividad de la AAEP y, en especial, en la práctica de las Reuniones Anuales.

Desde su fundación, la AAEP fue presidida por Julio H. G. Olivera (1957/68), Benjamín Cornejo (1968/70), Víctor J. Elías (1970/72 y 1978/80), Miguel E. Martínez (1972/74), Horacio Núñez Miñana (1974/76), Aldo A. Arnaudo (1976/78), Rolf R. Mantel (1980/82), Mario L. Szychowski (1982/84), Ana M. Martirena

Mantel (1984/86), Luisa Montuschi (1986/88), Alfredo M. Navarro (1988/90), Rinaldo Colomé (1990/92), Juan C. De Pablo (1992/94), Eusebio C. Del Rey (1994/96), Enrique A. Bour (1996/98), José A. Delfino (1998/00), Hildegart Ahumada (2000/02), José Luis Arrufat (2002/04), Omar O. Chisari (2004/06), Alberto Porto (2006/08) y Daniel Heymann (2008/10).

Qué es la Asociación Argentina de Economía Política

La principal actividad de la AAEP es la celebración de una Reunión Anual de discusión de trabajos realizados en el ámbito de la economía, tanto por socios como por no socios, la que tradicionalmente se realiza el mes de noviembre de cada año en distintas ciudades del país, en consulta y cooperación con universidades y centros de investigación económica de la Argentina. En dichas reuniones han participado economistas del país e invitados de otros países, incluyendo prestigiosos economistas extranjeros como Albert Berry, Michael Bruno, Vittorio Corbo, Jacques Drèze, Stanley Fischer, Roger Guesnerie, Arnold Harberger, Hendrik Houthakker, Jean Jacques Laffont, Axel Leijonhufvud, James Mirrlees, F. Modigliani, Marc Nerlove, Luigi Pasinetti, Sherwin. Rosen, Pablo Spiller, James Tobin, Wallace Oates, Victor Volsky, Edward Prescott, T.N. Srinivasan, Finn Kydland, Aloisio Araujo, Stan Metcalfe, Jan Brueckner, Paul Klemperer, Andreu Mas-Colell, Salvador Barberá. Los trabajos son aceptados por una comisión de socios de reconocidos méritos científicos y académicos, designada por el Consejo Directivo.

Los recursos de la AAEP provienen de las cuotas sociales y de los aportes de entidades adherentes. Actualmente la AAEP cuenta con más de 500 socios activos y 17 entidades adherentes: Academia Nacional de Ciencias Económicas (ANCE), Banco Central de la República Argentina (BCRA), Centro de Estudios de Estado y Sociedad (Cedes), Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL), DePablo Consult, Fundación de Investigaciones Económicas Latinoamericanas (FIEL), Fundación Capital, Instituto Torcuato Di Tella (ITDT), Orlando J. Ferreres y Asociados, Universidad de Buenos Aires (UBA), Universidad del CEMA (UCEMA), Universidad de San Andrés (UdeSA), Universidad Nacional de Córdoba (UNC), Universidad Nacional de Cuyo (UNCu), Universidad Nacional de La Plata (UNLP), Universidad Nacional de Salta (UNSa) y Universidad Nacional del Sur (UNS).

Desde 1964, la AAEP ha llevado adelante 43 Reuniones Anuales en las cuales han sido presentados y discutidos, en un marco de total libertad académica, más de dos mil quinientos trabajos de investigación. Los trabajos presentados en cada

Reunión Anual son editados en los Anales de la Asociación Argentina de Economía Política. A estos trabajos hay que sumar los trabajos presentados antes de 1964 y en reuniones científicas, no incluidos en Anales. Los trabajos y comentarios están incluidos también en el web site de la AAEP en Internet. La AAEP no es responsable ni de las opiniones incluidas en los Anales, ni de su protección intelectual.

La AAEP también organiza, en forma no sistemática, reuniones científicas a lo largo del año, en colaboración con otros organismos. Es miembro de la International Economic Association y desde el año 2008 ha lanzado la iniciativa de realizar el ciclo de seminarios de Progresos en Economía con el objeto de contribuir a la creación y fortalecimiento de vínculos con las Universidades que den bienvenida a dichos eventos.

El Consejo Directivo de la AAEP es el órgano de gobierno de la AAEP, y está compuesto de un presidente, dos secretarios y nueve vocales, provenientes de distintos organismos y regiones del país. Al momento de la edición de este libro el Consejo Directivo está integrado por: Ernesto Rezk (Presidente), Mónica Panadeiros (Secretaria), Adrián Ramos (Secretario), María Cecilia Gáname y Jorge Paz (Secretarios Suplentes), Federico Weinschelbaum, Laura D'Amato, Carlos Dabús, Lucía Quesada, Elizabeth Pasteris de Solavallone, Andrés López, Marcos Gallacher, Víctor Elías y Cecilia Rumi (Vocales). Son Vocales Suplentes Roxana Mauricio, Florencia Granato, Daniel Maceira, Jorge Oviedo, Graciela María del Carmen García, Marcelo Resico, Eduardo Fracchia, Gustavo Ferro y Miriam Bergés.

Julio H. G. Olivera es Presidente Honorario de la AAEP y los Profesores Albert Berry, Vittorio Corbo, Jacques Drèze, Roger Guesnerie, Arnold Harberger, Jean-Jacques Laffont, Axel Leijonhufvud, James Mirrlees, Marc Nerlove, Alberto Petrecolla, Pablo Spiller, T.N. Srinivasan, Aloisio Araujo, Finn Kydland, Stan Metcalfe, Jan Brueckner, Paul Klemperer, Andreu Mas-Colell y Salvador Barberá han sido declarados Miembros Honorarios de la Asociación.

Sede de la AAEP

Av. Córdoba 637 - 4° piso - (1054) Buenos Aires - Argentina
Tel. (5411) 4314-0246 Fax (5411) 4314-8648 E-mail info@aaep.org.ar
Web-Site de la AAEP en INTERNET: http://www.aaep.org.ar

---

* Para esta sección, véase J. H. G. Olivera, La Asociación Argentina de Economía Política: los Años Iniciales, Anales de la A.A.E.P. , XXIIa. Reunión Anual, Universidad Nacional de Córdoba, 1987, vol.1.

CONSEJO DIRECTIVO DE LA ASOCIACIÓN ARGENTINA DE ECONOMÍA POLÍTICA

2010/2011

Presidente
Ernesto Rezk (UNC)

Secretarios titulares
Mónica Panadeiros (FIEL)
Adrián Ramos (CEPAL)

Secretarios suplentes
María Cecilia Gáname (UNC)
Jorge Paz (UNSa)

Vocales titulares
Federico Weinschelbaum (UdeSA)
Laura D'Amato (BCRA)
Carlos Dabús (UNS)
Lucía Quesada (UTDT)
Elizabeth Pasteris de Solavallone (UNCu)
Andrés López (UBA)
Marcos Gallacher (UCEMA)
Víctor Elías (UNT)
Cecilia Rumi (UNLP)

Vocales suplentes
Roxana Mauricio (Univ. Gral. Sarmiento)
Florencia Granato (UNR)
Daniel Maceira (CEDES)
Jorge Oviedo (UNSL)
Graciela María del Carmen García (UN Rosario)
Marcelo Resico (UCA)
Eduardo Fracchia (IAE)
Gustavo Ferro (UADE)
Miriam Bergés (Univ. Nac. de Mar del Plata)

SOBRE LOS AUTORES

Leandro Arozamena es Licenciado en Economía de la Universidad Nacional del Sur y MA y PhD in Economics de la Universidad de Harvard. Actualmente se desempeña como profesor asociado en el Departamento de Economía y director de la Licenciatura en Economía en la Universidad Torcuato Di Tella, y es miembro de la carrera del investigador del Conicet. Ha recibido el Young Economists' Essay Award de la European Association for Research in Industrial Economics (2000), el Young Economist Award de la European Economic Association (2001) y el Premio "Consagración" de la Academia Nacional de Ciencias Económicas (2010). Su trabajo de investigación se centra en la teoría de subastas, y ha publicado artículos en revistas como Review of Economic Studies, European Economic Review, Journal of International Money and Finance y Economics Letters, entre otras.

Alejandro Neme es Licenciado y Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional de San Luis. Actualmente es profesor titular en el Departamento de Matemática, investigador independiente del CONICET, y director del Instituto de Matemática Aplicada-San Luis. Fue visiting scholar en la Kellogg Graduate School of Management, Northwestern University y profesor visitante en diversas universidades europeas. Sus campos de especialización son la teoría de juegos, el diseño de mecanismos y la teoría de la elección social. Ha publicado trabajos en diversas revistas, tales como: Journal of Economic Theory, Social Choice and Welfare, Journal of Mathematical Economics, International Journal of Game Theory, Mathematical Social Sciences, Social Choice and Welfare, Optimization, Games and Economic Behavior, entre otras.

Jorge Oviedo es Doctor en Matemática de la Universidad Nacional de San Luis. Es docente del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional de San Luis, investigador del Instituto de Matemática Aplicada San Luis y miembro de la carrera de investigador del CONICET. Publicó artículos de teoría de juegos, modelos de matching, etc., en revistas como Journal of Economic Theory, Theoretical Economics, International Journal of Game Theory, entre otros.

Fernando Tohmé es investigador independiente de Conicet y profesor titular del Departamento de Economía de la Universidad Nacional del Sur. En esta universidad obtuvo su grado en Matemática y el doctorado en Economía. Fue senior Fulbright scholar (UC Berkeley) y visiting associate professor (Washington University in St. Louis). Ha publicado artículos en revistas como Theory and Decision, Mathematical Social Sciences, Social Choice and Welfare, Mathematical and Computational Modeling y Journal of Artificial Intelligence, entre otras.

Federico Weinschelbaum es profesor asociado y director del Departamento de Economía de la Universidad de San Andrés y miembro de la carrera del investigador del Conicet. Obtuvo su Licenciatura en Economía de la Universidad de Buenos Aires y su PhD de la Universidad de California los Angeles (UCLA). Fue senior Fulbright scholar (Duke University). Ha recibido el Premio "Consagración" de la Academia Nacional de Ciencias Económicas (2010). Sus campos de especialización son la teoría microeconómica, la teoría de juegos y los problemas de información e incertidumbre. Publicó artículos en revistas como The Economic Journal, European Economic Review, International Economic Review y Journal of International Economics, entre otras.

INTRODUCCIÓN

Leandro Arozamena
Universidad Torcuato Di Tella y CONICET

Federico Weinschelbaum
Universidad de San Andrés y CONICET

Un *juego* es una situación en la que un conjunto de individuos (o *jugadores*) deben tomar decisiones interdependientes. La teoría de los juegos formaliza estos contextos de decisiones interactivas y provee *soluciones*, o descripciones de resultados finales a los que el conjunto de individuos debería razonablemente arribar. En trazos muy gruesos, podemos dividir la teoría en dos ramas principales. En los *juegos cooperativos*, se parte del supuesto implícito según el cual los jugadores pueden arribar a acuerdos vinculantes sobre su comportamiento. Por consiguiente, el interés central se orienta a identificar los resultados óptimos para grupos de individuos, o *coaliciones*. En los *juegos no cooperativos*, por el contrario, no existe la posibilidad de arribar a acuerdos vinculantes. El objetivo de la teoría, entonces, es caracterizar los *comportamientos individuales* que los jugadores, razonablemente, deberían adoptar en contextos de interacción con otros individuos.

La teoría de los juegos ha adquirido, desde mediados del siglo pasado, un grado de desarrollo importante. En un número considerable de casos, su evolución conceptual ha estado asociada de modo directo a su aplicación al estudio de problemas económicos. De hecho, resulta imposible imaginar, desde tres décadas atrás, a la teoría económica y a una porción sustancial de sus campos aplicados sin las herramientas provistas por la teoría de los juegos. Un reflejo de ello es que, desde 1994, el Premio Nobel de Economía fue otorgado en seis ocasiones en mérito a contribuciones a la teoría de los juegos o a algunas de sus aplicaciones directas en el análisis económico.[1] Por otra parte, no existe área de la economía en la que

[1] Se trata de los premios otorgados en 1994 a John Nash, Reinhard Selten y John Harsanyi, en 1996 a James Mirrlees y William Vickrey, en 2001 a George Akerlof, Michael Spence y Joseph Stiglitz, en 2002 a Daniel Kahneman y Vernon Smith, en 2005 a Robert Aumann y Thomas Schelling, y en 2007 a Leonid Hurwicz, Eric Maskin y Roger Myerson.

no se hayan aplicado o se apliquen el marco conceptual y las herramientas que la teoría de los juegos provee. Sus aplicaciones se han extendido también a otras disciplinas, desde la biología a las ciencias políticas, desde las ciencias de la computación al derecho.

El presente volumen reúne los trabajos resultantes de las presentaciones realizadas en el Panel de Progresos en la Teoría de los Juegos y sus Aplicaciones a la Economía, en el marco de la XLIII Reunión Anual de la Asociación Argentina de Economía Política, en la Universidad Nacional de Córdoba. Al encomendársenos la tarea de coordinar dicho panel, se nos planteó una disyuntiva importante. Por un lado era posible orientar las exposiciones a un tratamiento comprehensivo de los avances en la teoría de los juegos y, particularmente, en su aplicación. Alternativamente, la idea de restringir las exposiciones a algunos temas específicos, y permitir de tal modo que se los tratase con profundidad, era atractiva.

Finalmente, nos inclinamos por la segunda opción. El espacio disponible en este volumen no permite una exposición comprehensiva con un grado aceptable de profundidad. Además, muchas excelentes exposiciones abarcativas de la teoría de los juegos y de sus aplicaciones están disponibles para aquellos que se interesen en el tema, con una amplia diversidad de profundidad y detalle. Las nociones básicas de la teoría de los juegos no cooperativos se presentan de una manera simple y carente de tecnicismos en Dixit y Nalebuff (1991, 2008), y Dixit y Skeath (1999). Entre muchos otros, Gibbons (1992), Dutta (1999), Osborne (2003), Rasmusen (2006), Binmore (2007) y Watson (2007) proveen introducciones generales a la teoría.[2] Fudenberg y Tirole (1991), Osborne y Rubinstein (1994) y Myerson (1997) realizan un tratamiento de nivel más avanzado, en tanto Aumann y Hart (1992, 1994, 2002) presentan una exposición exhaustiva de la teoría y de muchas de sus aplicaciones principales. Por otra parte, un desarrollo específico de la teoría de los juegos cooperativos y sus aplicaciones puede hallarse en Moulin (1988, 1995).

Una vez fijada la preferencia por un desarrollo más detallado de temas específicos, restaba definir cuáles serían dichos temas. Al hacerlo, otorgamos prioridad a aquellos que son objeto de estudio hoy en día en la Argentina. Los siguientes cuatro capítulos presentan, por consiguiente, una exposición de tópicos seleccionados realizada por investigadores argentinos que contribuyen activamente a su desarrollo.

---

[2] Una exposición muy breve de los conceptos centrales de la teoría puede hallarse en Arozamena y Weinschelbaum (2007).

Una de las principales y más exitosas aplicaciones de la teoría de los juegos se ha dado en el *diseño de mecanismos*. En muchos contextos, existe un objetivo a lograr (por ejemplo, decidir si un proyecto se realiza o a quién asignar un objeto) que depende crucialmente de la información privada de los individuos (por ejemplo, su disposición a contribuir al proyecto, o su disposición a pagar por el objeto). Estos individuos pueden no contar con incentivos adecuados para revelar verazmente su información privada. La teoría del diseño de mecanismos estudia en qué medida y cómo es posible construir juegos tales que, cuando los agentes participen en ellos, revelen su información privada.

Dentro de esta teoría, el área de mayor aplicación práctica es la *teoría de subastas*, que analiza el diseño y el desempeño de procedimientos de compra o venta de objetos en múltiples contextos. En el segundo capítulo de este volumen, introducimos la posibilidad de que en una subasta exista el favoritismo. En otras palabras, se trata del caso, observado con frecuencia, en el que quien vende o compra en una subasta valora a algunos de los participantes en ella por encima de otros. El diseño de subastas óptimas cuando el favoritismo está presente es examinado en diversas situaciones en dicho capítulo.

En el tercer capítulo, Alejandro Neme plantea un problema concreto de decisión colectiva en el que las herramientas de la teoría de los juegos pueden aplicarse. Existe una cantidad fija de un bien perfectamente divisible que debe repartirse entre un número finito de individuos. Cada uno de ellos tiene preferencias individuales que especifican la porción óptima a recibir del total disponible. Pero, una vez más, las preferencias individuales constituyen información privada de cada agente. ¿Qué reglas aseguran que los individuos tengan incentivos a revelar verazmente sus preferencias, es decir, son *no manipulables*? La no manipulabilidad, claro está, no es la única característica deseable de una regla de reparto. El capítulo estudia, entonces, las reglas que a la vez son no manipulables y resultan deseables en función de otros criterios razonables, tales como eficiencia y el tratamiento igualitario de los diferentes individuos.

El cuarto capítulo está dedicado al estudio de mercados bilaterales. Se trata de aquellos en los que existen dos partes que deben vincularse entre sí (tales como estudiantes y colegios o trabajadores y firmas). Jorge Oviedo desarrolla el problema de asignación, o *matching*, en dichos mercados; es decir, a qué individuo/s del lado opuesto del mercado se debe vincular cada agente, particularmente cuando la asignación se realiza de modo centralizado. Luego de introducir los conceptos básicos, plantea condiciones razonables que una asignación fijada centralizadamente debería satisfacer (especialmente, que ningún subgrupo de agentes pueda obtener una asignación que los beneficie más acordando exclusivamente entre ellos) y presenta algoritmos empleados en la práctica para obtener dichas asignaciones. También es relevante aquí el problema de lograr que los agentes anuncien sus preferencias verazmente. Cabe destacar que este capítulo es el único, en el presente volumen, en el que se emplean conceptos de la teoría de los juegos cooperativos.

Luego de tres aplicaciones, el último capítulo se refiere a un tema propio de la teoría de los juegos, especialmente de los no cooperativos. La teoría, en sus desarrollos iniciales centrales, incluyó, en la descripción formal de un juego, algunos supuestos muy fuertes acerca del conocimiento de los agentes en la interacción estratégica y de sus creencias sobre la forma de jugar de sus rivales y sobre el conocimiento y las creencias que estos poseen. Fernando Tohmé presenta brevemente la *teoría de juegos epistémica*, que permite plantear los juegos de una forma tal que relajar dichos supuestos sea posible. En el quinto capítulo, Tohmé introduce las nociones básicas de esta teoría y luego las emplea para, por un lado, describir los requisitos de conocimiento que las nociones más usuales de equilibrio empleadas en la teoría (por ejemplo, el equilibrio de Nash) imponen. Por otra parte, presenta un caso de concepto de equilibrio que el planteo epistémico permite definir, y que puede generar predicciones que, al menos en algunos juegos, resultan más compatibles con la evidencia experimental.

Agradecemos a la Asociación habernos encomendarnos la coordinación de la mesa que generó este volumen y a Alejandro Neme, Jorge Oviedo y Fernando Tohmé sus contribuciones. Finalmente, agradecemos también a Martín Alfaro su asistencia en la compilación de estos capítulos.

Referencias

Arozamena, L. y F. Weinschelbaum (2007): “Cincuenta años de teoría de los juegos y sus aplicaciones a la economía”, en A. Navarro (ed.), *Medio siglo de Economía*, Editorial Temas, Buenos Aires.

Aumann, R. y S. Hart (1992): *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, vol.1, Elsevier, Amsterdam.

Aumann, R. y S. Hart (1994): *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, vol.2, Elsevier, Amsterdam.

Aumann, R. y S. Hart (2002): *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, vol.3, Elsevier, Amsterdam.

Binmore, K. (2007): *Playing for Real: A Text on Game Theory*, Oxford University Press, Nueva York.

Dixit A., y B. Nalebuff (1991): *Thinking Strategically: The competitive Edge in Business, Politics and Everyday Life*, W.W. Norton, Nueva York.

Dixit, A. y B. Nalebuff (2008): *The Art of Strategy: A Game Theorist’s Guide to Success in Business and Life*, W.W. Norton, Nueva York.

Dikit, A. y S. Skeath (1999): *Games of Strategy*, W.W. Norton, Nueva York.
Dutta, P. (1999): *Strategies and Games: Theory and Practice*, MIT Press, Cambridge.
Fudenberg, D. y J. Tirole (1991): *Game theory*, MIT Press, Cambridge.
Gibbons, R. (1992): *Game Theory for Applied Economists,* Princeton University Press, Princeton.
Moulin, H. (1988), *Axioms of Cooperative Decision-Making*, Cambridge University Press, Cambridge.
Moulin, H. (1995): *Cooperative Microeconomics*, Princeton University Press, Princeton.
Myerson, R. (1997): *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge.
Osborne, M. (2003): *An Introduction to Game Theory*, Oxford University Press, Nueva York.
Osborne M. y A. Rubinstein (1994), *A Course in Game Theory,* MIT Press, Cambridge.
Rasmusen, E. (2006), *Games and Information*, cuarta edición, Blackwell Publishing, Malden.
Watson, J. (2007): *Strategy: An Introduction to Game Theory*, segunda edición, W.W. Norton, Nueva York.

FAVORITISMO EN SUBASTAS*

Leandro Arozamena
Universidad Torcuato Di Tella y CONICET

Federico Weinschelbaum
Universidad de San Andrés y CONICET

1. Introducción

Un número sustancial y creciente de transacciones, en todo el planeta, se realiza a través de subastas y licitaciones. Tanto en el sector público como en el privado, el intercambio de bienes y servicios ha encontrado en los procedimientos competitivos de presentación de ofertas un instrumento de suma utilidad para realizar las compras y las ventas de una forma más transparente y eficiente. Desde grandes privatizaciones y concesiones de licencias para comunicaciones personales hasta las compras de insumos básicos, la variedad de bienes y servicios que se intercambian de esta manera es muy significativa. Asimismo, las subastas permiten en muchos casos que se "descubra" el precio de bienes que no cuentan con un mercado desarrollado al que se pueda tomar como punto de referencia. El empleo de plataformas electrónicas, que ha facilitado considerablemente la realización de subastas y licitaciones, ha multiplicado las posibilidades y la utilización real de estos procedimientos.

Paralelamente al avance de su uso práctico, la teoría de subastas adquirió también un desarrollo considerable.[1] De hecho, muchos mecanismos efectivamente empleados han resultado, en gran medida, adaptaciones de diseños teóricos previos. Igualmente, la práctica de las subastas y licitaciones ha generado nuevos desafíos para la teoría.

Como una parte de esta interacción entre la teoría y la aplicación real de mecanismos competitivos de emisión de ofertas para la compra y venta de bienes y

---

* Agradecemos el apoyo del FONCyT, PICT 2255.

[1] Para una exposición general de la teoría de subastas véase, por ejemplo, Krishna (2002), Menezes y Monteiro (2005) y, con mayor énfasis en su aplicación, Klemperer (2004) y Milgrom (2005).

servicios, en el presente capítulo examinaremos un fenómeno habitual en subastas y licitaciones que suele denominarse *favoritismo*: el organizador de la subasta, a igual precio, prefiere que gane un participante específico, el *favorito*, y no otro. Por ejemplo, es muy habitual en las compras públicas que se favorezca a las firmas domésticas en detrimento de las extranjeras, argumentando que las primeras generan una mayor recaudación impositiva, un mayor empleo local, o un mayor desarrollo de la economía local. En el sector privado, de modo análogo, es posible considerar la situación de una firma que, al adquirir insumos, prefiera entre sus posibles proveedores a firmas de su mismo grupo económico.

Definiremos aquí al favoritismo como aquella situación en la que el bienestar de quien vende o compra a través de la subasta se ve positivamente afectado por el bienestar de algunos de los participantes. Esta definición abarca los casos mencionados arriba y muchos otros.

La existencia de favoritismo ha dado lugar a diversos formatos de subasta en los que los favoritos reciben un trato preferencial. Se emplean, entonces, *subastas discriminatorias,* que les conceden una ventaja.[2] A modo de ejemplo, pueden mencionarse las políticas de “compre nacional”. Cuando se las aplica, las firmas nacionales cuentan, al ofertar, con una ventaja porcentual sobre sus rivales extranjeras: una firma extranjera, para ganar, debe realizar una oferta mejor que las presentadas por sus rivales domésticos en al menos un porcentaje establecido previamente —en caso contrario, ganará una firma doméstica. En otros contextos, se brinda a uno de los participantes un *right of first refusal*: dicho participante cuenta con el derecho a igualar la mejor oferta hecha por un rival y ganar.

No intentaremos aquí realizar una exposición detallada de las prácticas usuales de discriminación motivadas por argumentos relacionados con el favoritismo. En cambio, examinaremos al favoritismo en subastas desde el punto de vista teórico. En otros términos, tomaremos como punto de partida la existencia de favoritismo: quien diseña la subasta considera, en su propia utilidad, el bienestar de algunos de los participantes. Analizaremos en este marco cuál es el formato óptimo que debe tomar una subasta, cuál es la mejor forma de brindar ventajas a los favoritos. Adicionalmente, nos preguntaremos si es posible que algunas prácticas usuales de discriminación sean compatibles con ese formato óptimo de subasta.

---

[2] Como veremos más adelante, el favoritismo no es la única justificación posible para el empleo de subastas discriminatorias.

Tomaremos como base a la literatura que ha analizado el favoritismo en distintos contextos de subasta y licitación. Laffont y Tirole (1991), y Vagstad (1995) estudian el caso de subastas multidimensionales, en las que las ofertas de los participantes deben especificar, además de un precio, otras características, usualmente asociadas a la calidad. Allí, el comprador o vendedor debe otorgar ponderaciones al precio y a la calidad a la hora de evaluar las ofertas. Este capítulo, en cambio, se concentrará en subastas o licitaciones unidimensionales, en las que los participantes solamente compiten en precios. Es a este último caso, estudiado entre otros por McAfee y McMillan (1989), Branco (1994), Naegelen y Mougeot (1998) y Arozamena y Weinschelbaum (2006, 2011), que corresponden los ejemplos mencionados arriba.

Antes de proceder, resulta conveniente marcar una distinción importante entre favoritismo y corrupción. El favoritismo, tal como lo entendemos aquí, es explícito y legal. Genera formas concretas y abiertas de discriminación que integran las normas que regulan el proceso de compra o venta. Cuando existe corrupción, por el contrario, se genera un acuerdo ilegal, fuera de las normas que describen la subasta, entre uno o varios participantes y el subastador, que habitualmente es un agente de quien posee el objeto a vender o requiere el objeto a adquirir. Se trata, en suma, de dos situaciones diferentes. Existe una literatura sobre la corrupción en subastas, desarrollada entre otros por Celentani y Ganuza (2002), Burguet y Che (2004), Compte, Lambert-Mogiliansky y Verdier (2005), Menezes y Monteiro (2006), Burguet y Perry (2007), Arozamena y Weinschelbaum (2009) y Lengwiler y Wolfstetter (2010).

A continuación, presentamos el modelo básico de subasta a examinar en el resto del capítulo. En la sección 3, describimos el formato óptimo de subasta en ausencia de favoritismo. Ello nos permite contar con un punto de referencia para los resultados que luego se obtengan con favoritismo y, al mismo tiempo, examinar otras posibles razones para la discriminación en subastas. Presentamos el diseño óptimo de una subasta con favoritismo en el contexto de un número fijo de participantes en la sección 4. En la sección 5 examinamos la posibilidad de que un *right of first refusal* forme parte de una subasta óptima en presencia de favoritismo. Finalmente, en la sección 6 obtenemos el formato óptimo de subasta con favoritismo cuando el número de participantes es endógeno –en otros términos, cuando hay libre entrada.

2. El modelo básico

Un objeto único e indivisible se vende a través de una subasta.[3] Para simplificar, supondremos que quien posee el bien le adjudica un valor nulo. Existen N compradores potenciales. Cada uno de ellos será, en principio, un oferente en la subasta.[4]

Cada oferente i posee una disposición a pagar, o valoración, v_i por el objeto en venta ($i = 1,\ldots,N$). La valoración de cada agente es su información privada. Todos los demás participantes en la subasta (es decir, el vendedor y los demás oferentes) creen que v_i es una variable aleatoria distribuida según la función F_i, cuyo soporte está dado por el intervalo acotado $[\underline{v},\overline{v}]$, con $\underline{v} \geq 0$. Esta distribución tiene una densidad f_i que es positiva y está acotada en todo el soporte de la distribución. Las valoraciones de los distintos oferentes se distribuyen de forma independiente. Se trata, en suma, de un caso con valores privados: la disposición a pagar de cada oferente depende solamente de su propia información privada, y no de la que posean sus rivales.

Todos los participantes en la subasta son neutrales al riesgo. De no existir favoritismo el vendedor deseará maximizar su ingreso esperado. La utilidad de un oferente i con valoración v_i será de

$$h_i(v_i)v_i - p_i(v_i)$$

donde $h_i(v_i)$ es la probabilidad con la que obtiene el objeto cuando su valoración es v_i, en tanto $p_i(v_i)$ es el precio esperado que deberá pagar dada su valoración.

El vendedor empleará una subasta. En términos formales, una subasta está dada por una terna $((B_i)_{i=1}^N, \pi, \mu)$. B_i es el conjunto de ofertas posibles del agente i. $\pi : \times_{i=1}^N B_i \rightarrow \Delta$ es una regla de asignación, donde Δ es el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre el conjunto de compradores potenciales, $\{1,\ldots,N\}$ Finalmente, $\mu : \times_{i=1}^N B_i \rightarrow \mathrm{R}^N$ es una regla de pago. Cada agente, entonces, realiza una oferta $b_i \in B_i$. Para cada vector de ofertas $(b_1,\ldots,b_N)$, $\pi_i(b_1,\ldots,b_N)$ especifica con qué probabilidad ganará el agente i y $\mu_i(b_1,\ldots,b_N)$ establece qué precio esperado pagará. El vendedor podría, por ejemplo, emplear una subasta de primer precio, en la que gana quien realiza lo oferta más alta y paga una suma

[3] Todos los resultados expuestos aquí, sin embargo, se aplican también al caso de una licitación en la que se debe adquirir un objeto único e indivisible.

[4] Como se mencionó arriba, el número de participantes se endogeneizará en la sección 6.

igual a la oferta que realizó (y los demás oferentes no pagan ni reciben dinero). Formalmente,[5]

$$\pi_i(b_1,\ldots,b_N) = \begin{cases} 1 & \text{si } b_i > \max_{j\neq i} b_j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\mu_i(b_1,\ldots,b_N) = \begin{cases} b_i & \text{si } b_i > \max_{j\neq i} b_j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Cada formato posible de subasta da lugar a un juego con información incompleta. En dicho juego, cada agente i debe elegir una estrategia de oferta; es decir, una función $\beta_i : [\underline{v}, \overline{v}] \to B_i$ que, para cada valoración posible v_i, asigne la suma $\beta_i(v_i)$ que ofrecerá. Dado un formato de subasta $((B_i)_{i=1}^N, \pi, \mu)$, los oferentes se comportarán según un equilibrio bayesiano de Nash $(\beta^*_1, \ldots, \beta^*_N)$ del juego con información incompleta que la subasta genera.

El contexto planteado constituye el caso más sencillo analizado por la teoría de subastas: un único objeto a la venta, y valores privados independientes con neutralidad al riesgo. Es a este caso simple que, en lo siguiente, agregaremos la posible existencia de favoritismo. Antes, sin embargo, examinaremos el diseño óptimo para el vendedor de subastas discriminatorias en situaciones enmarcadas en este caso simple y en las que el favoritismo está ausente.

3. La subasta óptima sin favoritismo

En el contexto descripto arriba, el vendedor desea emplear la subasta que maximice su ingreso esperado. Aproximadamente treinta años atrás, en Myerson (1981) y Riley y Samuelson (1981), se identificó el formato óptimo de subasta para el vendedor. Describimos someramente su obtención a continuación.

El problema de caracterizar la subasta óptima podría ser muy complejo. Hallarla implica, en primer lugar, anticipar para cada formato posible de subasta cuál será el comportamiento de equilibrio de los agentes en el juego que la subasta genera. Luego, se debería comparar los ingresos esperados que reporta al vendedor cada uno de dichos formatos. Afortunadamente, esta tarea potencialmente inabarcable

[5] En caso de empate, podemos suponer que el ganador se elige aleatoriamente. Dado que los empates ocurren, en equilibrio, con probabilidad nula (dado que el equilibrio se da en estrategias estrictamente crecientes) este supuesto es irrelevante.

se ve simplificada por lo que en el análisis del diseño de mecanismos se conoce como el *principio de revelación*. No es este el ámbito adecuado para un desarrollo detallado del diseño de mecanismos en general y del principio de revelación en particular. Ensayaremos, entonces, una presentación mínima, en el marco del problema que nos ocupa.

Una subasta $((B_i)_{i=1}^N, \pi, \mu)$ es un caso particular de lo que en la teoría del diseño de mecanismos se conoce como *mecanismo indirecto*. Los agentes eligen mensajes (en nuestro caso, ofertas), y el mecanismo determina una asignación sobre la base del vector de mensajes recibido. Un mecanismo es *directo* si los mensajes que deben seleccionar los agentes son reportes de su información privada. En nuestro contexto, un mecanismo directo solicita a los agentes que reporten sus valoraciones.

Definamos entonces un mecanismo directo apropiado para nuestro caso. Naturalmente, cada agente reporta una valoración en el conjunto $[\underline{v}, \overline{v}]$. El mecanismo directo está entonces dado por

$$H_i(\tilde{v}_1,...,\tilde{v}_N),\ P_i(\tilde{v}_1,...,\tilde{v}_N)$$

$i = 1,\ldots,N$. $H_i(\tilde{v}_1,...,\tilde{v}_N)$ (respectivamente, $P_i(\tilde{v}_1,...,\tilde{v}_N)$) es la probabilidad con la que i gana (respectivamente, el precio esperado que i paga) cuando el vector de valoraciones reportado es $(\tilde{v}_1,...,\tilde{v}_N)$. Análogamente a lo descripto arriba para mecanismos indirectos, un mecanismo directo genera un juego. Por consiguiente, los agentes participantes reportarán sus tipos, no necesariamente de forma veraz, jugando un equilibrio bayesiano de Nash de dicho juego. Un *mecanismo directo de revelación* es un mecanismo directo en el que, en un equilibrio bayesiano de Nash, todos los agentes reportan óptimamente sus verdaderas valoraciones, de modo que $(\tilde{v}_i = v_i)$ para todo i.

El principio de revelación establece que cualquier resultado que el vendedor puede lograr a través de una subasta, como caso particular de mecanismo indirecto, es también obtenible para él a través de un mecanismo directo de revelación. A la hora de caracterizar, por ejemplo, el máximo ingreso esperado alcanzable para el vendedor mediante una subasta, podemos entonces limitarnos a identificar el máximo ingreso esperado obtenible mediante un mecanismo directo de revelación.

Por consiguiente, el vendedor elegirá $H_i(v_1,\ldots,v_N)$, $P_i(v_1,\ldots,v_N)$, $i = 1,\ldots,N$. Sean $h_i(v_i) = E_{v-i}[H_i(v_1,...,v_N)]$, $p_i(v_i) = E_{v-i}[P_i(v_1,...,v_N)]$. Coincidiendo con lo expresado en la sección previa, $h_i(v_i)$ es la probabilidad con la que un oferente con valoración v_i obtendrá el objeto, dado que ignora las valoraciones de sus rivales.

Análogamente, $p_i(v_i)$ es el precio esperado que pagará. La utilidad esperada que obtendrá el agente i si anuncia una valoración v_i cuando su verdadera valoración es v_i' será $\tilde{U}_i(v_i, v_i') = h_i(v_i')v_i - p_i(v_i')$. Sea $U_i(v_i) = h_i(v_i)v_i - p_i(v_i)$ su utilidad esperada cuando anuncia su verdadera valoración. Restringir el análisis a mecanismos directos de revelación impone, entonces, las siguientes restricciones de *compatibilidad con los incentivos*: $U_i(v_i) \geq \tilde{U}_i(v_i, v_i')$ para todo i, para todo $v_i, v_i' \in [\underline{v}, \bar{v}]$.

Podemos ahora plantear el problema que debe resolver un vendedor que desea maximizar su ingreso esperado. Se trata de

$$\max_{\{H_i(.),P_i(.)\}_{i=1}^N} \sum_{i=1}^N \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} p_i(v_i) f_i(v_i) dv_i$$

sujeto a

$U_i(v_i) \geq \tilde{U}_i(v_i, v_i')$ para todo i, para todo v_i, v_i'
$U_i(v_i) \geq 0$ para todo i, para todo v_i

El segundo conjunto de restricciones, de *participación*, refleja que no puede imponerse una utilidad esperada negativa a un oferente: su participación es voluntaria.

Este problema es standard en la literatura, y también lo es su resolución. Sea $\tilde{v}_i(v_i)$ la valoración que el oferente i anuncia óptimamente cuando su verdadera valoración es v_i. La compatibilidad con los incentivos implica que $\tilde{v}_i(v_i) = v_i$ y $U_i(v_i) = \tilde{U}_i(v_i, \tilde{v}_i(v_i))$ para todo i, v_i. Entonces, por el teorema de la envolvente,

$$U_i'(v_i) = \frac{\partial}{\partial v_i} \tilde{U}_i(v_i, \tilde{v}_i(v_i)) = h_i(v_i).$$

De ello se deriva que, para todo i, v_i,

$$U_i(v_i) = \int_{\underline{v}}^{v_i} h_i(s) ds + U_i(\underline{v}).$$

Asimismo, dada la función objetivo del vendedor, en la solución debe cumplirse $U_i(\underline{v}) = 0$ para todo i, por lo que, recurriendo a la definición de $U_i(v_i)$,

$$p_i(v_i) = h_i(v_i)v_i - \int_{\underline{v}}^{v_i} h_i(s) ds$$

El ingreso del vendedor depende exclusivamente de la regla de asignación. Una vez dada la regla, las restricciones de compatibilidad con los incentivos indicarán el precio esperado que debe pagar cada oferente. Reemplazando en la función objetivo del vendedor, obtenemos el siguiente problema

$$\max_{\{H_i(.)\}_{i=1}^N} \sum_{i=1}^N \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} \left[h_i(v_i)v_i - \int_{\underline{v}}^{v_i} h_i(s)ds \right] f_i(v_i)dv_i$$

Integrando por partes, surge

$$\max_{\{H_i(.)\}_{i=1}^N} \sum_{i=1}^N \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} h_i(v_i)J_i(v_i)f_i(v_i)dv_i$$

donde $J_i(v_i) = v_i - \frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$ es la valoración virtual del agente i cuando su valoración real es v_i. Intuitivamente, $J_i(v_i)$ refleja el valor del agente i para el vendedor cuando su valoración real es v_i. Dicho valor es inferior a v_i debido a que, si el vendedor asigna el bien a i con probabilidad positiva en algún caso en el que su valoración real es v_i, para satisfacer las correspondientes condiciones de compatibilidad con los incentivos debe permitirse a las valoraciones de i superiores a v_i alcanzar una utilidad mayor (y el peso de tales valoraciones superiores en relación al peso de v_i es $\frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$). Es usual suponer, en la literatura, que $J_i(v_i)$ es creciente para todo i.[6]

Recordando las definiciones previas, podemos reexpresar el problema del vendedor de la siguiente forma:

$$\max_{\{H_i(.)\}_{i=1}^N} E_{v_1,\dots,v_N} \left[\sum_{i=1}^N H_i(v_1,\dots,v_N)J_i(v_i) \right]$$

La solución de este problema es directa

$$H_i(v_1,\dots,v_N) = \begin{cases} 1 \text{ si } J_i(v_i) > \max\{\max_{j\neq i} J_j(v_j), 0\} \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

Debe ganar con certeza quien tenga la valoración virtual más alta, siempre que dicha valoración sea positiva.[7] Si ninguna valoración virtual es positiva, entonces

---

[6] El caso en el que las valoraciones virtuales crecen con las reales se denomina "caso regular".

[7] Una vez más, los empates pueden resolverse de forma aleatoria. Al igual que anteriormente, los empates ocurren, de emplearse el mecanismo óptimo, con probabilidad nula.

el vendedor debe conservar el objeto. Los pagos que debe efectuar cada oferente i surgirán de obtener $P_i(v_1,\ldots,v_N)$ a partir de las condiciones de compatibilidad con los incentivos.

Algunas características del mecanismo directo de revelación óptimo merecen ser destacadas. En primer lugar, su implementación es compleja. Cualquier subasta óptima deberá generar la misma regla de asignación a partir de la comparación entre ofertas $b_1,\ldots,b_N$, y deberá excluir a quienes posean valoraciones reales cuyas valoraciones virtuales correspondientes sean negativas. Ello puede lograrse a través de un procedimiento que compare las ofertas para generar la asignación deseada. La exclusión puede realizarse a través de precios de reserva (es decir, ofertas mínimas aceptables) individuales o el cobro de derechos de entrada individuales, no necesariamente iguales entre sí.

Por otra parte, la regla óptima de asignación es ineficiente: es posible que el objeto no termine en manos de quien lo valora más. Ello ocurre, por ejemplo, cuando todas las valoraciones virtuales son negativas. El objeto permanece en manos del vendedor, quien le asigna un valor nulo, al tiempo que las valoraciones reales de los oferentes son positivas. Adicionalmente, es posible que, para dos oferentes i y j, $v_i > v_j$ pero, simultáneamente, $J_i(v_i) < J_j(v_j)$, por lo que j puede ganar aun cuando su valoración no es la más alta entre los oferentes.

La última característica a destacar es la más importante para nuestros propósitos: cualquier subasta óptima es discriminatoria. Claramente, sólo podemos asegurar que la identidad de cada oferente no afectará la comparación de su oferta con las ofertas de sus rivales si nos hallamos en un caso simétrico, con $F_i = F$ para todo i.

Más específicamente, consideremos un caso en el que podemos (al menos parcialmente) ordenar las distribuciones de valoraciones de los participantes. Diremos que la distribución de valoraciones del oferente i, F_i, domina a la distribución de valoraciones del oferente j, F_j, en el sentido de *hazard rate dominance*[8] si

$$\frac{f_i(v)}{1-F_i(v)} \leq \frac{f_j(v)}{1-F_j(v)} \text{ para todo } v.$$

Consideremos un caso con $N = 2$ para simplificar. Que F_i domine a F_j de la forma descripta arriba implica que

[8] La relación de *hazard rate dominance* implica la habitual dominancia estocástica de primer orden.

$$J_i(v) = v - \frac{1-F_i(v)}{f_i(v)} \leq v - \frac{1-F_j(v)}{f_j(v)} = J_j(v) \text{ para todo } v.$$

Si esta desigualdad es estricta para algún v, entonces cuando ambos oferentes valoran el bien en v, ganará el oferente j (si su valoración virtual es positiva). Para valoraciones suficientemente cercanas entre sí, si hay un ganador será j, aun cuando su valoración sea inferior a la de i.

McAfee y McMillan (1989) y Branco (1994) emplean la construcción de la subasta óptima para examinar la deseabilidad de la discriminación entre oferentes domésticos y oferentes extranjeros en licitaciones públicas.[9] En concreto, examinan una subasta organizada por el sector público en la que N_1 participantes son nacionales (con valoraciones distribuidas según F_1), y N_2 son extranjeros (con valoraciones distribuidas según F_2). Definamos $\gamma(v)$ como la función tal que $J_1(\gamma(v)) = J_2(v)$. Es decir, $\gamma(v)$ es la valoración de un oferente doméstico que un participante extranjero con valoración v debe derrotar para ganar. Si $\gamma(v) > v$, los oferentes domésticos reciben un tratamiento más favorable que los extranjeros, algo no inusual en subastas organizadas por los sectores públicos.[10]

Entonces, el vendedor puede emplear una subasta discriminatoria para maximizar su ingreso esperado. Sin embargo, aquí estamos interesados en la discriminación cuando pueda surgir como consecuencia de la existencia de favoritismo. La discriminación con el objetivo usual, de maximización del ingreso esperado del vendedor, solamente puede ocurrir, en el caso aquí tratado, si existe asimetría. Es decir, si las distribuciones de las valoraciones no coinciden entre los distintos oferentes.

4. La subasta óptima con favoritismo

En lo que sigue, caracterizaremos la subasta óptima para un vendedor que valora positivamente el bienestar de algunos oferentes. Para simplificar, nos concentraremos en

---

[9] El caso estudiado en ambos trabajos corresponde a compras públicas, por lo que presentamos aquí su argumento modificado para una subasta en la que se vende un objeto.

[10] Branco (2002) extiende el análisis al caso en el que los oferentes pueden incrementar sus valuaciones ejerciendo un esfuerzo no observable para el subastador (es decir, agregando un problema de riesgo moral a nuestro contexto, que es de selección adversa). Su trabajo comprueba que el problema de riesgo moral no modifica la regla de asignación óptima, sino solamente los desembolsos que debe efectuar cada participante.

un caso específico: el vendedor desea maximizar la suma de su ingreso esperado y las utilidades de los oferentes favoritos. Los resultados pueden extenderse fácilmente al caso en el que el vendedor valore menos el bienestar de un participante favorito que el suyo propio. En tal caso, maximizaría una suma ponderada, en la que los pesos correspondientes a los oferentes favoritos serían menores que el peso otorgado al ingreso esperado. Se trata de una variante del análisis inicialmente presentado en Naegelen y Mougeot (1998).

Sin perder generalidad, supongamos que los oferentes $1,\dots,t$ son favoritos, en tanto los oferentes $t+1,\dots,N$ no lo son, con $t \geq 1$. Manteniendo la notación empleada en la sección previa, el problema del vendedor en este nuevo contexto se reduce a

$$\max_{\{H_i(.),P_i(.)\}_{i=1}^N} \sum_{i=1}^N \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} p_i(v_i) f_i(v_i) dv_i + \sum_{i=1}^t \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} U_i(v_i) f_i(v_i) dv_i$$

sujeto a

$U_i(v_i) \geq \widetilde{U}_i(v_i, v_i')$ para todo i, para todo v_i, v_i'
$U_i(v_i) \geq 0$ para todo i, para todo v_i

Este problema puede resolverse de una manera análoga a la seguida en la sección previa. Se obtiene de tal forma que

$$U_i(v_i) = h_i(v_i) v_i - p_i(v_i) = \int_{\underline{v}}^{v_i} h_i(s) ds$$

para todo i. Dado que, en la solución, $U_i(\underline{v}) = 0$ para todo $i > t$,[11] reemplazando en la función objetivo e integrando por partes el problema del vendedor se transforma en

$$\max_{\{H_i(.)\}_{i=1}^N} \sum_{i=1}^t \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} h_i(v_i) v_i f_i(v_i) dv_i + \sum_{i=t+1}^N \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} h_i(v_i) J_i(v_i) f_i(v_i) dv_i$$

---

[11] $U_i(\underline{v})$ puede ser nulo o positivo en la solución para $i \leq t$. Dado que el vendedor maximiza la suma de su utilidad y las utilidades de aquellos a quienes favorece, cuánto pagan estos últimos es irrelevante para él (en la medida en que se mantenga la compatibilidad con los incentivos). Sin embargo, existe una solución en la que $U_i(\underline{v}) = 0$ para todo $i \leq t$.

o bien

$$\max_{\{H_i(.)\}_{i=1}^N} E_{v_1,\ldots,v_N}\left[\sum_{i=1}^{t} H_i(v_1,\ldots,v_N)v_i + \sum_{i=t+1}^{N} H_i(v_1,\ldots,v_N)J_i(v_i)\right]$$

La regla de asignación que resuelve este problema es muy sencilla.[12] Para $i \le t$,

$$H_i(v_1,\ldots,v_N) = \begin{cases} 1 \text{ si } v_i > \max\{\max_{j\le t, j\ne i} v_j, \max_{j>t} J_j(v_j)\} \\ 0 \text{ si no} \end{cases} \tag{1}$$

y, para $i > t$,

$$H_i(v_1,\ldots,v_N) = \begin{cases} 1 \text{ si } J_i(v_i) > \max\{\max_{j\le t} v_j, \max_{j>t, j\ne i} J_j(v_j)\} \\ 0 \text{ si no} \end{cases} \tag{2}$$

En este caso, el objeto se vende con certeza, una consecuencia natural de la función objetivo del vendedor y de haber supuesto que éste adjudica valor nulo al objeto en venta. Los desembolsos esperados de los oferentes, una vez más, surgen de la compatibilidad con los incentivos.

Aparece en la solución una nueva forma de discriminación. Las valoraciones reales de los oferentes favoritos son comparadas con las valoraciones virtuales de los participantes no favoritos. Dado que, si $v < \bar{v}$, $v > J_i(v)$ para todo i, como es natural el vendedor trata menos favorablemente a los oferentes cuyas utilidades no ingresan en su función objetivo. Esta forma de discriminación, desde ya, *se genera aun en el caso simétrico*.

La implementación de un mecanismo de este tipo, una vez más, es compleja. Tomemos un caso simétrico. De haber un único oferente favorito, el vendedor podría, por ejemplo, solicitar a dicho oferente que anuncie su valoración (directamente o a través de una oferta). Luego debería emplear una subasta inglesa[13] entre los oferentes no favoritos con precios de reserva individuales que garanticen que las valoraciones virtuales de quienes participan en la subasta superen, si ganan, la valoración real del oferente favorito.

---

[12] Los empates, una vez más, pueden resolverse aleatoriamente y ocurren con probabilidad nula.

[13] La subasta inglesa es el formato dinámico comúnmente empleado en remates: los participantes emiten ofertas derrotando a las ofertas previamente realizadas. Gana quien emite una oferta no derrotada, y paga una suma igual a su oferta.

5. Una forma práctica de favoritismo: el *right of first refusal*

El *right of first refusal*[14] (ROFR) constituye una forma práctica de favorecer a uno de los oferentes. Se emplea ampliamente en diversas operaciones reales y financieras, entre ellas la compraventa de acciones, los contratos de alquiler, la disolución de sociedades y la contratación de deportistas profesionales. Walker (1999) provee una larga lista de ejmplos del uso de esta práctica.

Una cláusula de ROFR concede a quien lo posee, en una subasta, el derecho a igualar la oferta más alta realizada por un oferente rival y ganar.[15] En esencia, este derecho convierte a una subasta en la que las ofertas son emitidas simultáneamente en otra en la que se las emite de modo secuencial, con el oferente favorito actuando luego de que todos sus rivales ya lo han hecho. Una cláusula de este tipo puede agregarse a cualquier formato de subasta.

Dada la importancia práctica del empleo de este derecho, existe una corriente en la literatura que ha estudiado y estudia las consecuencias que su uso tiene sobre los resultados de la subasta y sobre el bienestar de quienes participan en ella. Una parte de dicha literatura deriva condiciones bajo las cuales el empleo de un ROFR genera un resultado mejor que una subasta que no incluya dicho derecho, al menos para el vendedor y/o para el oferente que se ve favorecido de esta manera. Choi (2009), por ejemplo, demuestra que, si $N = 2$, agregar un ROFR a una subasta de primer precio[16] genera un excedente esperado conjunto más alto para el vendedor y el oferente favorito. Sin embargo, su resultado no se generaliza a $N \geq 2$ a menos que se adopten supuestos adicionales sobre las distribuciones de las valoraciones de los agentes.

En un sentido similar, Burguet y Perry (2009) examinan el caso de una *subasta inglesa modificada*. Se trata de una subasta inglesa en la que participan los oferentes no favoritos. El ganador de dicha subasta inglesa puede luego realizar una oferta superior a aquella con la que ganó, para que dicha oferta sea presentada a quien posee el ROFR. Éste, naturalmente, puede elegir igualarla o no. Se trata de

---

[14] En el caso de licitaciones, en las que se adquiere un objeto, se suele emplear la expresión *meet-the-competition clause*. Algunas traducciones frecuentemente empleadas al referirse al ROFR son *derecho de preferencia*, *derecho de opción de compra (o venta)* y *derecho de adquisición (o venta) preferente*.

[15] Como veremos más adelante, existen variantes alternativas para estas cláusulas.

[16] Con $N = 2$, otros formatos de subasta, como el de segundo precio, se reducen a una subasta de primer precio al emplearse un ROFR. Al no participar de la subasta original, el oferente favorito espera la oferta de su rival y decide si la iguala o no.

un formato adecuado para reflejar situaciones en las que el vendedor carece de capacidad de compromiso con el mecanismo de venta que anuncia, por lo que se permite que algún oferente modifique su oferta original para competir con el oferente favorito. En este contexto, Burguet y Perry comprueban que la existencia del ROFR eleva el excedente esperado conjunto del vendedor y del oferente favorito.

Lee (2008) demuestra que, con dos oferentes asimétricos, el vendedor puede incrementar su ingreso esperado confiriendo un ROFR al participante más débil en una subasta de primer precio. Se trata de una forma de favorecer que genera una subasta discriminatoria a fin de incrementar el ingreso esperado, al estilo de la derivación de la subasta óptima sin favoritismo realizada aquí previamente.

Existe otra porción de la literatura que obtiene condiciones bajo las cuales el ROFR no genera resultados deseables. Bikhchandani, Lippman y Ryan (2005), por ejemplo, examinan el ROFR en el contexto de una subasta simétrica de segundo precio. Comprueban que, bajo valores privados, y con $N \geq 3$, el ROFR genera un aumento en el excedente esperado del oferente favorito que iguala exactamente a la pérdida de excedente esperado para el vendedor. Con valores interdependientes, el excedente esperado conjunto del vendedor y el oferente favorito puede crecer o caer. Grosskopf y Roth (2009) analizan una forma algo diferente de ROFR[17] y concluyen que su uso puede incluso ser desfavorable para quien posee dicho derecho.

Como puede observarse, una pregunta que la literatura se plantea es si un ROFR puede beneficiar en conjunto al vendedor y al oferente favorito. Arozamena y Weinschelbaum (2006), partiendo de este interés, plantean la cuestión de si es posible que un ROFR forme parte de un mecanismo óptimo para la coalición formada por el vendedor y un oferente. En otros términos, se preguntan si es posible maximizar el excedente conjunto del vendedor y el oferente favorito recurriendo a un mecanismo de cualquier tipo (en particular, a una subasta) que incluya una cláusula de ROFR.

Para examinar esta posibilidad, tomemos el contexto planteado en la sección previa, considerando ahora que existe un único oferente preferido (quien, sin pérdida de generalidad, es el participante 1). La regla de asignación óptima es, entonces, la que surge de (1) y (2) en el caso particular en el que $t = 1$. Es decir,

---

[17] Examinan el denominado *before and after ROFR*. En tal caso, el vendedor realiza una oferta al comprador favorito. Si éste la rechaza, el vendedor puede negociar con otros compradores, y puede venderles el objeto a un precio igual o mayor que aquel rechazado por el favorito. Pero si desea venderlo a un precio menor, el favorito conserva el derecho a igualar el precio y adquirir el objeto.

$$H_1(v_1,...,v_N)=\begin{cases}1 \text{ si } v_1>\max_{j>1} v_j \\ 0 \text{ si no}\end{cases} \quad (3)$$

y, para $i > 1$,

$$H_i(v_1,...,v_N)=\begin{cases}1 \text{ si } J_i(v_i)>\max\{v_1,\max_{j>1,j\neq i} J_j(v_j)\} \\ 0 \text{ si no}\end{cases} \quad (4)$$

¿Puede entonces generarse esta asignación mediante algún mecanismo que incluya un ROFR?

Imaginemos que se aplica un ROFR. El oferente 1, entonces, tendrá un comportamiento óptimo muy sencillo de caracterizar. El mecanismo que se emplee y al cual el ROFR se agregue generará una oferta final con la que el participante 1 deberá competir. Entonces, contará con una estrategia dominante: si dicha oferta final se halla por debajo de su valoración, v_1, la igualará y ganará la subasta. Si la oferta final resulta inferior a v_1, decidirá no igualarla y perderá. Por consiguiente, si un mecanismo con una cláusula de ROFR ha de generar la asignación descripta en (3) y (4), la oferta final que debe surgir del mecanismo (y que el agente 1 puede igualar) debe siempre ser

$$\max_{i>1} J_i(v_i).$$

De tal forma, ganará el oferente 1 solamente cuando su valoración real supere a la máxima valoración virtual de un rival. En caso contrario, ganará el participante no favorito con la máxima valoración virtual, tal cual exige la asignación óptima.

Para que la oferta final sea la máxima valoración virtual de un oferente favorito en cualquier circunstancia, se requiere que, para cualquier $i > 1$, siempre que el oferente i obtenga el objeto en venta,

$$P_i(v_1,...,v_N)=J_i(v_i).$$

Sea

$$l_i(v_i)=E_{v_{-i}}\left[P_i(v_i,v_{-i})\,|\,J_i(v_i)<\max\{v_1,\max_{j\neq i} J_j(v_j)\}\right],$$

es decir, el precio que el oferente i con valoración v_i paga, en términos esperados, dado que no gana la subasta. La esperanza incondicional del precio que pagará el oferente i con valoración v_i será, entonces

$$p_i(v_i) = h_i(v_i)J_i(v_i) + [1 - h_i(v_i)]l_i(v_i). \tag{5}$$

Ahora bien, según lo examinado en la sección 3, la compatibilidad con los incentivos requiere que

$$p_i(v_i) = h_i(v_i)v_i - \int_{\underline{v}}^{v_i} h_i(s)ds. \tag{6}$$

¿Son (5) y (6) compatibles? Con $l_i(v_i) = 0$ (es decir, si solamente paga el oferente ganador) ello no es posible, dado que en general

$$\int_0^{v_i} h_i(s)ds \neq h_i(v_i)\frac{1 - F_i(v_i)}{f_i(v_i)}.$$

El argumento se extiende de manera directa a los casos en los que $l_i(v_i) \neq 0$.

Concluimos, entonces, que ningún mecanismo (en particular, ningún formato de subasta) que incluya una cláusula de ROFR puede maximizar el excedente conjunto del vendedor y un comprador favorito. Como expusimos en la sección previa, existen mecanismos que maximizan dicho excedente, pero un ROFR no puede formar parte de ninguno de ellos. De emplearse, entonces, el ROFR deberá estar motivado por otras razones, que probablemente excedan el marco de la interacción entre el vendedor y los compradores en una única subasta.[18]

6. El favoritismo y la entrada de compradores potenciales[19]

La entrada de compradores potenciales a una subasta, como ocurre en cualquier mercado, es crucial para su desempeño. De hecho, según Klemperer (2004), “los aspectos más importantes en el diseño de subastas son los temas centrales

[18] Es posible, por ejemplo, que el favoritismo surja como una forma, establecida en una etapa previa, de motivar a un potencial comprador a invertir en su relación con el vendedor.

[19] Esta sección está basada en Arozamena y Weinschelbaum (2011).

de la política de defensa de la competencia –la prevención del comportamiento colusivo, depredador y disuasivo de la entrada."[20]

Hasta ahora, hemos estudiado al favoritismo en subastas considerando que el número de participantes está fijo. Si la participación es costosa, sin embargo, favorecer a algunos oferentes en desmedro de otros puede desalentar el ingreso al mercado de compradores potenciales no favoritos. De hecho, Arozamena y Weinschelbaum (2005) comprueban que otorgar un ROFR a un comprador potencial reduce el número de participantes en la subasta. La pregunta que surge naturalmente es cómo afecta el hecho de endogeneizar el número de participantes al formato óptimo de subasta en el caso en el que existe favoritismo.

Para aproximarnos a una respuesta, es imprescindible contar con una forma de modelar la decisión de entrada. Existen distintas posibilidades al respecto. En todas ellas, la participación en la subasta implica algún costo para quien decide ingresar. El aspecto diferenciador está dado por la información con la que un participante potencial cuenta al momento de tomar su decisión de entrada. Una rama de la literatura supone que dicha decisión se toma cuando cada participante potencial conoce su propia valoración del objeto en venta, tal como ocurre en Samuelson (1985), Stegeman (1996), Menezes y Monteiro (2000) y Celik y Yilankaya (2009). El costo de entrada suele asociarse, en esta interpretación, al costo de tiempo y recursos que conlleva la participación en una subasta o licitación. Una rama diferente considera que la decisión se toma sin conocer tal valoración. Este supuesto se adopta, por ejemplo, en McAfee y McMillan (1987), Engelbrecht-Wiggans (1987, 1993), Levin y Smith (1994) y Ye (2004). En este caso, el costo de entrada suele interpretarse como el costo resultante de averiguar la propia valoración: es posible, tal vez, que se deba realizar una investigación de mercado para obtener dicho valor. Adoptaremos aquí este último enfoque para modelar la decisión de entrada en la subasta.

Tal como ocurre cuando el número de oferentes está fijo, en una subasta con entrada endógena el vendedor deseará discriminar a favor de los participantes más débiles. A las razones ya enunciadas para la optimalidad de este comportamiento, la endogeneidad de la decisión de participar agrega una nueva. Es menos probable que los oferentes potenciales más débiles ingresen, por lo que utilizar una subasta que los trate más favorablemente puede inducirlos a entrar, y de ese modo incrementar el número de oferentes y con él la competencia. Una vez más, sin embargo, estamos interesados en el empleo de subastas discriminatorias solamente en la

[20] Traducción de los autores.

medida en que esa discriminación se deba a la presencia de favoritismo. Por consiguiente, tomaremos un caso simétrico, en el que sin favoritismo –aun cuando el número de oferentes sea endógeno– un vendedor que maximiza su ingreso esperado no desearía discriminar.

Consideraremos que existen N participantes potenciales. Cada uno de ellos puede participar en la subasta pagando un costo de entrada $k > 0$, el mismo para todos los oferentes potenciales.[21] Un oferente i aprende su valoración v_i luego de ingresar. Ex ante, v_i se distribuye según la función F, simétrica entre oferentes. A continuación, caracterizaremos el mecanismo que maximiza el excedente conjunto del vendedor y de un oferente favorito. Una vez más, sin pérdida de generalidad asignaremos al oferente 1 el rol de favorito.[22]

En primer término, el vendedor anuncia un mecanismo, y luego los compradores potenciales simultáneamente toman sus decisiones de entrada. Siguiendo a McAfee y McMillan (1987), nos concentraremos en los equilibrios en estrategias puras del juego estático de entrada entre los oferentes potenciales. Se trata de equilibrios asimétricos.[23] Sea $\mathbf{B} \subseteq \{1,...,N\}$ el conjunto de compradores potenciales que ingresan a la subasta. Naturalmente, el vendedor puede elegir un mecanismo que condicione el resultado de la subasta a la identidad de los participantes (es decir, a $\mathbf{B}$). Por ello, debe anunciar una colección de funciones.

$$H_i^{\mathbf{B}}((v_i)_{i\in\mathbf{B}}),\ P_i^{\mathbf{B}}((v_i)_{i\in\mathbf{B}}),\ \mathbf{B}\in 2^{\{1,...,N\}}$$

donde $H_i^{\mathbf{B}}((v_i)_{i\in\mathbf{B}})$ es la probabilidad con la que, si ingresa, el participante $i \in \mathbf{B}$ obtendrá el objeto en venta cuando el conjunto de ingresantes es $\mathbf{B}$ y las valoraciones de los ingresantes están dadas por $(v_i)_{i\in\mathbf{B}}$. Análogamente, $P_i^{\mathbf{B}}((v_i)_{i\in\mathbf{B}})$ es el precio que i debe pagar en las mismas circunstancias. Dado este mecanismo, la utilidad esperada de i (bruta del costo de entrada) cuando ingresa y espera que, además, participen los restantes oferentes potenciales en el conjunto $\mathbf{B}$ es

$$U_i(v_i,\mathbf{B}) = h_i(v_i,\mathbf{B})v_i - p_i(v_i,\mathbf{B}),$$

---

[21] Suponemos que N es suficientemente alto para que, en equilibrio, sea imposible que todos los oferentes potenciales ingresen a la subasta con certeza.

[22] Nuestros resultados se generalizan a los casos en los que existe más de un oferente favorecido, o el peso que el vendedor asigna al beneficio de quienes favorece en su propia función objetivo es menor que 1.

[23] Levin y Smith (1994), por el contrario, examinan el equilibrio simétrico, en estrategias mixtas, de dicho juego.

donde $h_i(v_i,\mathbf{B})=E_{v_{-i}}[H_i^{\mathbf{B}}((v_j)_{j\in\mathbf{B}})]$ y $p_i(v_i,\mathbf{B})=E_{v_{-i}}[P_i^{\mathbf{B}}((v_j)_{j\in\mathbf{B}})]$, $i\in\mathbf{B}$. Una vez más, el mecanismo anunciado por el vendedor debe satisfacer las restricciones correspondientes de compatibilidad con los incentivos

$$U_i(v_i,\mathbf{B})\geq h_i(v_i',\mathbf{B})v_i-p_i(v_i',\mathbf{B}) \text{ para todo } \mathbf{B}, \text{ para todo } i\in\mathbf{B}, \text{ para todo } v_i,v_i' \tag{7}$$

y de participación

$$U_i(v_i,\mathbf{B})\geq 0 \text{ para todo } \mathbf{B}, \text{ para todo } i\in\mathbf{B}, \text{ para todo } v_i. \tag{8}$$

En el caso de estas últimas restricciones, debe destacarse que, incluso luego de haber pagado el costo de entrada, suponemos que un oferente puede decidir no participar de la subasta. La utilidad esperada correspondiente a cualquier valoración, por consiguiente, no puede ser negativa.

El conjunto de participantes de equilibrio, $\mathbf{B}^*$, cumplirá las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} &\int_{\underline{v}}^{\bar{v}} U_i(v_i,\mathbf{B}^*)f(v_i)dv_i \geq k, \forall i\in\mathbf{B}^* \\ &\int_{\underline{v}}^{\bar{v}} U_j(v_j,\mathbf{B}^*\cup\{j\})f(v_j)dv_j \leq k, \forall j\notin\mathbf{B}^* \end{aligned} \tag{9}$$

Es decir que, en equilibrio, todos los oferentes que participan contarán con una utilidad esperada ex ante que al menos cubra su costo de entrada, en tanto todos quienes permanecen fuera de la subasta no podrían obtener una utilidad esperada superior a dicho costo en caso de ingresar.

El problema del vendedor que desea maximizar la suma de su ingreso esperado y la utilidad esperada del oferente 1 está dado por

$$\max_{\substack{H_i^{\mathbf{B}}(v_1,\ldots,v_n),P_i^{\mathbf{B}}(v_1,\ldots,v_n) \\ \mathbf{i}\in B,\mathbf{B}\in 2^{\{1,\ldots,N\}}}} \sum_{i\in\mathbf{B}^*}\int_{\underline{v}}^{\bar{v}} p_i(v_i,\mathbf{B}^*)f(v_i)dv_i+\int_{\underline{v}}^{\bar{v}} U_1(v_1,\mathbf{B}^*)f(v_1)dv_1-k$$

sujeto a (7), (8) y (9).[24] Se trata, en suma, del problema planteado en la sección previa, generalizado para permitir que el conjunto de ingresantes surja de un equilibrio en el juego simultáneo de entrada entre todos los compradores potenciales.

---

[24] Estamos suponiendo aquí, sin perder generalidad, que el oferente 1 ingresa con certeza. Si no lo hiciese, el segundo y tercer términos de la función objetivo del vendedor desaparecerían.

Si $\mathbf{B}^*$ estuviese determinado exógenamente, como sabemos, la subasta óptima para el vendedor sería discriminatoria. La libre entrada de participantes modifica este resultado de manera sustancial. Específicamente, la regla de asignación que maximiza el excedente esperado conjunto del vendedor y del oferente 1 es una regla no discriminatoria. Por ejemplo, una subasta de primer precio con un precio de reserva igual al valor del objeto para el vendedor (que aquí supusimos nulo) resulta óptima en vista de la función objetivo planteada para el vendedor. En suma, todos los oferentes son tratados exactamente de la misma forma, independientemente de si son favoritos o no.

Comprobar la validez de este resultado es muy simple, y puede lograrse sin recurrir a los pasos planteados en las secciones previas para obtener los mecanismos óptimos para el vendedor. Puede emplearse, en cambio, una vía indirecta. Temporariamente, consideremos que el favoritismo está ausente. El valor esperado del juego (es decir, el excedente total generado en la subasta) está dado por la valoración esperada del oferente ganador menos el costo total de entrada pagado por quienes ingresan a la subasta. Se trata, entonces, de

$Ev - \#(\mathbf{B}^*)k$[25]

A su vez, esta magnitud debe igualar a la suma del ingreso esperado del vendedor y las utilidades esperadas de cada uno de los participantes. McAfee y McMillan (1987) comprueban que la regla de asignación que maximiza el excedente total esperado de la subasta al generar un comportamiento óptimo de entrada consiste en asignar el objeto al oferente ingresante que cuente con la valoración más alta. Si ignoramos que el número de firmas ingresantes debe ser entero, una subasta de primer precio o de segundo precio con un precio de reserva igual al valor del objeto para el vendedor maximiza el valor esperado del juego, y el vendedor recibe todo el excedente total esperado que se genera. Si nos restringimos, más razonablemente, a que el número de ingresantes deba ser entero, el vendedor aún puede absorber todo el excedente esperado que se genera: solamente debe cobrar una tarifa de entrada que equivalga a la utilidad esperada de cada ingresante cuando el número de participantes es el entero más alto que resulte, a la vez, más bajo que el número de ingresantes de equilibrio cuando éste puede ser cualquier número real no negativo. Alternativamente, puede resultar óptimo subsidiar la entrada de modo que el número de ingresantes sea el entero más pequeño que,

---

[25] $\#(B^*)$es la cardinalidad del conjunto B^*.

a la vez, esté por encima del número de equilibrio en un continuo. En cualquier caso, el excedente esperado total corresponde al vendedor.

Solamente resta comprobar que, cuando el vendedor incorpora a su función objetivo el bienestar del participante 1, no puede mejorar este resultado. Pero hacerlo es sencillo. Si el resultado fuera mejorable, el vendedor obtendría más que el máximo valor posible de $Ev - \#(\mathbf{B}^*)k$. Entonces, al menos uno de los participantes debería contar con un excedente esperado negativo, algo claramente imposible dadas las restricciones planteadas.

Puede notarse que, al resolver el problema de esta forma, al vendedor le resulta irrelevante si el participante potencial favorito ingresa a la compulsa o no lo hace. Siempre puede subsidiarlo para que entre –aunque realmente no tenga incentivos para hacerlo– y aun así obtener todo el excedente esperado resultante de la subasta. Ahora bien, si existe discriminación entre los ingresantes, el excedente total esperado cae, y con él decrece la utilidad esperada del vendedor. En particular, entonces, ninguna de las formas de discriminación descriptas, tales como las preferencias de precios o el *right of first refusal*, puede generar un resultado mejor para el vendedor.

7. Conclusiones

El favoritismo es usual en las compras y ventas realizadas mediante licitaciones y subastas, y da lugar a diversas prácticas discriminatorias. En el presente capítulo, hemos examinado en qué medida el favoritismo puede justificar la discriminación y cuál es el formato óptimo de subasta para un vendedor o comprador cuando prefiere algunos participantes a otros.

Nuestras conclusiones dependen claramente del contexto en el que se desarrolle la subasta. Como expusimos en la sección 4, la subasta óptima con favoritismo es efectivamente discriminatoria si el número de oferentes es exógeno. Allí describimos, por otra parte, cuál es la forma exacta de discriminar que el vendedor debería emplear, así como su implementación. Si el número de participantes es endógeno, en cambio, las conclusiones se modifican de manera radical. Con libre entrada, según lo expuesto en la sección 6, es óptimo para el vendedor no discriminar en absoluto, ni fijar un precio de reserva en la subasta que limite el ingreso de participantes potenciales. El efecto negativo de la discriminación sobre el número de oferentes que deciden ingresar a la subasta es siempre más significativo que cualquier beneficio que el vendedor pueda derivar de otorgar ventajas a sus favoritos.

Claramente, nuestra descripción del tema se halla lejos de agotarlo: existen cuestiones prácticas asociadas a la existencia de favoritismo que no están cubiertas por la literatura.[26] Sin embargo, nuestras conclusiones generan al menos una recomendación práctica relevante. Aun sin cuestionar si el favoritismo es razonable o no, sino simplemente tomándolo como dado, el vínculo entre su existencia y la discriminación en subastas y licitaciones no es unívoco. Depende, por el contrario, del contexto de la compra o venta específica a realizar, y cada caso debe ser examinado con cuidado.

Referencias

Arozamena, L., N. Shunda y F. Weinschelbaum (2010): "Optimal Nondiscriminatory Auctions with Favoritism", mimeo, Universidad Torcuato Di Tella y Universidad de San Andrés.

Arozamena, L. y F. Weinschelbaum (2005): "The Effect of Corruption on Bidding Behavior in First-Price Auctions", mimeo, Universidad Torcuato Di Tella y Universidad de San Andrés.

Arozamena, L. y F. Weinschelbaum (2006): "A Note on the Suboptimality of Right-of-First-Refusal Clauses", *Economics Bulletin*, 4, No.24, 1-5.

Arozamena, L. y F. Weinschelbaum (2009): "The Effect of Corruption on Bidding Behavior in First-Price Auctions", *European Economic Review*, 53, 645—657.

Arozamena, L. y F. Weinschelbaum (2011): "On Favoritism in Auctions with Entry", *Economics Letters*, 110, 265-267.

Bikhchandani, S., S. Lippman y R. Ryan (2005): "On the Right-of-First-Refusal", *Advances in Theoretical Economics*, 5, Iss. 1, Article 4.

Branco, F. (1994): "Favoring Domestic Firms in Procurement Contracts", *Journal of International Economics*, 37, 65-80.

Burguet, R. e Y. Che (2004): "Competitive Procurement with Corruption", *RAND Journal of Economics*, 35, 50-68.

Burguet, R. y M. Perry (2007): "Bribery and Favoritism by Auctioneers in Sealed-Bid Auctions", *Contributions to Theoretical Economics*, 7, número 1, artículo 23.

Burguet, R. y M. Perry (2009): "Preferred Suppliers in Auction Markets", *RAND Journal of Economics,* 40, 283-295.

Celentani, M. y J. Ganuza (2002): "Competition and Corruption in Procurement", *European Economic Review*, 43, 1273-1303, 2002.

Celik, G. y O. Yilankaya (2009): "Optimal Auctions with Simultaneous and Costly Participation", *Advances in Theoretical Economics,* 9, número 1, artículo 24.

Choi, A. (2009): "A Rent Extraction Theory of Right of First Refusal", *Journal of Industrial Economics*, 57, 252 - 262.

Compte, O., A. Lambert-Mogiliansky y T. Verdier (2005) "Corruption and Competition in Procurement", *RAND Journal of Economics*, 36, 1-15.

[26] Por ejemplo, es interesante estudiar qué subasta debería emplear un vendedor que (i) cuente con oferentes favoritos, y (ii) no esté en condiciones de discriminar (tal vez por disposiciones legales, como suele ocurrir en el sector público). Al respecto, véase Arozamena, Shunda y Weinschelbaum (2010).

Engelbrecht-Wiggans R. (1987): "Optimal Reservation Prices in Auctions", *Management Science*, 33, 763-770.

Engelbrecht-Wiggans R. (1993): "Optimal Auction Revisited", *Games and Economic Behavior*, 5, 227-239.

Klemperer, P. (2004): "Auctions: Theory and Practice", Princeton University Press.

Krishna, V, (2002): "Auction Theory", Academic Press.

Laffont, J. y J. Tirole (1991): "Auction Design and Favoritism", *International Journal of Industrial Organization*, 9, 9-42.

Lee, J. (2008): "Favoritism in Asymmetric Procurement Auctions", *International Journal of Industrial Organization*, 26, 1407-1424.

Lengwiler, Y. y E. Wolfstetter (2010): "Auctions and Corruption: An Analysis of Bid Rigging by a Corrupt Auctioneer", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 34, 1872-1892.

Levin, D. y J.L. Smith (1994): "Equilibrium in Auctions with Entry", *American Economic Review,* 84, 585-599.

McAfee, R.P. y J. McMillan (1987): "Auctions with Entry", *Economics Letters*, 23, 343-347.

McAfee, R.P. y J. McMillan (1989): "Government Procurement and International Trade", *Journal of International Economics*, 26, 291-308.

Menezes, F. y P.K. Monteiro (2000) "Auctions with Endogenous Participation", *Review of Economic Design,* 5, 71-89.

Menezes, F. y P.K. Monteiro, (2005): "An Introduction to Auction Theory", Oxford University Press.

Menezes, F. y P.K. Monteiro (2006): "Corruption and Auctions", *Journal of Mathematical Economics,* 42, 97-108.

Milgrom, P. (2004): "Putting Auction Theory to Work", Cambridge University Press.

Myerson, R. (1981): "Optimal Auction Design", *Mathematics of Operations Research*, 6, 58-73.

Naegelen, F. y M. Mougeot (1998): "Discriminatory Public Procurement Policy and Cost Reduction Incentives", *Journal of Public Economics*, 67, 349-367.

Riley, J. y W. Samuelson (1981): "Optimal Auctions", *American Economic Review*, 71, 381-392.

Samuelson, W. F. (1985): "Competitive Bidding with Entry Costs", *Economics Letters* 17, 53-57.

Stegeman, M. (1996): "Participation Costs and Efficient Auctions", *Journal of Economic Theory* 71, 228-259.

Vagstad, S., (1995): "Promoting Fair Competition in Public Procurement", *Journal of Public Economics*, 58, 283-307.

Walker, D. (1999) "Rethinking Rights of First Refusal", *Stanford Journal of Law, Business and Finance*, 5, 1-58.

Ye, L. (2004): "Optimal Auctions with Endogenous Entry", *Contributions to Theoretical Economics*, 4, número 1, artículo 8.

BIENES PRIVADOS: REGLAS NO MANIPULABLES*

Alejandro Neme
Instituto de Matemática Aplicada de San Luis
Universidad Nacional de San Luis-CONICET

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es presentar una visión panorámica sobre la literatura de la no-manipulabilidad aplicada al problema de la provisión de bienes privados. La literatura de la no-manipulabilidad se engloba dentro de la Teoría de la Elección Social, la cual estudia el problema de la toma de decisiones colectivas teniendo en cuenta las preferencias de los individuos que forman la sociedad. En los problemas de elección social tenemos un conjunto de alternativas sobre las que los individuos, que constituyen la sociedad (específica de cada problema), tienen preferencias. Es decir, establecen relaciones binarias completas sobre el conjunto de alternativas. La Teoría de la Elección Social estudia el proceso de agregación de las preferencias individuales para tomar una decisión social que satisfaga propiedades deseables. El proceso de agregación de preferencias se define formalmente a través de una función.

Formalmente, la decisión social se representa mediante una función de elección social, también llamada regla (de elección social), que determina una alternativa para cada perfil de preferencias. Un perfil de preferencias expresa las preferencias de todos los individuos que forman la sociedad. Cada función de elección social está definida sobre el conjunto de preferencias posibles que pueden revelar los individuos y que se conoce como el dominio (o dominio de preferencias).

En los problemas de decisión colectiva tenemos contextos diferentes en función del grado de racionalidad exigido a la preferencia social. Si las preferencias sociales son reflexivas, completas y transitivas (al igual que las individuales) estamos en

* Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Universidad Nacional de San Luis a través del proyecto 319502 y por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas CONICET, a través PICT-02114.

el contexto de la función de bienestar social de Arrow, donde se asocia un orden de preferencias reflexivo, completo y transitivo (el social) a cada perfil de preferencias individuales con las mismas propiedades. Estos problemas han sido ampliamente estudiados, sobre todo desde que Arrow formuló su Teorema de Imposibilidad (Arrow, 1963). Si debilitamos la condición de racionalidad sobre la preferencia social y consideramos aciclicidad en vez de transitividad, estamos en el contexto de las funciones de decisión social. En el artículo de Sen (1970), el autor demuestra la imposibilidad de liberalismo (mínimo) Paretiano. Aunque nosotros no analizamos ninguno de estos problemas en el presente artículo.

Las funciones de elección social nos permiten analizar problemas como los siguientes: votaciones, decisiones sobre la provisión de bienes públicos, decisiones sobre la asignación de bienes indivisibles a un conjunto finito de agentes, problemas de reparto de costos, localización de bienes públicos en una ciudad, etc. Un ejemplo de votaciones sería la elección de candidatos a cubrir una plaza de profesor en una universidad. Un ejemplo de provisión de bienes públicos sería la decisión sobre la construcción de un túnel o sobre la cantidad del presupuesto del gobierno destinado a la construcción del túnel. En cuánto a bienes indivisibles, pensemos en la asignación de una computadora de última generación a un profesor de entre los 40 que forman un departamento universitario o en la asignación de un número escaso de becas a algunos de los solicitantes, o también en la asignación de estudiantes universitarios a las distintas universidades, etc. Como ejemplo del problema de reparto de costos, podemos pensar en la visita de un premio Nóbel a varias universidades que tienen que repartirse el costo de su viaje, estancia y honorarios. Por último, como ejemplo de la localización de bienes públicos, consideremos el problema de la localización de dos hospitales en una ciudad, donde las preferencias de los individuos dependerán también de sus costos de transporte. En definitiva, una gran cantidad de recursos escasos se asigna no a través del mercado sino por medio de decisiones de un grupo reducido de agentes (comités, consejos, claustros, etc.). El proceso por el cual se toman estas decisiones puede ser representado por una función de elección social.

Como ya hemos anticipado, en cualquier problema de elección social debemos tener en cuenta, directa o indirectamente, la opinión de los individuos implicados en la decisión. No obstante, las preferencias individuales son, a menudo, información privada y asimétricamente distribuida entre los agentes de la sociedad. No hay ninguna razón para pensar que dichos individuos revelan sus verdaderas preferencias. Un individuo puede mentir si así se asegura una mejor alternativa. Por ejemplo, en votaciones políticas existen votos estratégicos: si alguien sabe que su candidato preferido no va a ganar las elecciones, puede ser mejor para él dar su voto a su segundo mejor candidato. El comportamiento estratégico de los agentes juega un papel crucial en muchos problemas económicos que involucran decisiones sobre bienes privados y/o bienes públicos (pensemos en los ejemplos dados anteriormente). Decisiones colectivas que permitan este tipo de comportamientos pueden resultar insatisfactorias. La propiedad de no-manipulabilidad (en inglés, "strategy-proofness") es la condición más usada en la literatura para evitar tales comportamientos. Esta propiedad asegura que ningún individuo puede cambiar la elección social a su favor, falsificando sus verdaderas preferencias, independientemente de cómo actúen los demás. Otra condición más fuerte es la no-manipulabilidad por coaliciones (en inglés, "coalitional strategy-proofness"), que asegura que la regla será inmune a falsificaciones estratégicas de las preferencias para cualquier coalición de agentes. No obstante, esta condición es innecesariamente fuerte en algunos contextos, pues la cooperación estratégica de un gran número de agentes puede ser bastante difícil. Recientemente, se han analizado en la literatura dos situaciones intermedias de comportamiento estratégico que involucran a pares de agentes: la no-manipulabilidad por pares de agentes (en inglés, "pairwise strategy-proofness"; véase Serizawa, 1998), y la no-manipulabilidad a través de sobornos (en inglés, "bribe-proofness"; véase Schummer, 2000).

El hecho de que una función de elección social sea no manipulable asegura que los individuos no van a conseguir nada mejor mintiendo acerca de sus verdaderas preferencias. Por lo tanto, el comportamiento estratégico de los agentes es inútil. Aparte de las propiedades destinadas a evitar o controlar el comportamiento estratégico de los agentes, existen otros tipos de propiedades sobre las funciones de elección social.[1] Cada problema de decisión tiene unas características y la función de elección social que la representa puede o no satisfacer unas propiedades determinadas.

A continuación presentamos distintas propiedades que una función de elección social puede satisfacer. La más usada en economía normativa es la (Pareto) eficiencia. Establece que, para cualquier resultado de la regla de elección, no existe la posibilidad de mejorar a alguien sin perjudicar a otro individuo. Un segundo tipo son las propiedades de simetría que aseguran un mínimo trato igualitario y equitativo entre los agentes. Las cuatro más usadas (tanto en modelos de bienes públicos como privados) son: la inexistencia de dictadores (un dictador es un

---

[1] En Moulin y Thomson (1996) se presenta una clasificación de todos los tipos de propiedades, especificando sus áreas de aplicación.

individuo que impone a la sociedad su mejor alternativa en el rango; las reglas que cumplen esta propiedad se llaman reglas no dictatoriales), la anonimidad (no importa quién es quién), el tratamiento igual de iguales (los individuos con iguales preferencias deberían recibir la misma cesta o la misma cantidad del bien) y, por último, la simetría (dos individuos con las mismas preferencias deben recibir cestas de consumo indiferentes). Un tercer grupo de propiedades expresa, de diversas maneras, la justicia en la distribución de los recursos. La más común es la propiedad de inexistencia de envidia (en inglés, "envy-freeness"). Esta sostiene que, en la asignación escogida, cualquier individuo prefiere su propia cesta a la de cualquier otro.[2]

Como ya hemos mencionado, dentro de estas propiedades, consideramos la condición de no-manipulabilidad como imprescindible para cualquiera de nuestras funciones de elección social. La razón fundamental es que sin ella, todas las otras propiedades que pueda satisfacer una función de elección social manipulable pierden su sentido: eficiencia, simetría, tratamiento igual de iguales, etc., son propiedades relativas a las verdaderas preferencias.

En este artículo, consideraremos el problema de no-manipulabilidad en contextos con bienes privados. Esta literatura ha experimentado un notable desarrollo a partir de principios de los años '90.

Existen muchas situaciones en las cuales un grupo de agentes deben repartirse una tarea o un bien, entre ellas podemos mencionar: la división de bienes entre acreedores en un problema de banca rota, (Aumann y Maschler, 1985), compartir los costos en un proyecto público (Moulin, 1985a, Moulin, 1985b, Moulin, 1987, Young, 1987), la solución de equilibrio con precios fijos en una economía de intercambio (Benassy, 1982, Barberà y Jackson, 1995). En la asignación de tareas o bienes hay varias propiedades que son de interés, entre ellas: eficiencia, equidad, incentivos, etc.

El artículo de Hurwicz (1972) es el pionero en estudios sobre la no-manipulabilidad en el contexto clásico de economías de intercambio puro de bienes privados (sin producción). En este artículo Hurwicz se restringe al problema con dos agentes y dos bienes y establece la inexistencia de reglas no manipulables, Pareto eficientes e individualmente racionales (los agentes participan libremente en el intercambio) siempre que el dominio de preferencias contenga una clase suficientemente amplia de preferencias clásicas (continuas, cuasi-cóncavas y estrictamente

[2] Las tres últimas propiedades se aplican exclusivamente a contextos con bienes privados.

monótonas). Este resultado se generalizó para el caso de muchos bienes por Dasgupta, Hammond y Maskin (1979) y Hurwicz y Walker (1990), no obstante aún no ha sido demostrado para el caso de más de dos agentes. Zhou (1991) considera preferencias clásicas, dos agentes y varios bienes y demuestra que el mismo resultado de imposibilidad se cumple sin necesidad de la racionalidad individual. Schummer (1997) obtiene exactamente el mismo resultado para preferencias homotéticas. Usando un ejemplo de Satterthwaite y Sonnenschein (1981), Zhou (1991) demostró que su resultado de imposibilidad no es cierto para más de dos individuos. Un resultado reciente de Serizawa (1998) demuestra que para un mínimo de dos agentes y dos bienes, si las preferencias son clásicas y homotéticas, no existen reglas no-dictatoriales, Pareto eficientes y no manipulables por pares. Es decir, reencuentra el resultado de imposibilidad si se quiere evitar el comportamiento estratégico de parejas de individuos.

Prescindiendo de la propiedad de eficiencia, Barberà y Jackson (1995) establecieron que las reglas no manipulables e individualmente racionales, en economías con dos agentes, eran el resultado de intercambios de bienes con precios fijos o, en general, bienes a proporciones fijas. Con más de dos individuos, incluso con sólo dos bienes, no existe ninguna caracterización de reglas no manipulables. No obstante, Barberà y Jackson (1995) probaron, para *n* agentes, que las reglas no manipulables, anónimas y no jerárquicas (no hay ningún individuo que cambiando sus preferencias afecte la decisión de consumo de los otros sin cambiar su propia decisión) eran el resultado de un intercambio a lo largo de segmentos rectos procedentes de la asignación de división igualitaria.

En general, en los modelos con bienes públicos es difícil compatibilizar la eficiencia con la no-manipulabilidad, incluso para dominios de preferencias relativamente pequeños. Un resultado positivo en este sentido se debe a Nicolò (2004) que demuestra que para el caso del dominio de preferencias complementarias, existen reglas no manipulables, Pareto eficientes e individualmente racionales.

El problema de reparto o asignación de un bien privado perfectamente divisible entre distintos agentes puede describirse como sigue. Consideremos un grupo de agentes invirtiendo en un proyecto, donde los beneficios producidos son pagados en proporción a lo que cada agente invirtió. Supongamos que cada agente tiene una preferencia sobre la cantidad de dinero que el desea invertir, y que esta preferencia tiene un óptimo o cantidad ideal de inversión del agente. Supongamos que la suma de estas cantidades ideales es diferente, por exceso o defecto, al costo total del proyecto. Existen muchas diferentes maneras de decidir la cantidad que permitiremos o requeriremos a los agentes que inviertan en el proyecto. Un método simple podría ser que cada agente invierta la misma cantidad en el proyecto. Esta solución no es muy satisfactoria ya que es Pareto ineficiente. Supongamos que un agente desee invertir en el proyecto más que la división igualitaria y otro agente menos, en cuyo caso ambos agentes tendrían niveles de inversión en los cuales todos estarían mejor. Muchas otras reglas pueden ser diseñadas con el objetivo de decidir el nivel de participación de los agentes.

Un método mas sofisticado para decidir este nivel de inversión es la regla uniforme (Benassy, 1982). Esta regla puede ser pensada partiendo de la solución igualitaria, pero luego es corregida para que sea eficiente. Para ilustrar la regla uniforme, imaginemos que el total del nivel ideal de inversión de los agentes excede el nivel de inversión requerido para la realización del proyecto. Si hay algunos agentes que deseen invertir menos que la división igualitaria, a ellos se les asigna su nivel ideal. Esto permite que los restantes agentes tengan una oportunidad de inversión con cantidades adicionales. Ahora se divide el nivel de inversión aún no asignado entre los restantes agentes. Si hay agentes que deseen invertir menos que esta cantidad se les asigna su nivel óptimo de inversión. Continuamos iterando este proceso hasta que el nivel óptimo de inversión de todos los agentes restantes es al menos tan alto como la división igualitaria del remanente: el nivel de inversión asignado a estos agentes es esta división igualitaria. Esta regla uniforme satisface varias propiedades deseables tales como: eficiencia, anonimidad, ser libre de envidia, consistencia, individualidad racional respecto a la división igualitaria. Todas estas propiedades hacen a la regla uniforme una candidata a la regla de reparto ideal.

Nuestra principal preocupación es que nuestra regla sea no-manipulable: ningún agente tiene incentivos para declarar una preferencia diferente a la verdadera independientemente de las decisiones de los otros agentes. Esta propiedad es la condición descentralizada deseada que una regla puede satisfacer. En tal caso, lo único que los agentes deben conocer es su preferencia para computar su mejor elección, como es deseable.

Una regla es no-manipulable, si declarar la verdadera preferencia es una estrategia dominante para todos los agentes en el juego de revelación directa generado por el mecanismo.

Es conocido que es difícil encontrar modelos en los cuales existan reglas no-manipulables. Un resultado fundamental en la teoría de elección social, con bienes públicos, establecido por Gibbard (1973) y Satterthwaite (1975), afirma que toda regla no manipulable que seleccione entre más de dos alternativas debe ser dictatorial. Estos resultados de "imposibilidad" son aplicables en los modelos de bienes públicos obteniendo que las únicas reglas no-manipulables son las de dictadores secuénciales. Sin embargo existen reglas no-manipulables razonables, si se imponen restricciones apropiadas sobre el dominio de preferencias.

Varios autores han demostrado resultados similares al Teorema de imposibilidad de Gibbard-Satterthwaite en diferentes modelos económicos. Por ejemplo Hurwicz (1972) y Dasgupta, Hammond y Maskin (1979) para el caso de economías de intercambio con bienes privados y Satterthwaite y Sonnenschein (1981) para el caso con bienes públicos y producción.

En estos modelos de bienes privados es natural restringirse a que las preferencias de los agentes tienen sobre su nivel de participación en el proyecto sean unimodales: cada agente tiene un nivel de participación óptimo alrededor del cual la preferencia decrece monótonamente. Esta restricción puede verse como una consecuencia directa de la suposición que las preferencias son estrictamente convexas en el espacio "labor-output". Bajo estas restricciones una gran familia de reglas satisface la condición de no-manipulabilidad.

Una de las reglas que ha jugado un papel relevante es la descripta regla uniforme (Benassy, 1982). No sólo si exigimos la no-manipulabilidad, sino también cuando nos interesamos por propiedades equitativas. Sprumont (1991) caracterizó dicha regla como la única no manipulable, anónima y Pareto eficiente. Ching (1994) reemplazó Pareto eficiencia por tratamiento igual de iguales. Barberà, Jackson y Neme (1997) debilitaron la condición de anonimidad y obtuvieron el conjunto de reglas de reparto secuencial (donde la regla uniforme es un caso particular) como las únicas reglas no-manipulables, monótonas y eficientes. Serizawa (1998) obtuvo que la regla uniforme es la única que satisface no-manipulabilidad por pares, tratamiento igual de iguales y respeto por la unanimidad. Existen muchos otros resultados en los que se obtiene dicha regla imponiendo otro tipo de propiedades (Thomson, 1997, de Frutos y Massó, 1995; Schummer y Thomson (1996) aplican este análisis a problemas de bancarrota).

En la literatura de no-manipulabilidad con bienes privados, las preferencias multimodales ("single-plateaued") también han desempeñado un papel relevante. Bajo estas preferencias, Ching (1992) demuestra que una ligera modificación de la regla uniforme es la única que satisface no-manipulabilidad, Pareto eficiencia e inexistencia de envidia.

En este contexto también se ha estudiado el problema de la maximalidad de dominios compatibles con la existencia de funciones de elección social no manipulables, sin restringirnos a ninguna clase de reglas. Ching y Serizawa (1998) obtienen el conjunto de preferencias multimodales como el único dominio maximal para no-manipulabilidad, Pareto eficiencia y simetría. Massó y Neme (2001) identifican el dominio de preferencias débilmente monótonas como el único conjunto maximal de preferencias (que contiene las unimodales) para las propiedades de no-manipulabilidad, eficiencia y tratamiento igual de iguales. Como consecuencia de los tres últimos resultados, la regla uniforme se proclama como una regla muy robusta desde el punto de vista de la no-manipulabilidad.

En este resumen, consideramos el problema de los incentivos que tienen los individuos a falsificar las verdaderas preferencias como el más importante a controlar en los problemas de la asignación de un bien privado perfectamente divisible. Concretamente, nos centramos en la condición más débil introducida anteriormente: la no-manipulabilidad. Presentamos los siguientes tipos de resultados obtenidos en la literatura sobre la no-manipulabilidad: los resultados de imposibilidad, aquellos sobre la existencia y caracterización de reglas de asignación, las familias de reglas de asignación con debilitamiento de la condición de simetría y, por último, los resultados sobre dominios maximales compatibles con la existencia de reglas no manipulables.

El resto del trabajo se estructura de la siguiente manera. Primero, en la sección 2, presentamos el modelo general que permite englobar los problemas a estudiar, la aplicación de los resultados de imposibilidad de funciones de elección social no-manipulables en el contexto de bienes privados y aquellos sobre la existencia y caracterización de reglas de asignación. En la sección 3, se presentan familias de reglas de asignación con debilitamiento de la condición de simetría. En la sección 4, se estudian los resultados de existencia de reglas "a prueba de soborno". En la sección 5, introducimos un conjunto de resultados más recientes. En ellos se estudia la existencia y unicidad de dominios de preferencias maximales, para los cuales existe una regla de asignación que satisface una serie de propiedades.

2. El modelo

Un problema de división de un bien perfectamente divisible consiste de una sociedad $N = \{1,\dots,n\}$, donde $n \geq 2$, formada por un número finito de individuos que tienen que distribuirse una cantidad $M \in \mathbb{R}_{++}$ de un bien perfectamente divisible. Una asignación es un vector $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i = M$. Nosotros denotaremos por Z el conjunto de todas las posibles asignaciones.

Cada agente de la sociedad, $i \in N$, tiene un preorden completo R_i sobre $[0,M]$, su *relación de preferencia*. Sea P_i la relación de preferencia estricta asociada con R_i y sea I_i su relación de indiferencia. Nosotros supondremos que cada agente tiene preferencias continuas sobre $[0,M]$ en el sentido que para cada $x \in [0,M]$ los conjuntos $\{y\in[0,M]\,|\,xR_iy\}$ y $\{y\in[0,M]\,|\,yR_ix\}$ son cerrados. Observe que la continuidad de las preferencias asegura la existencia de una función de utilidad continua que las representa.

Nosotros denotaremos por $\mathcal{R}$ el conjunto de las preferencias continuas sobre $[0,M]$ y por $\mathcal{S}$ un subconjunto genérico de $\mathcal{R}$. Un *perfil de preferencias* es una n-upla de preferencias continuas sobre $[0,M]$ y será denotado por $\mathbf{R}=(R_1,...,R_n)\in\mathcal{R}^n$. Cuando nosotros deseemos resaltar el rol de la preferencia del agente i, representaremos el perfil de preferencias por $(R_i,\mathbf{R}_{-i})$.

Una regla de reparto o simplemente una regla sobre $\mathcal{S}^n\subseteq\mathcal{R}^n$ es una función

$$\Phi:\mathcal{S}^n\to Z$$

esto es, $\sum_{i\in N}\Phi_i(\mathbf{R})$ para todo $\mathbf{R}\in\mathcal{S}^n$.

Una regla requiere que cada agente de la sociedad reporte una preferencia. Una regla es no-manipulable si siempre es el mejor interés de los agentes revelar su verdadera preferencia. Formalmente,

Definición 1 *Una regla sobre* $\mathcal{S}^n,\Phi$ *es* ***no-manipulable*** *si para todo perfil de preferencias* $\mathbf{R}=(R_1,...,R_n)\in\mathcal{S}^n$*, para todo agente* $i\in N$*, y para toda preferencia* $R_i'\in\mathcal{S}$*, tenemos que*

$$\Phi_i(R_i,\mathbf{R}_{-i})R_i\Phi_i(R_i',\mathbf{R}_{-i})\,.$$

En la primera mitad de los años setenta, Gibbard (1973) y Satterthwaite (1975) establecieron independientemente, en el contexto de bienes públicos, que toda función de elección social no manipulable, definida en el dominio universal de preferencias y con más de dos alternativas en el rango es dictatorial. En otras palabras, el Teorema de Gibbard-Satterthwaite nos dice que excepto para reglas triviales (dictatoriales o con sólo uno o dos valores posibles para la función, equivalentemente, dos alternativas en el rango)[3] no podemos evitar el comportamiento estratégico de los agentes cuando pueden revelar cualquier preferencia.

---

[3] Una regla dictatorial es siempre no manipulable. La regla de la mayoría es un ejemplo de regla no manipulable cuando hay dos alternativas factibles. En este caso, May (1952) demostró que la regla de la mayoría es la única anónima, neutral (simétrica entre alternativas) y monótona (más agentes dando soporte a una alternativa no pueden perjudicarla). Cualquier regla impuesta, es decir, con valor constante independientemente de las preferencias individuales es un ejemplo de regla no manipulable con sólo una alternativa factible.

Estos resultados de “imposibilidad” son aplicables en los modelos de bienes públicos obteniendo que las reglas no-manipulables son muy poco atractivas. Esta familia se reduce a reglas denominadas dictadores secuenciales.

Una regla de reparto se rige por una secuencia de dictadores si existe un orden de prioridad entre los agentes y un subconjunto de las asignaciones posibles entre las cuales el primer agente seleccionado elige un subconjunto, sobre el cual el segundo agente seleccionará otro subconjunto, y se repite este proceso hasta obtener un solo vector de asignación.

El siguiente ejemplo muestra una regla que es un dictador secuencial con orden de prioridad 1,2,3:

Ejemplo 1 Sea $n = 3$ y para todo perfil de preferencias $\mathbf{R} \in \mathcal{S}^3$ definimos $\Psi : \mathcal{S}^3 \to Z$ como sigue:

$$\Psi_1(\mathbf{R}) = \max_{R_1}\left\{x : 0 \leq x \leq 1\right\}$$

$$\Psi_2(\mathbf{R}) = \max_{R_2}\left\{x : 0 \leq x \leq 1 - \Psi_1(\mathbf{R})\right\}$$

$$\Psi_3(\mathbf{R}) = \max\left\{0, 1 - \Psi_1(\mathbf{R}) - \Psi_2(\mathbf{R})\right\}.$$

El siguiente teorema es la aplicación a los modelos de bienes privados del teorema de imposibilidad de Gibbard-Satterthwaite.

Teorema 1 *(Gibbard, 1973, y Satterthwaite, 1975) Toda regla de reparto no-manipulable se rige por una secuencia de dictadores.*

Este resultado es frecuentemente considerado como negativo, pues nos dice que la única manera de evitar el comportamiento estratégico de los agentes es mediante la asignación de una secuencia de dictadores. Inmediatamente se empezaron a buscar vías de escape para conseguir otro tipo de resultados más atractivos.

Muchos problemas de decisión social no se pueden acomodar al contexto de Gibbard-Satterthwaite ya que el conjunto de alternativas asociado tiene una estructura específica. La idea de usar dicha información sobre la estructura del conjunto de alternativas y considerar restricciones de dominio adecuadas sugirió una de las posibles vías de escape. En este contexto, puede considerarse natural suponer que las preferencias de los individuos sobre el nivel de participación que el agente tiene en la distribución del bien son unimodales. Es decir, dada una preferencia, existe un nivel óptimo de provisión que es el mejor para este individuo, y cuanto más nos alejemos de este nivel, peor está el individuo.

La restricción del dominio de preferencias de la función de elección social, originó una gran línea de investigación que permitió obtener la existencia de reglas de elección no manipulables en contextos específicos.[4]

Según la definición de no-manipulabilidad, cuánto más pequeño es el dominio de preferencias, menor es el número de posibilidades que los agentes tienen para manipular (pues tienen menos opciones de falsificar sus preferencias). Por lo tanto, las funciones que son manipulables en un dominio de preferencias pueden no serlo en un subdominio (subconjunto del dominio inicial de la función de elección social). Este argumento sugiere que el resultado de imposibilidad de Gibbard-Satterthwaite puede incumplirse para problemas específicos con dominios restringidos.

Supondremos que las preferencias de los agentes son unimodales.

Definición 2 *Una preferencia del agente i, R_i, es **unimodal** si tiene un único óptimo, que denotaremos $\tau(R_i)\in[0,M]$, y para todo par de vectores $y,x\in[0,M]$, tenemos que xP_iy si $y<x\leq\tau(R_i)$ ó $\tau(R_i)\leq x<y$.*

Denotemos $\mathcal{U}$ el conjunto de preferencias unimodales y continuas sobre $[0,M]$.

A continuación, presentamos resultados de existencia de funciones de elección social no manipulables. Como ya hemos mencionado, estos se generan al considerar determinados dominios de preferencias asociados a cada problema concreto. Este resultado positivo se obtiene al estudiar, no sólo la existencia de funciones de elección social que sean no manipulables, sino también obtener su caracterización, cuando esto sea posible.

Uno de las reglas que ha jugado un papel relevante es la conocida como regla uniforme (Benassy, 1982). No sólo si exigimos la no-manipulabilidad, sino que también cuando nos interesamos por propiedades equitativas.

Dado un perfil de preferencia $\mathbf{R}\in\mathcal{U}^n$, la **regla de reparto uniforme** $\Phi^U:\mathcal{U}^n\to Z$ está definida como sigue:

$$\Phi_i^U(\mathbf{R})=\begin{cases}\min\left\{\tau(R_i),\lambda(\mathbf{R})\right\} & si\ M\leq\sum\tau(R_j)\\ \max\left\{\tau(R_i),\lambda(\mathbf{R})\right\} & si\ M\geq\sum\tau(R_j)\end{cases}$$

[4] Moulin y Thomson (1996) presentan una visión panorámica sobre los problemas de asignación de recursos enfatizando esta idea.

para todo $\mathbf{R} \in \mathcal{U}^n$, todo $i \in N$, donde λ(R) es la única solución tal que $\sum \Phi_j^U(\mathbf{R}) = M$.

Ahora describiremos algorítmicamente la regla uniforme para un perfil de preferencia dado, $\mathbf{R} \in \mathcal{U}^n$.

Supongamos que

$$\sum_{i=1}^{n} \tau(R_i) \geq M$$

el caso complementario es completamente simétrico con lo cual omitiremos su descripción.

Paso 1): Sea

$$A_0 = \left\{ i \in N : \tau(R_i) \leq \frac{M}{n} \right\},$$

si $A_0 = \emptyset \Rightarrow \Phi_i^U(\mathbf{R}) = \dfrac{M}{n} \quad \forall i$

si $A_0 \neq \emptyset \Rightarrow \Phi_i^U(\mathbf{R}) = \tau(R_i) \quad \forall i \in A_0$

Paso 2):

Sea $M_1 = M - \sum_{i \in A_0} \tau(R_i)$, $N_1 = N \backslash A_0$ y $n_1 = \# N_1$, sea

$$A_1 = \left\{ i \in N_1 : \tau(R_i) \leq \frac{M_1}{n_1} \right\},$$

$A_1 = \emptyset \Rightarrow \Phi_i^U(\mathbf{R}) = \dfrac{M_1}{n_1} \quad \forall i \in N_1$

si $A_1 \neq \emptyset \Rightarrow \Phi_i^U(\mathbf{R}) = \tau(R_i) \quad \forall i \in A_1$

Paso 3):

Sea $M_k = M - \sum_{i \in \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} A_i \right)} \tau(R_i)$. Sea $N_k = N \backslash \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} A_i \right)$, y $n_k = \# N_k$;

$$A_k = \left\{ i \in N_k : \tau(R_i) \leq \frac{M_k}{n_k} \right\},$$

si $A_k = \varnothing \Rightarrow \Phi_i^u(\mathbf{R}) = \dfrac{M_k}{n_k} \quad \forall i \in N_k$

si $A_k \neq \varnothing \Rightarrow \Phi_i^U(\mathbf{R}) = \tau(R_i) \quad \forall i \in A_k$.

Se continúa con este proceso hasta encontrar $A_t = \varnothing$.

Un resultado de caracterización de funciones de elección social para ciertas propiedades hace explícita la forma exacta de la regla que satisfacen dichas propiedades. El objetivo en la literatura que presentamos es obtener este tipo de resultados cuando una de las propiedades es la no-manipulabilidad y otra es la eficiencia de Pareto. En muchos contextos económicos, en especial en modelos con bienes públicos, las propiedades de no-manipulabilidad y eficiencia son incompatibles. En general, en contextos económicos con bienes privados estas propiedades son compatibles.

Dado un perfil de preferencias $\mathbf{R} \in \mathcal{U}^n$, una asignación $x \in Z$ es eficiente si no existe una asignación $z \in Z$ tal que para todo agente $i \in N$, $z_i R_i x_i$, y y $z_j P_j x_j$ para al menos un agente $j \in N$. Denotaremos por $E(\mathbf{R})$ el conjunto de todas las asignaciones eficientes.

Una regla es eficiente si siempre selecciona una asignación eficiente. Formalmente,

Definición 3 *Una regla sobre* $\mathcal{U}^n, \Phi$, *es* ***eficiente*** *si para todo perfil de preferencia* $\mathbf{R} \in U^n$ *tenemos que* $\Phi(\mathbf{R}) \in E(\mathbf{R})$.

Es inmediato verificar que, cuando las preferencias de los agentes son unimodales, la propiedad de eficiencia es equivalente a que la regla asigne un nivel de participación que se encuentra del mismo lado que su óptimo para todos los agentes de la sociedad. Esto es, para cada $\mathbf{R} \in \mathcal{R}^N$:

$$\left[\sum_{j \in N} \tau(R_j) \leq M\right] \Rightarrow \left[\tau(R_i) \leq \Phi_i(\mathbf{R}) \text{ para todo } i \in N\right]$$

y

$$\left[\sum_{j \in N} \tau(R_j) \geq M\right] \Rightarrow \left[\tau(R_i) \geq \Phi_i(\mathbf{R}) \text{ para todo } i \in N\right].$$

Una regla de reparto es anónima si sólo depende de las características del perfil de preferencias y no del nombre del agente que tiene la correspondiente preferencia.

Sea $\pi : N \to N$ una función uno a uno (una permutación). Dado un perfil de preferencia $\mathbf{R}$, definimos $\mathbf{R}^{\pi} = \left(R_1^{\pi},\dots,R_n^{\pi}\right)$, con $R_i^{\pi} = R_{\pi(i)}$.

Definición 4 *Una regla de reparto* Φ *es* ***anónima*** *si para todo* $(R_1,\dots,R_n)\in U^n$*, todo* $i\in N$*, y cualquier permutación* π *de* N*, tenemos que* $\Phi_i(\mathbf{R}^{\pi}) = \Phi_{\pi(i)}(\mathbf{R})$.

Sprumont (1991) caracteriza la regla uniforme como la única no manipulable, anónima y Pareto eficiente.

Teorema 2 *(Sprumont (1991)) Una regla de reparto* $\Phi : \mathcal{U}^n \to Z$ *es eficiente, anónima y no-manipulable si y sólo si es a la regla uniforme,* $\Phi = \Phi^U$.

La condición de justicia demanda que nuestra regla sea anónima. Sprumont (1991), observa que no es necesaria la condición de anonimidad para forzar que la única regla sea la uniforme. En el mismo artículo mencionado, Sprumont obtiene que el resultado de caracterización es aun valido si se remplaza la condición de anonimidad por una condición mas débil como la de "libre de envidia" (*envy-freeness*). Esta propiedad requiere que ningún agente prefiera el nivel de participación asignado a otro agente.

Definición 5 *Una regla de reparto* Φ *es* ***libre de envidia*** *si para todo* $(R_1,\dots,R_n)\in\mathcal{U}^n$, *todo* $i,j\in N$, $\Phi_i(\mathbf{R})R_i\Phi_j(\mathbf{R})$.

Con esta condición de libre de envidia en reemplazo de la anonimidad se obtiene el mismo resultado de caracterización.

Teorema 3 *(Sprumont 1991) Una regla de reparto* $\Phi : \mathcal{U}^n \to Z$ *es eficiente, libre de envidia y no-manipulable si y sólo si es a la regla uniforme,* $\Phi = \Phi^U$.

Varios son los artículos que consideran distintos axiomas, con el mismo espíritu al tratamiento simétrico entre los agentes, obteniendo diferentes caracterizaciones de la regla uniforme.

Ching (1994) introduce el concepto de simetría, según el cual dos agentes con la misma preferencia deben tener el mismo nivel de participación. Formalmente:

Definición 6 Una regla de reparto Φ es **simétrica** si para todo $(R_1,\dots,R_n)\in\mathcal{U}^n$, todo $i,j\in N$, tal que $R_i = R_j$; tenemos que $\Phi_i(\mathbf{R}) = \Phi_j(\mathbf{R})$.

Teorema 4 *(Ching 1994) Una regla de reparto* $\Phi : \mathcal{U}^n \rightarrow Z$ *es eficiente, simétrica y no-manipulable si y sólo si es a la regla uniforme, ,* $\Phi = \Phi^U$.

Otra alternativa caracterización de la regla uniforme fue encontrada por Ching (1994), que demuestra que la simetría puede ser reemplazada por "igual tratamiento de iguales".

Definición *7 Una regla de reparto ,* Φ *satisface* ***igual tratamiento de iguales*** *si para todo* $(R_1,...,R_n) \in \mathcal{U}^n$*, todo* $i,j \in N$*, tal que* $R_i = R_j$*; tenemos que* $\Phi_i(\mathbf{R}) I_i \Phi_j(\mathbf{R})$.

Teorema 5 *(Ching 1994) Una regla de reparto* $\Phi : \mathcal{U}^n \rightarrow Z$ *es eficiente, no-manipulable y satisface igual tratamiento de iguales si y sólo si es a la regla uniforme,* $\Phi = \Phi^U$.

Existen otras caracterizaciones de la regla uniforme sin la condición de no-manipulabilidad, pero como hemos mencionado anteriormente nuestro objetivo es mantener este axioma entre las condiciones de caracterización.

3. Reglas secuenciales

Imaginemos que nuestro modelo de asignación describe, por ejemplo, una sociedad que desea invertir en un proyecto, en el cual los beneficios serán pagados en proporción a la cantidad que cada socio invierte. Supongamos que cada uno de los socios posee una cantidad ideal que quieren invertir. El total de estos niveles de inversión puede se mayor o menor a la cantidad necesaria para la realización del proyecto, así los socios pueden tener que invertir más o menos que sus cantidades ideales. Hay muchas maneras diferentes en que uno puede decidir cuánto se le permitirá invertir a cada socio.

Como vimos anteriormente, una de las maneras de decidir el nivel de inversión es la implementada por la regla uniforme. Esta regla tiene varias propiedades deseadas, tales como no-manipulabilidad, eficiencia y también algunos de los requerimientos de simetría. Sin embargo, la propiedad de simetría de la regla uniforme hace de ella una regla inadecuada cuando se desea respetar una cierta asimetría entre los agentes.

A menudo es deseable que la regla tenga en cuenta cierta asimetría, basada en considerar que los agentes tienen diferentes niveles jerárquicos debido a contribuciones históricas, eficiencia de los agentes, etc.

En esta sección describiremos una caracterización de reglas que son asimétricas y satisfacen las condiciones de no-manipulabilidad, eficiencia y una condición de monotonía.

La monotonía nos dice que si en un cambio de una preferencia individual, al agente se le asigna al menos la misma participación que con la preferencia anterior todos los otros agentes no decrecen en su nivel de participación. Esta condición de monotonía asegura que todos los agentes son afectados en la misma dirección en respuesta a un cambio de la preferencia de un agente.

Definición 8 Una regla de reparto Φ es **monótona** si para todo perfil de preferencias $(R_1,\ldots,R_n)\in\mathcal{U}^n$, para todo agente $i\in N$, y para toda preferencia $R_i'\in\mathcal{U}$, tenemos que:

$$\Phi_i(\mathbf{R})\leq\Phi_i(\mathbf{R},R_i')\Rightarrow\left(\Phi_j(\mathbf{R})\geq\Phi_j(\mathbf{R},R_i')\right)\quad\forall j\neq i$$

Observe que esta condición de monotonía tiene una estrecha relación con la monotonía usada por Thomson (1997) en contextos similares. También la monotonía implica la condición de "nonbossy" introducida por Satterthwaite and Sonnenschein (1991). Es fácil ver un ejemplo que muestra que esta relación no es biunívoca.

Ahora definiremos mediante un proceso secuencial una familia de reglas que serán caracterizadas con los axiomas de no-manipulabilidad, eficiencia y monotonía.

Dado $R\in\mathcal{U}^n$, denotemos $T=\left(M-\sum_{i\in N}\tau(R_i)\right)$. Una función $g:Z\times\mathcal{U}^n\to Z\times\mathcal{U}^n$ es **secuencial relativo** a $q^L\in Z$ y $q^H\in Z$ si las siguientes afirmaciones son válidas para todo par $(q^t,\mathbf{R})$ tal que $(q^t,\mathbf{R})=g(q^{t-1},\mathbf{R})=g^t(q^0,\mathbf{R})$ para algún $t\geq 1$:

i) Si $T\leq 0$, entonces $q^0=q^H$. Si $T>0$, entonces $q^0=q^L$.
ii) $q_i^t=\tau(R_i)$ si $T(q_i^{t-1}-\tau(R_i))=0$.
iii) $(q_i^t-q_i^{t-1})T\leq 0$ si $T(q_i^{t-1}-\tau(R_i))>0$.
iv) Si $\min\left\{\tau(R_i'),\tau(R_i)\right\}>q_i^{t-1}$ y $T\leq 0$ ó $\max\left\{\tau(R_i'),\tau(R_i)\right\}<q_i^{t-1}$ y $T\geq 0$ entonces $g(q^{t-1},\tau(R))=g(q^{t-1},\tau(R_i',R_{-i}))$.
v) Sea $q'^N=g^N(q^0,\tau(R_i',\mathbf{R}_{-i}))$ y $q^N=g^N(q^0,\tau(\mathbf{R}))$. Entonces:
Si $\tau(R_i')<\tau(R_i)$ y $T\leq 0$, entonces $q_i'^N\geq q_i^N$ para todo $j\neq i$.
Si $\tau(R_i')>\tau(R_i)$ y $T>0$, entonces $q_i'^N\leq q_i^N$ para todo $j\neq i$.

Observe que en estas funciones secuenciales los vectores q^L y q^H nos indican los niveles de participación que los agentes se pueden garantizar en el proceso, según si existe exceso de oferta, q^L, o demanda, q^H. La condición ii) nos asegura que si hay exceso de demanda (oferta) los agentes cuyo nivel ideal de participación se encuentra por debajo (por encima) del nivel que ellos se pueden garantizar, reciben su nivel ideal de participación.

Definición 9 *Una regla de reparto* Φ *es una* ***regla secuencial*** *si existen* q^L, q^H *en* Z *y una función secuencial* g *relativo a* q^L, q^H *tal que,*

$$\Phi_i(\mathbf{R}) = \begin{cases} g^n(q^H, \mathbf{R}) & si \sum_{i \in N} \tau(R_i) \geq M \\ g^n(q^L, \mathbf{R}) & si \sum_{i \in N} \tau(R_i) < M \end{cases}.$$

Ahora presentaremos un ejemplo ilustrando esta familia de reglas. Dado $\mathbf{R} \in \mathcal{U}^n$, supongamos que

$$\sum_{i=1}^{n} \tau(R_i) \geq M$$

el caso complementario es completamente simétrico con lo cual omitiremos su descripción.

Paso 1) Sea $\alpha^0 = q^H$ tal que $\sum_i \alpha_i^0 = M$. Sea

$$A_0 = \left\{ i \in N : \tau(R_i) \leq \alpha_i^0 \right\}$$

si $A_0 = \varnothing \Rightarrow \Phi_i(\mathbf{R}) = \alpha_i^0 \quad \forall i$

si $A_0 \neq \varnothing \Rightarrow \Phi_i(\mathbf{R}) = \tau(R_i) \quad \forall i \in A_0$

Paso 2) Sea $M_1 = M - \sum_{i \in A_0} \tau(R_i)$, $N_1 = N \backslash A_0$ y $n_1 = \# N_1$. Sea $\alpha^1(N_1, M_1) = g(q^H, \mathbf{R})$

tal que $\sum_{i \in N_1} \alpha_i^1 = M_1$ y $\alpha_i^1 \geq \alpha_i^0$ para todo $i \in N_1$. Definimos,

$$A_1 = \left\{ i \in N_1 : \tau(R_i) \leq \alpha_i^1 \right\}$$

si $A_1 = \varnothing \Rightarrow \Phi_i(\mathbf{R}) = \alpha_i^1 \quad \forall i \in N_1$

si $A_1 \neq \varnothing \Rightarrow \Phi_i(\mathbf{R}) = \tau(R_i) \quad \forall i \in A_1$

Paso 3) Sea $M_k = M - \sum_{i \in \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} A_i \right)} \tau(R_i)$. Sea $N_k = N \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} A_i \right)$, y $n_k = \#N_k$;

Sea $\alpha^k(N_k,M_k) = g^{k-1}(q^H,\mathbf{R})$ tal que $\sum_{i \in N_k} \alpha_i^k = M_k$ y $\alpha_i^k \geq \alpha_i^{k-1}$ para todo $i \in N^k$. Definimos,

$$A_k = \left\{ i \in N_k : \tau(R_i) \leq \alpha_i^k \right\}$$

si $A_k = \varnothing \Rightarrow \Phi_i(\mathbf{R}) = \alpha_i^k \quad \forall i \in N_k$

si $A_k \neq \varnothing \Rightarrow \Phi_i(\mathbf{R}) = \tau(R_i) \quad \forall i \in A_k$.

Esta familia de reglas secuenciales contiene a la regla uniforme, pero también existen reglas que contemplan ciertas asimetrías entre los agentes que pueden ser descriptas en forma secuencial. Estas asimetrías se ven reflejadas en los vectores α usados en su diseño. Barberà, Jackson y Neme (1997) obtienen una caracterización axiomática de estas reglas secuenciales.

Teorema 6 *Una regla de reparto* Φ *satisface no-manipulabilidad, eficiencia y monotonía si y solo si es una regla de reparto secuencial.*

Para finalizar esta sección mencionemos las siguientes observaciones:

i) El axioma de eficiencia puede ser reemplazado por la condición de suryectividad y se obtiene un resultado más fuerte.
ii) Las reglas secuenciales dependen sólo del óptimo de las preferencias de cada agente, ninguna otra información adicional es requerida para su implementación. Este hecho tiene varias consecuencias, una de ellas es la simplicidad de implementación, otra es que estas reglas pueden ser implementadas por un mecanismo directo en estrategias dominantes en el cual sólo se solicita el reporte de su nivel óptimo.
iii) Las reglas de reparto secuenciales satisfacen la condición de no-manipulabilidad por coaliciones, es decir, ningún grupo de agentes pude beneficiarse por coordinar un cambio de estrategias.

4. Reglas "a prueba de soborno"

La no-manipulabilidad requiere que ningún agente pueda obtener un mejor nivel de participación por mentir en la declaración de su relación de preferencia. La Pareto eficiencia requiere que ningún grupo de agentes pueda obtener mejores niveles de participación por redistribuirse su asignación inicial. En este contexto de los problemas de distribución donde hay un bien perfectamente transferible es natural combinar los dos principios con lo cual obtenemos reglas "a prueba de soborno" en el sentido que no hay un grupo de agentes que puedan compensar a otros agentes por mentir en su declaración de la preferencia y, después de una adecuada redistribución del nivel de participación obtenida, los agentes obtengan mejores niveles de participación.

Una condición que combina los principios de no-manipulabilidad y eficiencia es "a prueba de soborno". Es bien conocida la incompatibilidad de estos dos conceptos en el contexto de economías con bienes públicos. La Pareto eficiencia y la no-manipulabilidad son incompatibles al menos que las funciones de elección social sean dictatoriales o de rango restringido. En contraste con esto, Barberà, Jackson, y Neme (1997) muestran que en los problemas económicos con bienes privados la clase de las reglas Pareto eficientes y no-manipulables es bastante grande. Específicamente, como fue descripto en la sección anterior, el conjunto de las reglas secuenciales están caracterizadas por las propiedades de eficiencia, monotonía y no-manipulabilidad.

Schummer (2000) propone, en un marco general de economías con bienes públicos y preferencias cuasi-lineales, el concepto de reglas "a prueba de soborno". Una regla es "a prueba de soborno" si no existe un grupo de agentes que tengan incentivos a ofrecer a un tercer agente un pago lateral a cambio de que este cambie su declaración de la preferencia. El demuestra que la familia de reglas que satisfacen la propiedad "a prueba de soborno" se reduce sustancialmente a funciones constantes respecto a transferencias monetarias, en el sentido que cambios de preferencias de un agente no afecta el pago de los otros agentes.

Además de Schummer (2000), pocos artículos han estudiado la propiedad de "a prueba de soborno" en diferentes contextos. Esö y Schummer (2003) examina esta propiedad en el contexto de subastas de segundo precio y Fiestras-Janeiro, Klijn, y Sánchez (2004) lo estudia en el contexto de juegos de asignación con dotaciones iniciales.

Además de los axiomas de eficiencia y no-manipulabilidad tenemos un especial interés en reglas que no permitan que un grupo de agentes obtengan ganancias por redistribuir el nivel de participación asignado después que un agente cambie su verdadera preferencia. Formalmente,

Definición 10 *Una regla de reparto es **"a prueba de soborno"** si para todo perfil de preferencias* $(R_1,...,R_n)\in\mathcal{U}^n$*, para todo* $i\in N$*, y todo* $R_i'\in\mathcal{U}$ *no existe* $S\subseteq N$ *y* $(t_j)_{j\in S}$ *tal que* $i\in S$*,* $\sum_{j\in S} t_j = \sum_{j\in S}\Phi_j(R_i',\mathbf{R}_{-i})$ *y para todo* $j\in S$

$$t_j P_j \Phi_j(R_i',\mathbf{R}_{-i}).$$

Como habíamos mencionado anteriormente esta condición de "a prueba de soborno" tiene una estrecha relación con eficiencia y no-manipulabilidad.

Lema 1 *Todo mecanismo de reparto "a prueba de soborno" es no-manipulable y eficiente.*

Mediante un ejemplo mostraremos que la inversa del lema es falsa, exhibimos un ejemplo de una regla Pareto eficiente y no manipulable que no satisface la condición de "a prueba de soborno".

Ejemplo 2 *Sea* $N=\{1,2,3\}$ *el conjunto de agentes y definimos la regla* $\phi:\mathcal{U}^n\rightarrow Z$ *como sigue. Para todo* $\mathbf{R}\in\mathcal{U}^n$*,*

$$\phi_1(\mathbf{R})=\max\left\{0,M-\tau(R_2)-\tau(R_3)\right\},$$

$$\phi_2(\mathbf{R})=\begin{cases}\tau(R_2) & si\, 0R_1M\\ \min\left\{\tau(R_2),M-\tau(R_3)\right\} & si\, MP_10,\end{cases}$$

$$\phi_3(\mathbf{R})=\begin{cases}\tau(R_3) & si\, MP_10\\ \min\left\{\tau(R_3),1-\tau(R_2)\right\} & si\, 0R_1M.\end{cases}$$

Observe que ϕ *es Pareto eficiente y no manipulable. Para ver que* ϕ *no es "a prueba de soborno", consideremos* $\mathbf{R}\in U^n$ *tal que* $\tau(R_1)=\frac{M}{2}$*,* $0P_1M$*, y* $\tau(R_2)=\tau(R_3)=M$*. Entonces* $\phi(\mathbf{R})$ = $(0,M,0)$*. Sea* $R_1'\in\mathcal{U}$ *tal que* $\tau(R_1)=\frac{M}{2}$ *y* $MP_1'0$*. Entonces,* $\phi(R_1',\mathbf{R}_{-1})=(0,0,M)$*. Sea* $S=\{1,3\}$ $T=\{1\}$*, y* $t_1=t_3=\frac{M}{2}$*, como* $\frac{M}{2}P_10$ *y* $\frac{M}{2}P_30$*,* ϕ *no es "a prueba de soborno".*

El siguiente teorema muestra que la familia de reglas secuenciales son "a prueba de soborno".

Teorema 7 *Todo mecanismo de reparto no-manipulable, eficiente y monótono es "a prueba de soborno".*

Con el objetivo de obtener una caracterización completa de las reglas "a prueba de soborno" introducimos una noción débil de monotonía, la cual junto con eficiencia y no-manipulabilidad nos dará la caracterización deseada.

Definición 11 *Una regla* Φ *es* ***débilmente monótona*** *si para todo perfil de preferencia* $\mathbf{R} \in \mathcal{U}^n$*, todo* $i \in N$*, y todo* $R_i' \in \mathcal{U}$*, si* $\left[\Phi_i(\mathbf{R}) \leq \Phi_i(R_i', \mathbf{R}_{-i})\ y\ \Phi_i(\mathbf{R}) \neq \tau(R_i)\ o\ \Phi_i(R_i', \mathbf{R}_{-i}) \neq \tau(R_i')\right]$*, entonces* $\left[\Phi_j(\mathbf{R}) \geq \Phi_j(R_i', \mathbf{R}_{-i})\ para\ todo\ j \neq i\right]$.

La condición de monotonía débil requiere un tratamiento simétrico entre los agentes. Un incremento en el nivel de participación del agente i, después de haber cambiado su preferencia, decrece el total de bienes que deben distribuirse los agentes restantes. Monotonía débil implica que ninguno de los restantes agentes crece en su nivel de participación.

Teorema 8 *Las reglas Pareto eficientes, no manipulables, y monótonas son "a prueba de soborno".*

El siguiente ejemplo ilustra el hecho que las condiciones de Pareto eficiencia, no-manipulabilidad, y monotonía no nos dan una caracterización completa de las reglas "a prueba de soborno". Exhibimos una regla "a prueba de soborno", consecuentemente Pareto eficiente y no-manipulable, que no es monótona.

Ejemplo 3 *Consideremos el caso donde* $M=1$ *y la sociedad esta formada por tres agentes,* $N = \{1,2,3\}$. *Sea* $\psi : \mathcal{U}^n \to Z$ *definida de la siguiente forma: para todo* $\mathbf{R} \in \mathcal{U}^n$*,*

$$\psi_1(\mathbf{R}) = \tau(R_1)$$

$$\psi_2(\mathbf{R}) = \begin{cases} \min\left\{\tau(R_2), 1-\tau(R_1)\right\} & si\ 0 R_1 1 \\ \min\left\{0, 1-\tau(R_1)-\tau(R_3)\right\} & si\ 1 P_1 0 \end{cases}$$

$$\psi_3(\mathbf{R}) = \begin{cases} \min\left\{\tau(R_3), 1-\tau(R_1)\right\} & si\ 1 P_1 0 \\ \min\left\{0, 1-\tau(R_1)-\tau(R_2)\right\} & si\ 0 R_1 1. \end{cases}$$

Para demostrar que ψ es "a prueba de soborno", supongamos lo contrario; sea $T \subseteq S$ un conjunto de agentes participantes en el soborno en la preferencia $\mathbf{R} \in \mathcal{U}^n$. Como ψ raciona a todos los agentes del mismo lado de su nivel óptimo de participación, ψ es Pareto eficiente. Aún mas, ningún agente puede manipular el mecanismo ψ porque todos los agentes reciben su óptimo o sólo pueden cambiar su nivel de participación en la dirección opuesta a la de su óptimo y consecuentemente su preferencia decrece. Luego, $\#S \neq 1$ y $\#S \neq 3$. Observe que para todo $\hat{R} \in \mathcal{U}^n$, $\psi_1(\hat{R}) = \tau(\hat{R}_1)$. Entonces, $1 \notin T$ y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $1 \in S$. Luego, $S = \{1, j\}$ y $T = \{j\}$, donde j es 2 o 3. Sea $(t_1, t_j) \in \mathbb{R}^{\{1,j\}}$ y $R'_j \in \mathcal{U}$ tal que $t_1 + t_j = \psi_1(R'_j, R_{-j})$ $+ \psi_j(R'_j, R_{-j})$. Como $\psi_1(R'_j, R_{-j}) = \tau(R_1) = \psi_1(R)$, $\psi_j(R'_j, R_{-j}) = t_j$. Por hipótesis, $t_j = \psi_j(R'_j, R_{-j}) P_j \psi_j(R)$, implica que ψ es manipulable, una contradicción. Entonces, ψ es "a prueba de soborno". Observe que ψ no es débilmente monótona. Para ver esto, considere cualquier $(R_1, R_2, R_3) \in \mathcal{U}^n$ y $R'_1 \in \mathcal{U}$ tal que $(\tau(R_1), \tau(R_2), \tau(R_3))$ $= \left(\frac{1}{4}, 1, 1\right)$, $0 P_1 1$, $\tau(R'_1) = 3/4$, y $1 P_1{}' 0$. entonces, $\psi(R_1, R_2, R_3) = (1/4, 3/4, 0)$ y $\psi(R'_1, R_2, R_3) = (3/4, 0, 1/4)$, lo cual implica que ψ no es débilmente monótona.

Ahora estamos en condiciones en enunciar el resultado de caracterización axiomática de las reglas a prueba de soborno.

Teorema 9 *Una regla de reparto es "a prueba de soborno" si y sólo si es eficiente, no manipulable y débilmente monótona.*

Este teorema implica que las reglas secuenciales introducidas en la sección anterior son "a prueba de soborno", pero esta implicación no es una completa caracterización explícita de esta familia de reglas. Massó y Neme (2007) obtienen una caracterización explícita de la familia de reglas "a prueba de soborno".

5. Dominios maximales

Una de las implicaciones del teorema de Gibbard-Satterthwaite en estos modelos es la imposibilidad de diseñar una regla no manipulable y simétrica bajo el supuesto de dominio universal de preferencias. En las secciones anteriores hemos presentados resultados que nos aseguran la existencia de reglas de reparto no manipulables en los problemas de división bajo la restricción que el dominio de preferencias es unimodal.

Ahora podemos preguntarnos sobre la existencia de un dominio de preferencias, que contenga a las unimodales y aun conserve la propiedad de existencia de reglas con interesantes propiedades tales como la no-manipulabilidad, la eficiencia y la simetría. En esta sección presentaremos resultados tendientes a responder sobre tal existencia. Específicamente presentaremos caracterizaciones del dominio maximal de preferencias que contenga al dominio de las unimodales en el cual exista al menos una regla que satisfaga no-manipulabilidad, eficiencia y simetría.

Moulin (1984) y Berga (1998) en el contexto de bienes públicos estudian una extensión del dominio de preferencias unimodales. Ellos obtienen caracterizaciones de todas las reglas no manipulables definidas sobre el dominio de preferencias "multimodales", el cual permite un intervalo de indiferencia como conjunto óptimo de una preferencia y estrictamente monótona en ambos lados de este intervalo.

Ching (1992) extiende la definición de la regla uniforme en dominios de preferencias multimodales y caracteriza dicha regla.

Supondremos que las preferencias de los agentes son multimodales.

Definición 12 *Una preferencia del agente i, R_i es* ***multimodal*** *si existe un intervalo* $\left[\underline{\tau}(R_i),\overline{\tau}(R_i)\right]\subset\left[0,M\right]$ *tal que para todo par de vectores* $y,x\in[0,M]$, *tenemos que* xP_iy *si* $y<x\leq\underline{\tau}(R_i)$ *ó* $\overline{\tau}(R_i)\leq x<y$, *y* xI_iy *si* $\underline{\tau}(R_i)\leq y\leq x\leq\overline{\tau}(R_i)$.

Denotemos $\mathcal{M}$ el conjunto de preferencias multimodales y continuas sobre $[0,M]$. Observe que este conjunto de preferencias contiene a las unimodales, $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$.

Como hemos mencionado, la regla uniforme es una de las reglas más relevantes, no sólo si exigimos la no-manipulabilidad, sino también cuando nos interesamos por propiedades equitativas. Para lograr nuestro objetivo debemos extender la regla uniforme a este nuevo dominio de preferencias.

Dado un perfil de preferencia $\mathbf{R}\in\mathcal{M}^n$, la **regla de reparto uniforme** $\Phi^U:\mathcal{M}^n\to Z$ está definida como sigue:

$$\Phi_i^U(\mathbf{R})=\begin{cases}\min\left\{\underline{\tau}(R_i),\lambda(\mathbf{R})\right\} & si\ M\leq\sum\underline{\tau}(R_j)\\ z_i;\text{tal que } z_i\in\left[\underline{\tau}(R_i),\overline{\tau}(R_i)\right] & si\ M\in\left[\sum_i\underline{\tau}(R_i),\sum_i\overline{\tau}(R_i)\right]\\ \max\left\{\overline{\tau}(R_i),\lambda(\mathbf{R})\right\} & si\ M\geq\sum\overline{\tau}(R_j)\end{cases}$$

para todo $\mathbf{R}\in\mathcal{M}^n$; todo $i\in N$, donde $\lambda(\mathbf{R})$ es una solución tal que $\sum\Phi_j^U(\mathbf{R})=M$.

Observemos que, a diferencia del caso de preferencias unimodales, la solución $\lambda(\mathbf{R})$ no es única y consecuentemente se debe seleccionar una para la definición de la regla. Como ejemplo supongamos el caso extremo donde el intervalo optimal para todas las preferencias es $\left[\underline{\tau}(R_i),\overline{\tau}(R_i)\right]=\left[0,M\right]$, en tal caso la regla uniforme puede seleccionar cualquier vector admisible $z\in Z$.

Ching (1992) extiende los resultados de caracterización de la regla uniforme en este nuevo contexto. Él demuestra que la regla uniforme sobre el dominio de preferencias multimodales es la única no manipulable, anónima y Pareto eficiente.

Teorema 10 *(Ching, 1992) Una regla de reparto* $\Phi : \mathcal{M}^n \rightarrow Z$ *es eficiente, libre de envidia y no manipulable si y sólo si es a la regla uniforme,* $\Phi = \Phi^U$.

Ching y Serizawa (1998), modifican levemente este modelo, consideran la cantidad del bien privado a repartir como una variable del modelo y no como un dato. En este nuevo contexto investigan el dominio maximal de preferencias, que contienen a las unimodales, para el cual existe al menos una regla no manipulable, eficiente y simétrica. Ellos demostraron que este dominio maximal es el de las preferencias multimodales.

Teorema 11 *Ching y Serizawa, 1998) El domino de preferencias multimodales es el único dominio maximal de preferencia que contiene a las unimodales tal que existe una regla de reparto no-manipulable, simétrico y eficiente.*

Observemos que el resultado de Ching y Serizawa (1998) depende del rol de variable asignado a la cantidad del bien a repartir, M. Este resultado es falso si M es considerado un dato como en el modelo original.

Ahora retornamos al modelo original e investigamos el dominio maximal de preferencias para la existencia de reglas con las propiedades mencionadas.

Este dominio maximal dependerá crucialmente de la cantidad M de bien que podemos repartir y la cantidad n de agentes que tiene la sociedad, dado que el nivel de reparto igualitario M/n juega, como consecuencia de la simetría, un rol fundamental en la descripción. Nuestro dominio de preferencias contendrá a las multimodales. Aún más, si consideramos la intersección de estos dominios maximales cuando M varía de 0 a ∞, se obtiene el dominio de las multimodales.

Ahora introduciremos un dominio de preferencia, débilmente monótono, que contiene a las multimodales.

Dada una preferencia R_i, nos referiremos al intervalo $\Theta(R_i)$,el cual juega un rol fundamental en la definición de nuestro dominio de preferencias:

$$\Theta(R_i) = \left[\min\left\{ \frac{M}{n}, \underline{\tau}(R_i) \right\}, \max\left\{ \frac{M}{n}, \overline{\tau}(R_i) \right\} \right].$$

Antes de la descripción formal, será de utilidad una descripción verbal del dominio de preferencias monótonas restringidas a $\Theta(R_i)$. Una preferencia de este dominio tiene la propiedad que el conjunto óptimo de niveles de participación es un intervalo. Adicionalmente, satisface que si este intervalo optimal es menor que M/n, entonces la preferencia debe ser decreciente entre el nivel óptimo y M/n. Simétricamente, si este intervalo optimal es mayor que M/n, entonces la preferencia debe ser decreciente entre M/n y el nivel óptimo. Finalmente si M/n es un nivel optimal de reparto, entonces ninguna condición adicional es requerida. Formalmente,

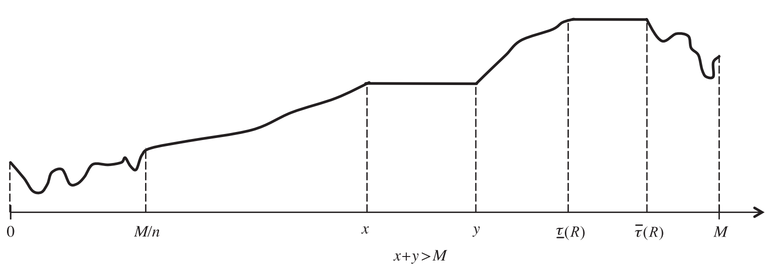
Definición 13 *Una preferencia* $R_i \in \mathcal{R}$ *es* ***débilmente monótona sobre*** $\Theta(R_i)$ *si para todo* $x,y \in [0,M]$*:*

(a) Si $[x < y \text{ y } M/n \leq y \leq \underline{\tau}(R_i)]$ *implica que* $[yR_ix$ *y si* yI_ix *entonces existe* $[x_0, y_0] \supseteq [x,y]$ *tal que* $x_0 + y_0 > M$ *y* $x'I_iy_0$ *para todo* $x' \in [x_0,y_0]]$.
(b) Si $[x < y \text{ y } \overline{\tau}(R_i) \leq x \leq M/n]$ *implica que* $[xR_iy$ *y si* xI_iy *entonces existe* $[x_0, y_0] \supseteq [x,y]$ *tal que* $x_0 + y_0 < M$ *y* $x'I_iy_0$ *para todo* $x' \in [x_0,y_0]]$.
(c) Si $x \in [\underline{\tau}(R_i), \overline{\tau}(R_i)]$ *entonces* $xI_i\overline{\tau}(R_i)$.

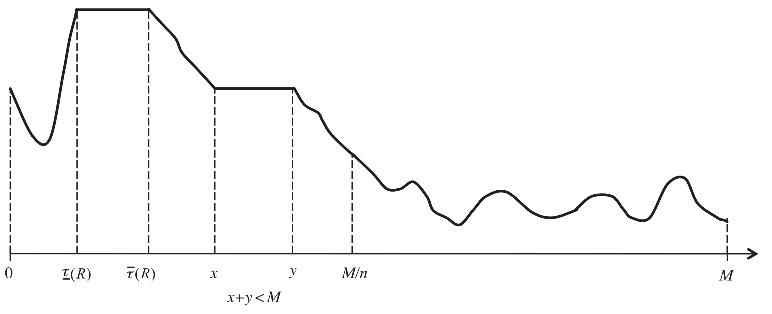
Note que el número de agentes n juega un rol fundamental en las condiciones (a) y (b) de la definición. Denotamos por $\mathcal{R}_{rm}^{\Theta}$ el conjunto de preferencias débilmente monótonas respecto $\Theta(R_i)$.

Las siguientes figuras ilustran los tres posible tipos de preferencias débilmente monótonas sobre Θ dependiendo de si $M/n \leq \underline{\tau}(R_i)$, $\overline{\tau}(R_i) \leq M/n$, $\overline{\tau}(R_i) \leq M/n$, ó $\underline{\tau}(R_i) \leq M/n \leq \overline{\tau}(R_i)$.

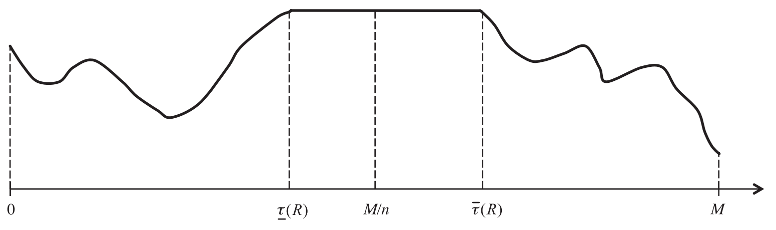
i) $M/n \leq \underline{\tau}(R_i)$:



ii) $\overline{\tau}(R_i) \leq M/n$



iii) $\underline{\tau}(R_i) \leq M/n \leq \overline{\tau}(R_i)$:



Obtendremos que el dominio de preferencias débilmente monótonas sobre Θ es el dominio maximal de preferencias que admite reglas no manipulables, eficientes y simétricas. Ahora introducimos el concepto de domino maximal respecto de una lista de propiedades.

Definición 14 *Un conjunto de preferencias* $\mathcal{R}_m$ *es* ***maximal respecto de una lista de propiedades*** *si: (1)* $\mathcal{R}_m \subseteq \mathcal{R}$*; (2) existe una regla sobre* $\mathcal{R}_m^n$ *que satisface las propiedades; y (3) no existe una regla sobre* $\mathcal{Q}^n$ *satisfaciendo las mismas propiedades tal que* $\mathcal{R}_m \subseteq \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$.

Massó y Neme (2001), demuestran el siguiente teorema de caracterización.

Teorema 12 *El conjunto de preferencias débilmente monótonas sobre* Θ*,* $\mathcal{R}_{rm}^{\Theta}$*, es el único dominio maximal de preferencias que contiene a* $\mathcal{U}$ *para las propiedades de no-manipulabilidad, eficiencia y simetría.*

Para finalizar, queremos comentar que actualmente los resultados sobre maximalidad de dominios para una serie de propiedades de la función de elección social están también siendo estudiados en otros contextos económicos. Por ejemplo, en el problema de asignación bilateral (concretamente, en el modelo de asignación de viviendas) Ehlers (2002) obtiene un único dominio maximal para las funciones de elección social no manipulables por coaliciones y eficientes.

Referencias

Aumann, R. y M. Maschler (1985): “Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud”, *Journal of Economic Theory*, 36, 195-213.

Arrow, K.J. (1963): *Social choice and individual values*, 2ª edición. New York. Wiley.

Barberà, S. y M. Jackson (1995): “Strategy-proof exchange”, *Econometrica*, 63, 51-87.

Barberà, S., M. Jackson y A. Neme (1997): “Strategy-proof allotment rules”, *Games and Economic Behavour*, 18, 1-21.

Benassy, J. (1982): *The economics of market disequilibrium*, Academic Press.

Berga, D. (1998): “Strategy-proofness and single-plateaued preferences”, *Mathematical Social Sciences*, 35, 105-120.

Ching, S. (1992): “A simple characterization of the uniform rule”, *Economic Letters*, 40, 57-60.

Ching, S. (1994): “An alternative characterization of the uniform rule”, *Social Choice and Welfare*, 11, 131-136.

Ching, S. y S. Serizawa (1998): “A maximal domain for the existence of strategy-proof rules”, *Journal of Economic Theory*, 78, 157-166.

Dasgupta P., P. Hammond y E. Maskin (1979): “The implementation of social choice rules: some general results on incentive compatibility”, *Review of Economic Studies,* 46, 185-216.

de Frutos, M.A y J. Massó (1995): “More on the Uniform allocation rule: equity and consistency”, Working Paper 288.95. Universitat Autònoma de Barcelona.

Ehlers, L. (2002): “Coalitional Strategy-Proof House Allocation”, *Journal of Economic Theory,* 105, 298-317.

Esö, P. and Schummer, J. (2004): “Bribing and signalling in second price auctions”, *Games and Economic Behavior*, 47, 299-324.

Fiestras-Janeiro, G., Klijn, F., and Sánchez, E. (2004): “Manipulation of Optimal Matchings via Predonation of Endowment”, *Mathematical Social Sciences*, 47, 295-312.

Gibbard, A. (1973): “Manipulation of voting schemes: A general result”, *Econometrica,* 41, 587-601.

Hurwicz, L. (1972): “On informationally decentralized systems” en *Decision and Organization*. Ed. C McGuire y R. Rakner. North Holland.

Hurwicz, L. y M. Walker (1990): “On the generic nonoptimality of dominant-strategy allocation mechanisms: a general theorem that includes pure exchange economies”. *Econometrica,*58, 683-704.

Massó, J. y A. Neme (2001): “Maximal domain of preferences in the division problem”, *Games and Economic Behavior*, 37, 367-387.

Massó, J. y A. Neme (2007): “Bribe-Proof Rules in the Division Problem”, *Games and Economic Behavior,* 61, 331-343.

May, K.O. (1952): “A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decisions”, *Econometrica*, 20, 680-684.

Moulin, H. (1984): “Generalized Condorcet-winners for single peaked and single plateaued preferences”, *Social Choice and Welfare,* 1, 127–147.

Moulin, H. (1985a): “Egalitarianism and Utilitarianism in Quasi-Linear Bargaining”, *Econometrica,* 53, 49-67.

Moulin, H. (1985b): “The Separability Axiom and Equal Sharing Methods”, *Journal of Economic Theory,* 36, 120-148.

Moulin, H. (1987): “Equal or Proportional Division of a Surplus, and other Methods”, *International Journal of Game Theory,* 16, 161-186.

Moulin H. y W. Thomson (1996): “Axiomatic analysis of resource allocation problems”. En *Social Choice Re-examined* Vol 2. Editado por K. Arrow, A. Sen y K. Suzumura, McMillan.

Nicolò, A. (2004): “Efficiency and Truthfulness with Leontief Preferences. A Note on Two-Agent, Two-Good Economies”, *Review of Economic Design*, 8, 373-382.

Satterthwaite M. (1975): “Strategy-proofness and Arrow’s conditions: Existence and correspondence theorem for voting procedures and social choice functions”, *Journal of Economic Theory* 10, 187-217.

Satterthwaite M. Y H. Sonnenschein (1981): “Strategy-proofness allocation mechanisms at differentiable points”, *Review of Economic Studies,* 48, 587-598.

Schummer, J. (1997): “Strategy-proof versus efficiency on restricted domains of exchange economies”, *Social Choice and Welfare* 14, 47-56.

Schummer, J. (2000): “Manipulation through bribes”, *Journal of Economic Theory,* 91, 180-198.

Schummer, J. y W. Thomson (1996): “Two derivations of the uniform rule and an application to bankruptcy”, *Economic Letters,* 55 , 333-337.

Sen, A. K. (1970): “The impossibility of a Paretian liberal”, *Journal of Political Economy,* 78, 152-157.

Serizawa, S. (1998): “Pairwise strategy-proofness”, mimeo, Tohoku University.

Sprumont, Y. (1991): “The division problem with single-peaked preferences: a characterization of the uniform allocation rule”, *Econometrica* 59, 509-519.

Thomson, W. (1997): “The Replacement Principle in Economies with Single-Peaked Preferences”, *Journal of Economic Theory*, 76, 145-168.

Young, P. (1987): “On Dividing an Amount According to Individual Claims or Liabilities”, Mathematics of Operations Research, 12, 398-414.

Zhou, L. (1991): “Inefficiency of strategy-proof allocation mechanisms in pure exchange economies”, *Social Choice and Welfare,* 8, 247-257.

MODELOS DE ASIGNACIÓN EN MERCADOS BILATERALES*

Jorge Oviedo
Instituto de Matemática Aplicada de San Luis
Universidad Nacional de San Luis-CONICET

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es introducir el concepto y mostrar un somero resumen de resultados de la teoría modelos de asignación en mercados bilaterales (matching). Por supuesto que aquí no están todos los resultados, ni siquiera todas las líneas de investigación dedicadas a esta teoría, sólo se intenta mostrar una introducción a este tema teniendo en cuenta como se han desarrollado.

Hay mercados (mercado de bienes, bolsa de comercio) donde los agentes dependiendo del precio (del bien o acción) pueden ser compradores o vendedores, éstos han sido ampliamente estudiados usando modelos de oferta y demanda en función de los precios.

En otros mercados (mercado de trabajo donde los agentes son trabajadores y empresas) cada agente no puede cambiar su característica, por ejemplo un trabajador (un estudiante) no puede ser empresa (colegio) se los denomina *modelo de asignación en mercado bilateral* o simplemente *modelo de asignación*. El término asignación (asociación, emparejamiento, concordancia) se refiere a la naturaleza bilateral del intercambio entre los agentes: un individuo trabaja para una institución y ésta lo tiene como empleado.

Algunos mercados bilaterales donde se usan modelos de asignación son: el Programa Nacional de Médicos Residentes (NRMP) de Estados Unidos, en este programa se asignan aproximadamente 20.000 médicos residentes a hospitales. También se han implementado mecanismos centralizados, para la asignación de alumnos a colegios en Nueva York y Boston, han sido desarrollados por Abdulkadiroğlu y

* Agradezco a Ruth Martínez y Alejandro Neme por sus útiles comentarios. Este artículo es parcialmente subvencionado por la Universidad Nacional de San Luis Proyecto 319502, y por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas CONICET, PICT-02114.

Sönmez (2003), Abdulkadiroğlu, Pathak, Roth (2005 y 2009) y Abdulkadiroğlu, Pathak, Roth y Sönmez (2005 y 2006). Roth (2008), muestra otros mercados donde se aplican modelos de asignación.

Los agentes de un modelo de asignación se dividen en dos subconjuntos disjuntos, que nos referiremos a *individuos* (trabajadores, estudiantes, médicos, etc.) e *instituciones* (empresas, colegios, hospitales, etc.)

Cada agente tiene un orden de preferencia sobre el otro conjunto de agentes, es decir, los individuos y las instituciones tienen un orden de preferencia sobre las instituciones y conjuntos de individuos respectivamente. Por ejemplo, en los mercados de trabajo cada trabajador tiene un orden de preferencias (salario, condiciones de trabajo, tareas a desarrollar) sobre las empresas aceptables mientras que éstas ordenan sus trabajadores aceptables según algún criterio de aptitud para desarrollar la tarea. Se dice que una empresa es aceptable para un trabajador si éste la prefiere a quedarse desempleado; un conjunto de trabajadores no es aceptable para una empresa, si ésta prefiere quedarse con un subconjunto propio de él.

Una de las propiedades más importante que debe cumplir cualquier solución de un modelo de asignación es la de *estabilidad*. Hay dos definiciones: asignación estable y núcleo (core). Una asignación es estable o estable por pares, si es individualmente racional (es decir, todos los agentes prefieren lo que les propone la asignación a un subconjunto estricto de lo que les propone, incluyendo permanecer solos) y, si no hay ninguna pareja trabajador-empresa que la bloquee (es decir, que los dos se prefieran mutuamente en lugar de lo que les propone la asignación). Una asignación está en el núcleo si no existe una coalición de agentes (subconjunto de empresas y trabajadores) que la bloquee, es decir, los trabajadores y empresas de la coalición se reasignan entre ellos y todos los agentes obtienen débilmente una mejor asignación y al menos uno de ellos obtiene uno estrictamente mejor.

Los modelos de asignación se clasifican según la cantidad de agentes que se le puede asignar a cada uno de ellos, a un agente se le puede asignar uno o muchos (un conjunto) agentes. El modelo de asignación más simple y uno de los más estudiados se denomina *modelo de asignación uno-a-uno*[1] *o modelo de matrimonio*. A los agentes se los divide en hombres y mujeres, a cada hombre se le asigna a lo más una mujer y viceversa. En el modelo de asignación *uno-a-muchos*, a cada institución se le asocia un conjunto de individuos mientras que a un individuo sólo se le asigna a lo más una institución. En el modelo de asignación *muchos-a-muchos o modelo de trabajo a tiempo parcial*, el trabajador puede ocuparse en

[1] O simplemente modelo uno-a-uno.

varias empresas, un ejemplo de este caso es el de profesores de colegios secundarios que trabajan en varios colegios.

Gale[2] y Shapley en (1962) publicaron el primer trabajo del modelo de asignación y dieron un algoritmo para encontrar una asignación estable en el modelo de matrimonio. En una clase de modelos uno-a-muchos, al que llamaron modelo de admisión de estudiantes a colegios, mostraron que el conjunto de asignaciones estables es no vacío, cuando en el modelo general puede ser vacío. La causa de que el conjunto de asignaciones estable sea o no vacío depende de la estructura de las preferencias de las empresas. Por ejemplo, las preferencias de las empresas en el modelo de admisión a los colegios son q-responsivas.

Kelso y Crawford (1982) definieron una preferencia más general para cada empresa denominada sustituible y mostraron que para este caso los modelos uno-a-muchos y muchos-a-muchos el conjunto de asignaciones estables es no vacío. También mostraron bajo preferencias sustituibles que coinciden los conjuntos de asignaciones estables y núcleo en el modelo uno-a-muchos. En el modelo muchos-a-muchos los conjuntos de asignaciones estables y núcleo no coinciden, aun con preferencias sustituibles. Sotomayor (1999) definió tres conceptos de estabilidad para el modelo de muchos-a-muchos. Echenique y Oviedo (2006) definieron sustitubilidad fuerte y mostraron que, si se aplica, en el modelo muchos-a-muchos los tres conceptos de estabilidad coinciden y son no vacíos.

Para demostrar que el conjunto de asignaciones estables es no vacío, se usa el algoritmo denominado de Aceptación Diferida, introducido por Gale y Shapley (1962). En cada etapa del *Algoritmo de Aceptación Diferida* un lado del mercado, por ejemplo las empresas, hacen ofertas al mejor conjunto que no contenga trabajadores que lo hayan rechazado en alguna etapa anterior. Los trabajadores que han recibido alguna oferta eligen la mejor de ellas y rechazan las otras. El algoritmo se detiene cuando ningún trabajador rechaza una oferta. La asignación que construye este algoritmo además de ser estable, es la que todas las empresas unánimemente prefieren entre todas las asignaciones estables, a la que se la denomina asignación estable óptima para las empresas. Análogamente, si los trabajadores hacen las ofertas en el *Algoritmo de Aceptación Diferida* y las empresas eligen se construye la asignación estable óptima para los trabajadores. Gale y Shapley (1962) y Roth (1984) demostraron que la asignación estable óptima de las empresas (trabajadores) es la peor de las asignaciones estables para los trabajadores (empresas).

---

[2] El International Journal of Game Theory en el año 2008 dedicó los números 3 y 4 del volumen 36 a David Gale (13/12/1921 -7/3/2008) en ocasión de cumplir 85 años.

Roth (1982) mostró en el modelo uno-a-uno que no existe una asignación individualmente racional que todos los trabajadores (empresas) unánimemente prefieran a la asignación estable óptima de los trabajadores (empresas). Este resultado sólo puede ser parcialmente generalizado al modelo uno-a-muchos ya que es válido para los trabajadores cuando las preferencias de las empresas son q-responsivas, Roth (1985b), y cuando son sustituibles y q-separables, Martínez, Massó Neme y Oviedo (2004b).

McVitie y Wilson (1970) demostraron que los hombres y mujeres que quedan solteros, es decir, la asignación no les asocia nadie, son los mismos en las dos asignaciones estables óptimas del modelo de matrimonio. Esta propiedad vale para cualquier asignación estable sea o no óptima. En el modelo uno-a-muchos, los trabajadores que quedan desocupados siempre son los mismos en cualquier asignación estable, mientras que si una empresa no llena la cuota (máximo número de vacantes que ofrece) en una asignación estable entonces en cualquier otra asignación estable se le asigna el mismo conjunto de trabajadores. Este resultado se conoce como *problema de los hospitales rurales,* Roth (1986) y Martínez, Massó Neme y Oviedo (2000).

Hay algoritmos para construir todas las asignaciones estables en el modelo uno-a-uno, Irving y Leather (1986), McVitie y Wilson (1971), y en el caso del modelo muchos-a-muchos, Martínez, Massó, Neme y Oviedo (2004a).

Otro problema que ha sido estudiado es el comportamiento estratégico de los agentes en los modelos de asignación. Hay ejemplos de mercados de trabajo donde hay un ente que recibe la preferencia declarada por los agentes y usando un mecanismo propone una solución, por ejemplo aplica el Algoritmo de Aceptación Diferida y éste da como solución la asignación estable óptima de los trabajadores (empresas). Esta solución depende de la preferencia declarada por cada agente. En general, el agente antes de declarar su preferencia ante el ente central se puede hacer la siguiente pregunta: *¿qué preferencia me conviene declarar para obtener una mejor asignación*?, o dicho de otra forma, *¿me conviene elegir una preferencia diferente a mi verdadera para obtener una mejor asignación?* Esta pregunta involucra dos clases de preferencias: por un lado está la verdadera preferencia, y por otra la que declara al ente. El teorema de imposibilidad de Roth (1982) demuestra que la respuesta a esa pregunta es afirmativa. Dubins y Freedman (1981), Roth (1982), Martínez, Massó, Neme y Oviedo (2004b), Hatfield y Milgrom (2005) estudiaron la manipulación por parte de los trabajadores (empresas) del mecanismo estable óptimo de los trabajadores (empresas).

Los modelos de asignación bilateral han sido extendidos a mercados donde participan trabajadores y parejas de trabajadores. Aldershof y Carducci (1996), Dutta y Massó (1997), Roth y Peranson (1999), Cantala (2004), Klaus y Klijn (2005). También se han estudiado el modelo de asignación trilateral, conocido como problema de asignación hombre-mujer-hijo, Alkan (1988) y Danilov (2003), y el problema del compañero de cuarto (roommate problem), Gale y Shapley (1962), Gusfield (1988) Irving (1985), Tan (1991).

En la sección siguiente se describe la evolución histórica del problema de médicos residentes en Estados Unidos. En la sección 3 se introduce las definiciones básicas del modelo de asignación, preferencias y sus relaciones y en la sección 4 se dan resultados de existencia para los distintos modelos de asignación bilateral, optimalidad, el Algoritmo de Aceptación Diferida y se muestran propiedades estratégicas. En la sección 5 se dan algunas extensiones del modelo. En este artículo se enuncian los resultados sin demostración y se dan ejemplos para ayudar a entender la teoría.

2. El Problema de Médicos Residentes en Estados Unidos

Lo siguiente es tomado de Roth (1984) y describe el problema de asignación de médicos residentes a hospitales.

A principio del siglo XX los hospitales crearon una nueva forma de realizar el postgrado que consistía en realizar una especialidad por los médicos internos, luego se los llamó residentes. Desde el comienzo el mercado se caracterizó por la intensa competencia entre los hospitales, debido a la escasa oferta de médicos internos. Cada hospital hacía ofertas de designaciones a sus aspirantes en forma independiente. El efecto de esta competencia fue que todo el proceso se degeneró en una carrera entre los hospitales, adelantando la fecha en la cual ellos finalizaban la contratación de los aspirantes, en un intento de tomar ventaja sobre sus competidores. Esta tendencia se aceleró al punto que en 1944 las ofertas se hicieron dos años antes que los médicos finalizaran sus estudios en la universidad, esta situación fue bastante caótica para todas las partes involucradas.

Para combatir esta tendencia, se acordó que ninguna universidad daría información acerca de los estudiantes hasta una fecha fija, así que antes de esa fecha los hospitales no tenían información para hacer ofertas. Esto tuvo el efecto deseado ya que las fechas entre la contratación y el comienzo de la residencia se acercaron.

Ya que los hospitales continuaron haciendo las ofertas independientemente y algunos aspirantes probablemente recibieran varias ofertas fue necesario que cada oferta se acompañase con una fecha límite para la aceptación. Un aspirante que *recibía una oferta de un hospital podía esperar hasta último momento antes de aceptarla, con la esperanza de recibir una mejor oferta, es claro que si aceptaba la primera oferta se perjudicaría si luego recibía una mejor. También los hospitales se perjudicaban si recibían un rechazo a último momento, porque podían perder algún candidato alternativo, porque si bien éste podía haber aceptado una oferta, hubiese preferido ser contratado por ese hospital. Por tal razón fue que la fecha límite para la aceptación fue gradualmente acercándose a la fecha de la oferta llegándose en 1949 a solo doce horas -del 15 de noviembre-. Sin embargo esta compresión del tiempo de espera no resolvió el problema básico, un sistema competitivo como éste conducía a una asignación inestable. Finalmente, en 1950 se acordó en cambiar del mercado competitivo a un sistema centralizado por la Asociación de Colegios Médicos Americanos (AAMC, http://www.aamc.org) que involucró la cooperación voluntaria entre los hospitales, en la cual cada aspirante debía enviar una lista ordenada de preferencias de hospitales y cada hospital debía enviar una lista de preferencias de sus aspirantes. Con estas listas, de preferencias, la asociación producía una asignación de médicos a hospitales. Sin embargo, el primer algoritmo que usó la AAMC en 1951, tuvo errores porque en algunas casos podía no producir una asignación estable, además algún médico podía beneficiarse si cambiaba su lista de preferencias de hospitales. Mullin y Stalnaker (1952) propusieron un algoritmo llamado Programa Nacional de Médicos Residentes (NRMP) el cual producía una asignación estable. Este algoritmo se sigue usando con algunos cambios realizados en 1999. La participación en este esquema centralizado es voluntaria y los aspirantes son libres de arreglar un contrato independientemente con algún hospital, pero desde el comienzo, la utilización del algoritmo fue del 95% de los 20.000 aspirantes. Debido a que el número de parejas de aspirantes que empezaron a participar del esquema centralizado fue creciendo, este porcentaje disminuyó al 85%. En 1999 se modificó el algoritmo donde se permite que participen como parejas de médicos residentes, actualmente el 98% usan el resultado del algoritmo NRMP (http://www.nrmp.org).*

3. Definiciones Básicas del Modelo de Asignación

El modelo de asignación consta de dos conjuntos finitos y disjuntos de agentes. El conjunto de *instituciones* $F=\{f1,...,fn\}$, por ejemplo: empresas, hospitales, colegios, etc. y un conjunto de *individuos* $W=\{w1,...,wm\}$ por ejemplo: trabajadores, médicos, estudiantes, etc. Usaremos el lenguaje de mercado de trabajo y nos referiremos de ahora en adelante a empresas y trabajadores o colegios y estudiantes.

Cada agente $a \in F \cup W$, tiene una relación de preferencia, sobre 2^W si $a \in F$ *y sobre* 2^F si $a \in W$. Por ejemplo, P_f:*{w1,w3}*P_f *{w2}* P_f *{w1}* P_f $\emptyset$ P_f *{w3}* P_f ..., denota la preferencia de la empresa *f, y* dice que prefiere en primer lugar al conjunto *{w1,w3}*, luego a *{w2}*, y en tercer lugar *{w1},* mientras que el conjunto formado por el trabajador *w3* no es aceptable. En forma reducida sólo escribiremos los conjuntos aceptables (preferidos al $\emptyset$). En el ejemplo, P_f:*{w1,w3}, {w2}, {w1}* denota la preferencia de *f*. En el caso que cada agente ordene sólo conjuntos de cardinalidad uno,[3] es el modelo de asignación uno-a-uno. Si sólo los trabajadores deben ordenar conjuntos de cardinalidad uno, es el modelo de asignación uno-a-muchos. En el caso que no hay restricción es el modelo muchos-a-muchos.

Denotaremos por:

- $P=(P_{f1},...,P_{fn},P_{w1},...,P_{wm})$, al vector o perfil de preferencias para los agentes.
- *(F,W,P),* al modelo de asignación (uno-a-uno, uno-a-muchos o muchos-a-muchos).
- *R*, al perfil de preferencias débil inducida por *P*.

La definición siguiente es de asignación en el mercado bilateral uno-a-muchos.

Definición 1. Una asignación (matching) es una función $\mu: F \cup W \rightarrow 2^{F \cup W}$, tal que

1. $\mu(f) \subseteq W$.
2. $\mu(w)=\emptyset$ o $\mu(w) \subseteq F$ y $|\mu(w)|=1$.
3. $\mu(w)=f$ [4] si y sólo si $w \in \mu(f)$.

La primera parte indica que a cada empresa se le asigna un subconjunto de trabajadores, que eventualmente puede ser vacío. La segunda parte indica que a cada trabajador que no está desempleado se le asigna una única empresa. La tercera indica la bilateralidad de la asignación.

---

[3] Haciendo abuso de notación omitiremos las llaves de los conjuntos, y escribiremos P_w:*f1, f3,* en lugar de P_w:*{f1},{f3}*.

[4] Haciendo abuso de notación omitiremos las llaves para denotar un conjunto con un único elemento. Por ejemplo escribiremos $\mu(w)=f$ en lugar de $\mu(w)=\{f\}$.

En el caso que en la Definición cambiemos 1. por 1′. $\mu(f)=\varnothing$ o $\mu(f) \subseteq W$ y $|\mu(f)|=1$, tenemos el modelo uno-a-uno. Mientras que si cambiamos 2. por 2′. $\mu(w) \subseteq F$, tenemos el modelo muchos-a-muchos.

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 1 Sean los conjuntos $F=\{f1, f2', f3\}$ y $W=\{w1, w2', w3, w4\}$

	$f1$	$f2$	$f3$	$\varnothing$
μ:	$\{w1,w2\}$	$\{w3\}$	$\varnothing$	$\{w4\}$

La asignación μ asigna a las empresas $f1$ y $f2$, los conjuntos $\{w1,w2\}$ y $\{w3\}$ respectivamente, mientras que a $f3$ no se le asigna ningún trabajador y $w4$ queda desocupado.

Ahora estudiaremos asignaciones que son inmunes a posibles desviaciones de los agentes.

Un agente $a \in F \cup W$ *bloquea* a μ cuando prefiere un subconjunto estricto de $\mu(a)$ al asignado. Formalmente, f bloquea a μ cuando $\mu(f) \neq Ch(\mu(f),P_f)$ donde $Ch(S,P_f)$ denota el conjunto de elección (choice set) para cualquier $S \subseteq W$, definido por

$$Ch(S,P_f) = \max_{P_f} \{T \subseteq S : TR_f S\}.$$

Por ejemplo, si P_f: $\{w1, w3\},\{w2\},\{w1\}$, entonces $Ch(\{w1, w2\},P_f)=\{w2\}$.

En el caso que los agentes de un lado del mercado sólo ordenan conjuntos de cardinalidad uno, se tiene que w *bloquea* a μ si $\varnothing P_w\, \mu(w)$, es decir, la asignación le asocia una empresa no aceptable al trabajador, por lo tanto él prefiere rechazar la empresa que le asocia la asignación y quedarse desempleado.

Una asignación es *individualmente racional* si no está bloqueada por ningún agente $a \in F \cup W$. $IR(P)$ denota el conjunto de las asignaciones individualmente racionales.

Sea (w,f) un par trabajador-empresa tal que $w \notin \mu(f)$, diremos que en el modelo uno-a-muchos, *(w,f) bloquea a μ si:*

i) $f P_w\, \mu(w)$[5]
ii) $w \in Ch(\mu(f) \cup \{w\}, P_f)$[6]

[5] En el modelo muchos-a-muchos hay que cambiar esta condición por $f \in Ch(\mu(w) \cup \{f\}, P_w)$.

[6] En el modelo uno-a-uno hay que cambiar esta condición por $wP_f\, \mu(f)$.

Esto dice que tanto el trabajador w como la empresa f se prefieren mutuamente a lo que le asocia la asignación μ y el emparejamiento entre ellos se puede llevar a cabo con el mutuo acuerdo de las partes.

Definición 2 Una asignación μ es *estable* si es individualmente racional y no está bloqueada por ningún par de trabajador-empresa (w,f).

Denotaremos por $S(P)$ al conjunto de asignaciones estables. Gale y Shapley (1962) mostraron que $S(P)$ es no vacío en el modelo uno-a-uno y también en una clase de modelos uno-a-muchos.

Teorema 1 (Gale y Shapley, 1962) En el modelo de admisión a los colegios[7] y en el modelo de uno-a-uno siempre existen asignaciones estables.

El siguiente ejemplo, de modelo uno-a-muchos, muestra que $S(P)$ puede ser vacío.

Ejemplo 2 ($S(P)=\emptyset$, de Martínez, Massó, Neme y Oviedo, 2001) Sea $F=\{f1, f2\}$ y $W=\{w1, w2, w3, w4\}$ las empresas y trabajadores, respectivamente y el perfil de preferencias P definido por

P_{f1}: $\{w3,w4\},\{w2,w4\},\{w1,w2\},\{w1,w3\},\{w2,w3\},\{w1,w4\},\{w1\},\{w2\},\{w3\},\{w4\}$
P_{f2}: $\{w3\},\{w4\}$
P_{w1}: $F1$
P_{w2}: $f1$
P_{w3}: $f1, f2$
P_{w4}: $f2, f1$.

Por ejemplo la asignación $\mu(f1)=\{w2,w4\}$, $\mu(f2)=\{w3\}$, está bloqueada por $(w3,f1)$, ya que $f1P_{w3}f2=\mu(w3)$ y $w3 \in Ch(\{w2,w4\} \cup \{w3\},P_{f1})=\{w3,w4\}$. Similarmente se puede demostrar que cualquier asignación individualmente racional tiene un par, trabajador-empresa, que la bloquea.

Una asignación μ esta *bloqueada por una coalición* $W' \cup F'$ si existe una asignación μ' tal que $\emptyset \neq W' \cup F' \subseteq W \cup F$ y para cada $(w,f) \in W' \times F'$, se cumple

[7] Modelo uno-a-muchos con preferencias q-separables (Ver definición 5).

que: $\mu'(w) \in F'$ y $\mu'(f) \in W'$ (factibilidad), $\mu'(w)\, R_w\, \mu(w)$, $\mu'(f) R_f\, \mu(f)$ y existe $a \in W' \cup F'$ tal que $\mu'(a)\ P(a)\ \mu(a)$. Esto dice que todos los miembros de la coalición, reasignándose entre ellos, mejoran débilmente y al menos uno mejora estrictamente.

Definición 3 El *núcleo* (core) es el conjunto de asignaciones que no están bloqueadas por ninguna coalición $W' \times F'$.

$C(P)$ denota el conjunto de asignaciones que están en el núcleo y es un subconjunto de $S(P)$, ya que si una asignación no está bloqueada por ninguna coalición no estará bloqueada por un par empresa-trabajador ni por ningún agente.

Observación 1 De las Definiciones 2 y 3 se sigue que $C(P) \subseteq S(P)$.

3.1 Preferencias

Debido que puede ocurrir que no existan asignaciones estables en el modelo uno-a-muchos, ver Ejemplo 2, se restringen las preferencias de las empresas dando condiciones suficientes para que el conjunto de asignaciones estables sea no vacío.

Denotamos con q_a la cuota de un agente $a \in F \cup W$. En el caso de una empresa f es el máximo número de vacantes que tiene para ofrecer a los trabajadores, este cupo puede ser dado por limitaciones tecnológicas, legales, presupuestarias, etc. Así, cualquier conjunto de trabajadores que supere la cuota q_f, no es aceptable para la empresa. En el caso que para cada agente $a \in F \cup W$, q_a=1, es el modelo uno-a-uno o modelo de matrimonio, resultando éste un caso particular del modelo uno-a-muchos y éste del modelo muchos-a-muchos.

Definiremos preferencias q-separables, q-responsivas y sustituibles. Una empresa tiene preferencias P_f, q-separables cuando prefiere agregar, a cualquier conjunto de trabajadores, uno aceptable; mientras que obtiene un conjunto peor (menos preferido) cuando agrega un trabajador no aceptable. Formalmente

Definición 4 P_f es *q_f-separable* si para todo $S \subseteq W$ con $|S|<q_f$ y para todo $w \in W$, $S \cup \{w\} P_f S$, cuando $\{w\} P_f \varnothing$.

Una preferencia q-separable es q-responsiva (q-responsive), si responde a su orden individual, en el sentido que dos conjuntos que difieran en un trabajador, prefiere al (conjunto) que contiene al mejor (trabajador) de ellos. Formalmente

Definición 5 P_f es q_f *-responsiva* si es q_f-separable y (a) para todo $S \subseteq W$ con $|S|<q_f$, y $w1,w2 \notin S$, $S \cup \{w1\} P_f\, S \cup \{w2\}$ cuando $\{w1\} P_f \{w2\}$, (b) $\varnothing\, P_f S$ para todo S tal que $|S|>q_f$.

Los colegios en el *modelo de admisión a los colegios* (Gale y Shapley (1962)) y los hospitales en NRMP tienen preferencias *q-responsivas*.

Por último, definimos preferencia sustituible para una empresa *f* que dice que los trabajadores no son complementarios, es decir, si un trabajador está en el conjunto de elección de un conjunto seguirá estando en el conjunto de elección de cualquier subconjunto. Formalmente

Definición 6 P_f es *sustituible* si para todo $S \subseteq W$ que contiene a w y w' ($w \neq w'$), si $w \in Ch(S,P_f)$ entonces $w \in Ch(S \backslash \{w'\},P_f)$.

El siguiente ejemplo muestra una preferencia no sustituible.

Ejemplo 3 (Preferencia no sustituible) $P_f=\{w1,w2\},\{w2\},\{w3\},\{w1\}$. Tenemos que $w1 \in Ch(\{w1,w2,w3\},P_f)=\{w1,w2\}$, pero $w1 \notin Ch(\{w1,w3\},P_f)=\{w3\}$. Note que el trabajador *w1* es complementario de *w2*, ya que si éste no está disponible para la empresa, ésta no quiere seguir contratando a *w1*.

3.2 Relaciones entre Preferencias

En esta sección daremos relaciones entre las preferencias definidas anteriormente.

Observación 2 De la definición tenemos que si P_f es *q-responsiva* entonces es *q*-separable.

El ejemplo siguiente muestra una preferencia *q*-separable pero no *q*-responsiva.

Ejemplo 4 (*q*-separable *no implica* *q*-responsiva): Sea

P_f:$\{w2,w3\},\{w1,w2\},\{w1,w3\},\{w1\},\{w2\},\{w3\}$.

P_f, es *2-separable* pero no *2-responsiva* ya que $\{w2\}P_f\{w3\}$ pero $\{w1,w3\}P_f\{w1,w2\}$

Proposición 2 (Roth y Sotomayor, 1990) Si P_f es q-responsiva entonces es sustituible.

El siguiente ejemplo muestra que q-separable no implica sustituible.

Ejemplo 5 (q-separable no implica sustituible) Sea

P_f:{w1,w2},{w3,w4},{w1,w3},{w2,w3},{w2,w4},{w1},{w2},{w3},{w4}.

P_f, es 2-separable pero no es sustituible porque

$w1 \in Ch(\{w1,w2\} \cup \{w3,w4\},P_f)=\{w1,w2\}$

y

$w1 \notin Ch(\{w1,w3,w4\},P_f)=\{w3,w4\}$.

4. Resultados

4.1 Existencia de Asignaciones Estables

El modelo de uno-a-muchos con preferencias *q-responsivas* se le puede asociar un modelo uno-a-uno para estudiar las asignaciones estables. Para esto, cada posición de las q_f que tiene la empresa *f,* se la considera como una subempresa con cuota uno. La preferencia de cada subempresa coincide con el orden individual de la empresa *f*. Cada trabajador ordena las subempresas manteniendo el orden de las empresas. El siguiente ejemplo muestra esta descomposición.

Teorema 3 (Roth, 1985) Una asignación es estable en el modelo uno-a-muchos con preferencias q-responsivas si y sólo si las correspondientes asignaciones del modelo uno-a-uno son estables.

El ejemplo siguiente muestra la construcción anterior.

Ejemplo 6 Sean $F=\{f1,f2\}$ y $W=\{w1,w2,w3\}$ las empresas y trabajadores, respectivamente con cuotas $q_{f1}=2$ y $q_{f2}=1$. El perfil de preferencias P está definido por:

P_{f1}: $\{w1,w2\},\{w1,w3\},\{w2,w3\},\{w1\},\{w2\},\{w3\}$,
P_{f2}: $\{w1\},\{w3\}$
P_{w1}: $f1, f2$
P_{w2}: $f2, f1$ y
P_{w3}: $f1, f2$.

La única asignación estable es

	$f1$	$f2$
μ:	$\{w1,w2\}$	$\{w3\}$.

Como $q_{f1}=2$, $f1$ se divide en dos subempresas, $f11$ y $f12$ y tenemos el modelo asociado uno-a-uno $(\{f11,f12,f2\}\{w1,w2,w3\},P')$ donde P' viene dado por

$P'_{f11}=P'_{f12}$: $\{w1\},\{w2\},\{w3\}$,
P'_{f2}: $\{w1\},\{w3\}$
P'_{w1}: $f11,f12,f2$
P'_{w2}: $f2,f11,f12$ y
P'_{w3}: $f11,f12,f2$.

La única asignación estable es

	$f11$	$f12$	$f2$
μ':	$\{w1\}$	$\{w2\}$	$\{w3\}$.

Así tenemos que la asignación estable μ' del modelo asociado uno-a-uno es equivalente a la asignación estable μ del modelo uno-a-muchos.

El Teorema de Gale y Shapley no se puede extender al modelo uno-a-muchos con preferencias q-separable (Ver Ejemplo 2) pero es verdadero cuando las preferencias son sustituibles.

Teorema 4 (Kelso y Crawford, 1982) Sea (F,W,P) un modelo uno-a-muchos con P sustituible. Entonces $S(P) \neq \emptyset$.

También demostraron que el núcleo es equivalente al conjunto de asignaciones estables.

Teorema 4 (Kelso y Crawford, 1982) Si *P* es sustituible entonces *C(P)=S(P)*.

Ambos teoremas de existencia se pueden demostrar usando el Algoritmo de Aceptación Diferida.

Algoritmo de Aceptación Diferida

Describiremos el algoritmo cuando las empresas hacen las ofertas y los trabajadores eligen.[8] Sea *(F,W,P)* un modelo uno-a-muchos con preferencias sustituibles.

Etapa 1. **(a)** Cada empresa hace oferta al conjunto de trabajadores más preferido.
(b) Cada trabajador que ha recibido alguna oferta, acepta la mejor de las empresas aceptables y rechaza las otras ofertas.

Etapa k. **(a)** Cada empresa hace una oferta al conjunto de trabajadores más preferido que no contenga ninguno que lo haya rechazado en alguna etapa anterior.
(b) Cada trabajador acepta la mejor de las empresas aceptables y rechaza las otras.
El algoritmo termina en una etapa donde no hay ningún rechazo por parte de algún trabajador.

En cada etapa los trabajadores aceptan a lo más una empresa y el algoritmo construye una asignación individualmente racional, pues cada empresa hace oferta en cada etapa a un conjunto de trabajadores que no lo han rechazado y cada trabajador elige a una empresa aceptable.

Cuando se detiene el algoritmo se puede mostrar que la asignación resultante es estable.

Ejemplo 7 (Algoritmo de Aceptación Diferida) Las empresas hacen las ofertas y los trabajadores eligen. *F={f1,f2,f3}* y *W={w1,w2,w3,w4}*.

P_{f1}: *{w1,w2},{w2,w3},{w1,w3},{w2},{w3},{w1},*
P_{f2}: *{w1,w2},{w2,w4},{w1},{w2},{w4},*

---

[8] En forma simétrica se puede describir el algoritmo donde los trabajadores hacen las ofertas y las empresas eligen.

P_{f3}: $\{w1,w3\},\{w2,w3\},\{w1,w4\},\{w1\}\},\{w2\},\{w3\},\{w4\}$,
P_{w1}: $f3,f2,f1$,
P_{w2}: $f2,f1,f3$,
P_{w3}: $f1,f3$, y
P_{w4}: $f3,f2$.

	f1	*f2*	*f3*
Etapa 1 (a)	$\{w1,w2\}$	$\{w1,w2\}$	$\{w1,w3\}$
Etapa 1 (b)	$\varnothing$	$\{w2\}$	$\{w1,w3\}$
Etapa 2 (a)	$\{w3\}$	$\{w2,w4\}$	$\{w1,w3\}$
Etapa 2 (b)	$\{w3\}$	$\{w2,w4\}$	$\{w1\}$
Etapa 3 (a)	$\{w3\}$	$\{w2,w4\}$	$\{w1,w4\}$
Etapa 3 (b)	$\{w3\}$	$\{w2\}$	$\{w1,w4\}$
Etapa 4 (a)	$\{w3\}$	$\{w2\}$	$\{w1,w4\}$
Etapa 4 (b), μ_F:	$\{w3\}$	$\{w2\}$	$\{w1,w4\}$

En la Etapa 1 (a), *f1* y *f2* hacen ofertas a $\{w1,w2\}$ mientras que *f3* a $\{w1,w3\}$. Así tenemos que *w1* recibe ofertas de *f1*, *f2* y *f3*, *w2* recibe ofertas de *f1* y *f2* y *w3* sólo recibe la oferta de *f3*. En la Etapa 1 (b) el trabajador *w1* elige *f3*, porque $f3\ P_{w1} f2\ P_{w1} f$, *w2*, elige *f2* porque $f2\ P_{w2} f1$, y *w3* elige *f3* porque es aceptable.

En la Etapa 2 (a), *f1* hace oferta $\{w3\}$ porque es el primer conjunto que no contiene a *w1* o *w2* (trabajadores que lo rechazaron en etapa 1) y *f2* ofrece a $\{w2,w4\}$ conjunto que no contiene a *w1*. *f3* no hace ofertas porque no fue rechazada ninguna oferta de la etapa anterior. En Etapa 2 (b) sólo *w3* tiene 2 ofertas *f1* y *f3*, se queda con *f1*, mientras que *w1*, *w2* y *w4* aceptan la oferta que recibieron porque son empresas aceptables para ellos.

En la Etapa 4 no hay más rechazos, el algoritmo se detiene y μ_F denota la asignación construida por el Algoritmo de Aceptación Diferida cuando las empresas hacen las ofertas. Análogamente, si se aplica este algoritmo cuando las ofertas las hacen los trabajadores y las empresas eligen, se obtiene la asignación que se denota con μ_W, y ambas asignaciones son estables. En general tenemos que $\mu_F \neq \mu_W$, por lo tanto $|S(P)|\geq 1$. Se puede demostrar que *NRMP* es distinto[9] al Algoritmo de Aceptación Diferida pero construye la asignación μ_F.

[9] Ver Roth y Sotomayor (1990) páginas 134-137.

4.2. Optimalidad y Competencia. Mejor-Peor Asignación Estable

Gale y Shapley (1962) además de demostrar la existencia de una asignación estable también probaron que en el modelo de Admisión a los Colegios la asignación (construida por el Algoritmo de Acepción Diferida) μ_F (μ_W) es óptima para las empresas (trabajadores). Posteriormente Roth (1984) extendió este resultado al modelo uno-a-muchos donde las empresas tienen preferencias sustituibles y demostró que μ_F (μ_W) es la menos preferida de todas las asignaciones estables por los trabajadores (empresas). A cada una de las asignaciones μ_F *y* μ_W se las denomina *asignaciones estables óptimas* para las empresas y trabajadores, respectivamente. Si bien todas las empresas (trabajadores) compiten entre ellas por los trabajadores (las empresas), este resultado muestra la coincidencia de interés entre las empresas (los trabajadores) ya que todas coinciden que μ_F (μ_W) es la mejor de las asignaciones estables para ellas (ellos). También demuestra que la polarización de intereses es con los agentes del otro lado del mercado. El modelo de asignación es una clase de mercados bilaterales que tienen esta propiedad de coincidencia, polaridad y optimalidad. Formalmente:

Teorema 5 (Gale y Shapley, 1962 y Roth 1984) Sea (F,W,P) un modelo uno-a-muchos, P sustituible. Entonces para todo $\mu \in S(P)$:

$$\mu_W(w) R_w\, \mu(w) R_w\, \mu_F(w) \quad \forall\, w \in W$$
$$\mu_F(f) R_f\, \mu(f) R_f\, \mu_W(f) \quad \forall\, f \in F$$

Se pueden comparar las asignaciones estables óptimas con asignaciones individualmente racionales y no estables, se demuestra que las asignaciones estables óptimas son *débilmente Pareto óptima* entre las asignaciones individualmente racionales. Formalmente

Teorema 6 (Roth, 1982) Sea (F,W,P) un modelo uno-a-uno. Entonces no existe una asignación individualmente racional μ tal que:

$\mu(w) P_w\, \mu_W(w)$ para todo $w \in W$.

Se tiene el resultado análogo para la asignación óptima de las empresas μ_F. Este resultado dice que la asignación μ_W, es débilmente Pareto óptima para los trabajadores en el conjunto de asignaciones individualmente racionales.

Roth (1985b) pudo generalizar parcialmente este resultado al modelo uno-a-muchos con preferencias q-separables y demostró que el resultado es verdadero para los trabajadores mientras que es falso para las instituciones.

Teorema 7 (Roth, 1985b) Sea (F,W,P), un modelo de admisión a los colegios, es decir un modelo uno-a-muchos con preferencias q-responsivas. Entonces no existe una asignación individualmente racional μ tal que para todo $w \in W$.

$\mu(w)P_w\mu_W(w)$

El ejemplo siguiente muestra que el análogo para las empresas es falso.

Ejemplo 8 (Roth, 1985b) Sean $F=\{f1,f2,f3\}$ y $W=\{w1,w2,w3,w4\}$ los conjuntos de agentes y P, definida por

$P_{f1}: \{w1,w2\},\{w1,w3\},\{w2,w3\},\{w1,w4\},\{w2,w4\},\{w3,w4\},\{w1\},\{w2\},\{w3\},\{w4\},$
$P_{f2}: \{w1\},\{w2\},\{w3\},\{w4\},$
$P_{f3}: \{w3\},\{w1\},\{w2\},\{w4\},$
$P_{w1}: f3,f1,f2,$
$P_{w2}: f2,f1,f3,$
$P_{w3}: f1,f3,f2,$ y
$P_{w4}: f1,f2,f3.$

Se puede verificar que P es $(2,1,1)$-responsiva.

	$f1$	$f2$	$f3$
μ_F:	$\{w3,w4\}$	$\{w2\}$	$\{w1\}$
μ:	$\{w2,w4\}$	$\{w1\}$	$\{w3\}$

Note que las tres empresas prefieren los conjuntos de trabajadores que asigna μ que la de μ_F.

El siguiente ejemplo muestra que el teorema anterior de Roth para los estudiantes no se puede generalizar al modelo uno-a-muchos con preferencias sustituibles.

Ejemplo 9 (Martínez, Massó, Neme y Oviedo, 2004b). Sean $F=\{f1,f2,f3\}$ y $W=\{w1,w2,w3,w4\}$ los conjuntos de agentes y P, definida por

$P_{f1}: \{w1,w2\},\{w2\},\{w1\},\{w4\},$
$P_{f2}: \{w3\},\{w2,w4\},\{w1,w2\},\{w4\},\{w1\},\{w2\}$
$P_{f3}: \{w4\},\{w1\},\{w3\},$
$P_{w1}: f2,f3,f1,$
$P_{w2}: f2,f1,$
$P_{w3}: f3,f2$, y
$P_{w4}: f2,f1,f3.$

Se puede verificar que P es sustituible.

	$f1$	$f2$	$f3$
μ_W:	$\{w1,w2\}$	$\{w3\}$	$\{w4\}$
μ:	$\{w4\}$	$\{w1,w2\}$	$\{w3\}$

Note que los cuatro trabajadores prefieren la asignación de μ a la de μ_W.

El siguiente teorema muestra que el resultado es válido para los trabajadores en el modelo uno-a-muchos con preferencias sustituibles y q-separables.

Teorema 8 (Martínez, Massó, Neme y Oviedo, 2004b) Si P es sustituible y q-separable. Entonces no existe una asignación individualmente racional μ tal que, para todo $w \in W$

$$\mu(w) P_w \mu_W(w).$$

4.3. Single o Problema de Hospitales Rurales

El primer Teorema enunciado en esta sección dice que si un trabajador esta desocupado en una asignación estable siempre lo estará en cualquier asignación estable. La versión para el modelo uno-a-uno fue demostrada por McVitie y Wilson (1970). La segunda parte del teorema fue demostrada por Roth (1986) y dice que una empresa con preferencias q-responsivas, en un modelo uno-a-muchos, si no llena la cuota en una asignación estable entonces siempre le corresponderá el mismo conjunto de trabajadores en cualquier asignación estable. Los hospitales rurales a menudo no llenan la cuota, de acuerdo al resultado mencionado siempre obtendrán el mismo conjunto de trabajadores en cualquier asignación estable.

Teorema 9 (McVitie y Wilson, 1970 y Roth, 1986) Sea (F,W,P) un modelo uno-a-muchos con P q-separable. Entonces

1. Si $\mu_F(w)=\emptyset$, entonces para todo $\mu \in S(P)$, $\mu(w)=\emptyset$.
2. Si existe una asignación estable μ' tal que $|\mu'(f)|<q$, entonces para todo $\mu \in S(P)$, $\mu(f)=\mu'(f)$.[10]

El siguiente ejemplo, de Martínez, Massó, Neme y Oviedo (2000), muestra que el teorema es falso en el modelo uno-a-muchos con P sustituible.

Ejemplo 10 Sean $F=\{f1,f2\}$ y $W=\{w1,w2,w3,w4\}$ los conjuntos de agentes y P, definida por

$P(f1)$: $\{w1,w2\},\{w1,w3\},\{w2,w4\},\{w3,w4\},\{w1\},\{w2\},\{w3\},\{w4\}$
$P(f2)$: $\{w3\},\{w1,w2\},\{w1\},\{w2\}\{w4\},$
$P(w1)$: $f2,f1,$
$P(w2)$: $f2,f1,$
$P(w3)$: $f1,f2,$ y
$P(w4)$: $f1,f2.$

Se puede verificar que P es sustituible. Las asignaciones estables óptimas son:

	$f1$	$f2$	$\emptyset$
μ_F:	$\{w1,w2\}$	$\{w3\}$	$\{w4\}$
μ_W:	$\{w3,w4\}$	$\{w1,w2\}$	

Tenemos que $\mu_F(w4)=\emptyset,$ mientras que $\mu_W(w4)=f1$.

El teorema anterior es válido para el modelo uno-a-muchos con preferencias sustituibles y q-separables.

Teorema 10 (Martínez, Massó, Neme y Oviedo, 2000) Sea (F,W,P) un modelo uno-a-muchos con P sustituible y q-separable.

1. Si $\mu_F(w)=\emptyset$, entonces para todo $\mu \in S(P)$, $\mu(w)=\emptyset$.
2. Si existe una asignación estable μ' tal que $|\mu'(f)|<q$, entonces para todo $\mu \in S(P)$, $\mu(f)=\mu'(f)$.

[10] Cuando q=1 esta condición se convierte en la anterior.

4.4. Algoritmos para Construir (todo) S(P)

Los siguientes teoremas dicen que existen algoritmos para construir todas las asignaciones estables. Irving y Leather, (1986), usando ciclos de unas preferencias reducidas, mejoraron el algoritmo dado por McVitie y Wilson (1971).

Teorema 11 (McVitie y Wilson, 1971 e Irving y Leather, 1986) Sea *(F,W,P)* el modelo de Admisión a los Colegios y $\mu \in S(P)$, existe un algoritmo para construir μ.

El siguiente teorema es una generalización del resultado anterior.

Teorema 12 (Martínez, Massó Neme y Oviedo, 2004a) Sea *(F,W,P)* un modelo muchos-a-muchos, si P es sustituible existe un algoritmo para construir cualquier $\mu \in S(P)$.

4.5. Incentivos o Propiedades Estratégicas

Como fue notado en el problema de los médicos residentes en Estados Unidos, algunos de los médicos podían beneficiarse si declaraban una preferencia que no era la verdadera. Por lo tanto, los agentes pueden comportarse estratégicamente, ya que la asignación que cada uno de ellos logre dependerá de la preferencia que declararon. Por esto, cada agente quiere declarar una preferencia que maximice la asignación que le da el mecanismo estable. Introducimos las siguientes notaciones para enunciar los resultados de la sección:

- S es el conjunto de preferencias de cada empresa sobre 2^W.
- T es el conjunto de preferencias de los trabajadores sobre $F \cup \{\emptyset\}$.
- $P=S^n \times T^m$ es el conjunto de perfiles de preferencias, donde $n=|F|$ y $m=|W|$.
- $\mathcal{M}$ es el conjunto de asignaciones.
- $h: S^n \times T^m \rightarrow \mathcal{M}$ es un mecanismo que asigna a cada $P \in S^n \times T^m$ una asignación y $h(P)(w)$ es la empresa asignada a w por el mecanismo según el perfil de preferencia que declararon los agentes, mientras que $h(P)(f)$ es el conjunto de trabajadores que le asocia a f.

Para cada subconjunto $T \subseteq W \cup F$, denotamos por P_T al subperfil de preferencia de los agentes de T y $P_{-T'}$ al subperfil de preferencia de los que no están en T.

Decimos que un mecanismo es a prueba de estrategia si no existe ningún agente que pueda beneficiarse si no declara su verdadera preferencia. Formalmente

Definición 7 Un mecanismo $h: S^n \times T^m \to \mathcal{M}$ es a prueba de estrategia o no manipulable, si para todo perfil de preferencia $P \in S^n \times T^m$, todo agente $a \in W \cup F$, y todo $P'_a \in \mathcal{T}$

$h(P)(a)\ R_a\ h(P'_a, P_{-\{a\}})(a)$.

Decimos que $h_W: S^n \times T^m \to \mathcal{M}$ es el mecanismo estable óptimo para los trabajadores si para todo $P \in \mathcal{P}$, $h_W(P)=\mu_W(P)$. En forma análoga h_F es el mecanismo estable óptimo para las empresas.

El resultado siguiente, que se conoce como teorema de imposibilidad, dice que los agentes pueden manipular las preferencias para obtener un mejor resultado cuando se aplica un mecanismo estable.

Teorema 13 (Roth, 1982) No existe un mecanismo estable que sea a prueba de estrategia para cada agente en el modelo uno-a-uno.

Este resultado se puede mostrar con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11 (Roth, 1982) Sean $F=\{f1,f2\}$ y $W=\{w1,w2\}$ los conjuntos de agentes y P, definida por

P_{f1}: $w1,w2$,
P_{f2}: $w2,w1$,
P_{w1}: $f2,f1$ y,
P_{w2}: $f1,f2$.

Se puede verificar que hay dos asignaciones estables:

	$f1$	$f2$
μ_F:	$w1$	$w2$
μ_W:	$w2$	$w1$

por lo tanto, para cualquier mecanismo estable h, tenemos que $h(P)=\mu_F$ o μ_W. Supongamos que $h(P)=\mu_F$, (un argumento simétrico se usa si $h(P)=\mu_W$). Si $w1$ declara que *f1,* es inaceptable, es decir, declara $P'_{w1}: f2,$ y si los otros agentes no cambian su declaración P tenemos el perfil de preferencias $P'=(P_{f1},P_{f2},P'_{w1},P_{w2})$ que tiene una única asignación estable que coincide con μ_W. Por lo tanto, cualquier mecanismo estable debe cumplir que $h(P')=\mu_W$. De esta forma *w1* se beneficia si cambia su preferencia ya que

$$f2=h(P')(w1)P_{w1}h(P)(w1)=f1.$$

En este ejemplo se nota que el trabajador *w1* manipula el mecanismo estable óptimo de las empresas. Ahora analizaremos si algún trabajador (empresa) puede manipular el mecanismo estable óptimo de los trabajadores (las empresas).

Teorema 14 (Dubins y Freedman, 1981, Roth, 1982) Sea *(F,W,P)* un modelo uno-a-muchos con preferencias *q*-responsivas. Entonces el mecanismo estable óptimo para los trabajadores h_W, es a prueba de estrategia o no manipulable por los trabajadores.

El teorema anterior es válido para los dos lados del mercado en el caso del modelo uno-a-uno, mientras que no es válido para las empresas en el modelo de admisión a los colegios.

Teorema 15 (Roth, 1985b) Sea *(F,W,P)* el modelo de admisión a los colegios. El mecanismo estable óptimo para las empresas h_F es manipulable o no es a prueba de estrategia para las empresas.

La demostración se basa en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 8 continuación (Roth, 1985b) Considere que la empresa *f1,* en lugar de declarar su verdadera preferencia $P_{f1}: \{w1,w2\},\{w1,w3\},\{w2,w3\},\{w1,w4\},\{w2,w4\},$ $\{w3,w4\},\{w1\},\{w2\},\{w3\},\{w4\},$ declara $P'_{f1}: \{w2,w4\},\{w2\},\{w4\}$. *S*i los otros agentes declaran P así tenemos el perfil de preferencias $P'=(P'_{f1}, P_{f2}, P_{f3}, P_{w1}, P_{w2}, P_{w3},$ $P_{w4},)$. Luego $h(P')=\mu$. De esta forma *f1* se beneficia si cambia su preferencia ya que

$$\{w2,w4\}=h(P')(f1)P_{f1}h(P)(f1)=\{w3,w4\}.$$

El teorema anterior se puede generalizar al modelo uno-a-muchos.

Teorema 16 (Martínez, Massó, Neme y Oviedo, 2004b) Si para cada n, S es sustituible y q-separable, entonces el mecanismo estable óptimo para los trabajadores h_W es a prueba de estrategia o no manipulable por los trabajadores.

La hipótesis de sustituible se necesita para la existencia de la asignación estable óptima para los trabajadores. La hipótesis de q-separable no puede eliminarse, el siguiente ejemplo muestra que si las preferencias son sólo sustituibles el mecanismo óptimo de los trabajadores no es a prueba de estrategia

Ejemplo 12 (Martínez, Massó, Neme y Oviedo, 2004b, Hatfield y Milgron 2005) Sean $F=\{f1, f2, f3\}$ y $W=\{w1, w2, w3, w4\}$ los conjuntos de agentes y P, definida por

$P_{f1}: \{w1,w2\},\{w2\},\{w1\},\{w4\}$
$P_{f2}: \{w3\},\{w2,w4\},\{w1,w2\},\{w4\},\{w1\},\{w2\},$
$P_{f3}: \{w4\},\{w1\},\{w3\},$
$P_{w1}: f2,f3,f1,$
$P_{w2}: f2,f1,$
$P_{w3}: f3,f2,$ y
$P_{w4}: f2,f1,f3.$

Se puede verificar que P es sustituible y la única asignación estable es:

	$f1$	$f2$	$f3$
μ_W:	$\{w1,w2\}$	$\{w3\}$	$\{w4\}$

por lo tanto, cualquier mecanismo estable h, tenemos que $h_W(P)=\mu_W$. Entonces si $w4$ declara que $f2$ es inaceptable, es decir, declara $P'_{w4}: f1,f3$ y si los otros agentes declaran P así tenemos el perfil de preferencias $P'=(P_{f1}, P_{f2}, P_{f3}, P_{w1}, P_{w2}, P_{w3},P'_{w4})$. Luego $h(P')=\mu'_W$, la asignación estable óptima para los trabajadores es:

	$f1$	$f2$	$f3$
μ'_W:	$\{w4\}$	$\{w1,w2\}$	$\{w3\}$

de esta forma $w4$ se beneficia si cambia su preferencia ya que

$$f1=h(P')(w4)P_{w4}h(P)(w4)=f3.$$

5. Extensiones

Para finalizar, damos algunas extensiones y/o generalizaciones del modelo de asignación bilateral. Estos modelos han sido menos estudiados, por lo tanto falta conocer si los resultados del modelo de asignación bilateral siguen valiendo en estas extensiones. Las extensiones que se consideran aquí son las que se denomina sin dinero. A partir del trabajo de Hatfield y Milgrom (2005) donde se introduce modelos con contratos, se ha retomado el estudio del modelo de asignación bilateral con dinero, introducido por Kelso y Crawford (1982).

5.1. Mercados con Parejas

En el NRMP en Estados Unidos empezó a crecer el número de parejas que iban al mercado de trabajo. El inconveniente que apareció, fue que éste podía asignar hospitales ubicados en distintas ciudades a los miembros de una pareja (había casos que a uno le tocaba en la costa este mientras que a su pareja en la costa oeste). Así uno o ambos miembros de la pareja decidían no aceptar el resultado propuesto. Roth y Peranson (1999) diseñaron una modificación del NRMP, donde la solución consideraba la preferencia de una pareja como un par o vector de preferencia. En el caso que no haya parejas de médicos, el algoritmo modificado produce el mismo resultado que el NRMP. Si bien éste no siempre produce una asignación estable (cuando hay parejas de médicos), encuentra una potencial lista de médicos que están en pareja que pueden bloquear a la asignación. Estos médicos son reasignados usando un algoritmo de Roth y Vande Vate (1990). Si bien no hay una demostración formal que este mecanismo produce una asignación estable, desde 1998 es usado por NRMP y por otros mercados de trabajo centralizados, Roth (2008). Formalmente el modelo de asignación bilateral con parejas fue introducido por Roth (1984) El conjunto de trabajadores se divide en los que están en pareja y los que no. Los trabajadores que están en pareja tienen preferencias sobre pares de empresas, por ejemplo el par $(w1,w2)$ prefiere $(f1,f2)$ a $(f3,f4)$, y los trabajadores, que no están en pareja, tienen preferencias sobre las empresas. Por otro lado, las empresas tienen preferencias sobre los conjuntos de trabajadores. Al igual que en el modelo de asignación bilateral se generalizan los conceptos de asignación estable y núcleo. El primer problema es que este conjunto puede ser vacío. Dutta y Massó (1997) dieron condiciones suficientes sobre las preferencias de las parejas y un algoritmo para encontrar asignaciones en el núcleo. Klaus y Klijn (2005) dieron condiciones suficientes sobre las preferencias de las parejas para la existencia de asignaciones estables. Echenique y Yenmez (2007) dieron un algoritmo para encontrar asignaciones en núcleo (cuando éste es no vacío)

5.2. Mercados Unilaterales

Gale y Shapley (1962) introdujeron el modelo de asignación unilateral al que denominaron problema de compañero de habitación (roommate problem). En este problema, la universidad tiene que distribuir habitaciones que son compartidos por dos estudiantes. Cada estudiante tiene preferencia sobre los posibles compañeros, es decir sobre los otros estudiantes. Formalmente el modelo de asignación unilateral tiene un solo conjunto de agentes. Cada agente tiene un orden de preferencia sobre los otros agentes. Una asignación no es estable si hay un par de agentes, que no están asignados entre ellos pero que se prefieran mutuamente. Ellos dieron un ejemplo donde el conjunto de asignaciones estable puede ser vacío. Irving (1985) y Gusfield (1988) dieron algoritmos para construir asignaciones estables. Tan (1991) dio una condición necesaria y suficiente en las preferencias de los agentes para la existencia de asignaciones estables.

Un modelo de asignación bilateral uno-a-uno (F,W,P) se puede considerar como un modelo de asignación unilateral (N,P), donde $N=F \cup W$. Una excelente referencia que estudia este modelo es el libro de Gusfield e Irving (1989).

5.3. Mercados Trilaterales

Un modelo de asignación trilateral uno-a-uno, también llamado problema de familia, contiene tres conjuntos disjuntos de agentes, por ejemplo hombre, mujer e hijo. Cada agente tiene preferencia sobre pares de los otros agentes. Por ejemplo, un hombre prefiere $(w1,c1)$ a $(w2,c2)$. La triupla $(m,w,c) \in \mu$ indica que los agentes m, w, y c están emparejados por la asignación μ. En forma análoga al modelo bilateral, (m,w,c) bloquea a la asignación μ, si m prefiere (w,c) a $\mu(m)$, w prefiere (m,c) a $\mu(w)$, c prefiere (m,w) a $\mu(c)$. Alkan (1988) además de introducir este modelo dio un ejemplo donde el conjunto de asignaciones estables es no vacío. Danilov (2003) dio una condición suficiente sobre las preferencias de los agentes para la existencia de asignaciones estables.

Referencias

Abdulkadiroğlu, A., P. Pathak y A. E. Roth (2005): "The New York City High School Match", *American Economic Review Papers and Proceedings, 95, 3*64-367.

Abdulkadiroğlu, A., P. Pathak y A. E. Roth (2009): "Strategy-proofness versus efficency in matching with indifferences: redesigning the NYC High School Match", *American Economic Review*, 99, 1954-1978.

Abdulkadiroğlu, A., P. Pathak, A. E. Roth y T. Sönmez (2005): "The Boston Public School Match", *American Economic Review Papers and Proceedings*, 95*, 3*68-372.

Abdulkadiroğlu, A., P. Pathak, A. E. Roth y T. Sönmez (2006): "Changing the Boston School Choice Mechanism", NBER Working Papers 11965.

Abdulkadiroğlu, A. y T. Sönmez (2003): "School Choice: A Mechanism Design Approach", *American Economic Review,* 93**,** 729-747.

Aldershof, B. y O. Carducci (1996): "Stable matchings with couples", *Discrete Applied Mathematics*, 68, 203-207

Alkan, A. (1988): "Non existence of stable threesome matchings", *Mathematical Social Sciences* 16, 207-209.

Cantala, D. (2004): "Matching Markets: the Particular Case of Couples", *Economics Bulletin* 3, 1-11.

Danilov, V.I. (2003): "Existence of stable matchings in some three-sided systems", *Mathematical Social Sciences* **46**, 145-148.

Dubins, L. y D. Freedman (1981): "Machiavelli and the Gale-Shapley Algorithm", *American Mathematical Monthly*, 88, 485-494.

Dutta, B. y J. Massó (1997): "Stability of Matchings When Individuals Have Preferences over Colleagues", *Journal of Economic Theory*, 75, 464-475.

Echenique, F. y J. Oviedo (2006): "A Theory of Stability in Many-to-Many Matching Markets", *Theoretical Economics*, 1, 233-273.

Echenique, F. y M. B. Yenmez (2007): "A Solution to Matching with Preferences over Colleagues", *Games and Economic Behavior*, 59, 46–71.

Gale, D. y L. Shapley (1962): "College Admissions and Stability of Marriage", *American Mathematical Monthly*, 69, 9-15.

Gusfield, D. (1988): "The structure of the stable roommate problem: Efficient representation and enumeration of all stable assignments", *SIAM Journal on Computing*, 17, 742-769

Gusfield, D. y R. W. Irving (1989): "The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms", MIT Press, Cambridge, MA,.

Hatfield, J. y P. Milgron (2005). "Matching with Contracts", *American Economic Review*, 95, 913-935.

Irving, R. W. (1985): "An efficient algorithm for the stable roommates problem", *Journal of Algorithms*, 6, 577-595.

Irving, R. W. y P. Leather (1986): "The Complexity of Counting Stable Marriages", *SIAM Journal of Computing*, 15, 655-667.

Kelso, A. y V. Crawford (1982): "Job Matching, Coalition Formation, and Gross Substitutes", *Econometrica*, 50, 1483-1504.

Klaus, B. y F. Klijn (2005): "Stable Matchings and Preferences of Couples", *Journal of Economic Theory*, 121, 75-106.

Martínez, R., J. Massó, A. Neme y J. Oviedo (2000): "Single Agents and the Set of Many-to-one Stable Matchings", *Journal of Economic Theory*, 91, 91-105.

Martínez, R., J. Massó, A. Neme y J. Oviedo (2001): "On the lattice structure of the set of stable matchings", *Optimization*, 50, 439-457.

Martínez, R., J. Massó, A. Neme y J. Oviedo (2004a): "An algorithm to compute the set of many-to-many stable matchings", *Mathematical Social Science*, 47, 187-210.

Martínez, R., J. Massó, A. Neme y J. Oviedo (2004b): "On Group Strategy-proof Mechanisms for a Many-to-one Matching Model", *International Journal of Game Theory* **33**, 115-128.

McVitie, D. y L. Wilson (1970): "Stable Marriage Assignments for unequal sets", *BIT* **10**, 295-309.

McVitie, D. y L. Wilson (1971): "The Stable Marriage Problem", *Communications of the ACM*, 14, 486-493.

Mullin, F. J. y J. M. Stalnaker (1952): "The matching plan for internship placement: a report of the first year's experience", *Journal of Medical Education*, **27,** 193-200.

Roth, A. E. (1982): "The Economics of Matching: Stability and Incentives", *Mathematics of Operations Research*, **7**, 617-628.

Roth, A. E. (1984): "Stability and Polarization of Interests in Job Matching", *Econometrica***, 52**, 47-57.

Roth, A. E. (1985a): "Conflict and Coincidence of Interest in Job Matching: Some New Results and Open Questions", *Mathematics of Operations Research*, 10, 379-389.

Roth, A. E. (1985b): "The College Admissions Problem Is Not Equivalent to the Marriage Problem", *Journal of Economic Theory*, 36, 277-288.

Roth, A. E. (1986): "On the Allocation of Residents to Rural Hospitals: A General Property of Two-Sided Matching Markets", *Econometrica*, **54**, 425-427.

Roth, A. E. (2008): "Deferred acceptance algorithms: history, theory, practice, and open questions", *International Journal of Game Theory*, 36, 537-569.

Roth, A. E. y E. Peranson (1999): "The Redesign of the Matching Market for American Physicians: Some Engineering Aspects of Economic Design", *American Economic Review*, 89, 748-780.

Roth, A. E. y M. Sotomayor (1990): *Two-sided Matching: A study in Game-theoretic Modelling and Analysis*, Econometric Society Monographs, Cambridge University Press.

Roth, A. E. y J. H. Vande Vate (1990): "Random paths to stability in two-sided matching", *Econometrica*, 58: 1475-1480

Sotomayor, M. (1999): "Three Remarks on the Many-to-Many Stable Matching Problem", *Mathematical Social Sciences*, 38, 55-70.

Tan, J. J. M. (1991): "A necessary and sufficient condition for the existence of a complete stable matching", *Journal of Algorithms*, 12, 154-178.

CONSIDERACIONES EPISTÉMICAS EN JUEGOS: NOCIONES DE SOLUCIÓN Y CONOCIMIENTO

Fernando Tohmé
IIESS (UNS-CONICET) – Departamento de Economía,
Universidad Nacional del Sur

1. Introducción

La Teoría de Juegos, desde su inicio, incorporó en el análisis de los resultados el papel crucial del conocimiento y las creencias de los agentes. De hecho, este tema fue central en las discusiones iniciales entre John von Neumann y Oskar Morgenstern. Este último, en su análisis de los ciclos económicos de 1928, usó la lucha de ingenios entre Sherlock Holmes y el Profesor Moriarty como metáfora de la forma en que las creencias dan lugar a resultados económicos. En la historia "La muerte de Holmes", Conan Doyle relataba cómo, en su carrera hacia el final de ambos en las cataratas de Reichenbach, Holmes y Moriarty iban elaborando conjeturas sobre conjeturas acerca del comportamiento del otro y, fundamentalmente, acerca de lo que el otro podía pensar acerca de lo que él pensaba.

Lamentablemente, y aunque von Neumann reconocía la importancia de este análisis, el énfasis en juegos de suma cero los llevó a reducir la determinación de la solución de juegos a una simple computación. La introducción, en 1950, de la noción de equilibrio de Nash abrió la puerta para consideraciones acerca de lo que los jugadores pueden pensar a la hora de tomar una decisión. Sin embargo esto en general quedó sólo como una componente de la interpretación de los equilibrios, es decir de la historia que se elaboraba para justificarlos, y no de la noción misma de equilibrio.

Robert Aumann fue fundamental para la incorporación del conocimiento de los agentes como componente del resultado. En su trabajo de 1976 proveyó un modelo de *conocimiento común* de naturaleza semántica, que permitió caracterizar la forma en que se puede llegar a acuerdos entre las partes aun cuando existen desacuerdos en cuanto a cómo ven la situación. Esto fue aplicado a la interpretación de qué condiciones llevan a transacciones (*trade*) en mercados especulativos

(Milgrom-Stokey 1982). Pero la consecuencia tal vez más importante del trabajo de Aumann fue proveer un esquema lógico en el que las consideraciones epistémicas se pueden incorporar a las soluciones de juegos.

Mertens y Zamir (1985) formalizaron el argumento que Harsanyi (1967) planteó para reducir información incompleta a imperfecta. La noción de tipo, básica en el razonamiento bayesiano en juegos, se identificó con una estructura jerárquica de creencias. Esta idea, desarrollada posteriormente por Brandenburger y Dekel (1993) entre otros, condujo a la forma canónica de caracterización epistémica de juegos.

Es imposible en este breve espacio hacer un recuento exhaustivo de la literatura que se generó a partir de estos últimos desarrollos. Vamos a restringirnos a presentar el análisis para juegos bipersonales en forma estratégica y fundamentalmente concentrado en describir las condiciones epistémicas para distintas nociones de solución. Veremos cómo la teoría epistémica de juegos puede, en determinadas circunstancias, dar cuenta de resultados experimentales que para algunos autores invalidan la relevancia de la teoría de juegos.

En la sección 2 haremos un rápido repaso de las nociones tradicionales de solución en juegos en forma estratégica de dos personas. En la sección 3 introduciremos algunos conceptos que permiten describir la situación de conocimiento y las creencias de los jugadores. En la sección 4 veremos las condiciones sobre el conocimiento y las creencias de los agentes que sustentan las soluciones tradicionales. En la sección 5 extendemos esto a una nueva noción de solución, $(m+1)$ – **IA**. Finalmente, en la última sección discutimos brevemente tópicos que quedaron fuera del artículo.

2. Conceptos de solución tradicionales

Consideremos un juego estratégico simple como la Batalla de los Sexos. En él, dos jugadores E^o y E^a (“esposo” y “esposa”) eligen por separado un espectáculo para asistir juntos, Box o Ballet, sin una negociación previa. Si E^o elige filas y E^a columnas, la diagonal principal de la siguiente matriz representa la elección del mismo espectáculo, mientras que la diagonal menor la no coordinación en las decisiones:

E^o / E^a	*Box*	*Ballet*
Box	2,1	0
Ballet	0	1,2

Dado cualquiera de los dos jugadores, i su *mejor respuesta* viene dada por un operador $\mathcal{BR}_i$ que dada una acción del otro, $-i$, arroja la mejor decisión para i. En este caso:

$\mathcal{BR}_i(Box) = Box$
$\mathcal{BR}_i(Ballet) = Ballet$

para $i = E^o, E^a$

Un par de acciones $\langle s_i, s_{-i}\rangle$ para i y $-i$ es un equilibrio de Nash si $s_{-i} \in \mathcal{BR}_{-i}(s_i)$ y $s_i \in \mathcal{BR}_i(s_{-i})$. En el caso de la Batalla de los Sexos, hay dos equilibrios de Nash, $\langle Box, Box\rangle$ y $\langle Ballet, Ballet\rangle$.

En vez de considerar acciones tales como ir al Box o a Ballet, pueden contemplarse distribuciones de probabilidad sobre las mismas. Estas *estrategias mixtas* se convierten en objetos de elección en sí mismos. Si S_i es el conjunto de acciones del jugador i, ΔS_i es el espacio de distribuciones de probabilidad sobre las mismas. Los agentes racionales eligen distribuciones que maximicen sus pagos esperados. Esto permite extender trivialmente la noción de operador de mejor respuesta de $\mathcal{BR}_i : S_{-i} \to S_i$ a $\mathcal{BR}_i : \Delta S_{-i} \to \Delta S_i$.

Un equilibrio de Nash en estrategias mixtas es entonces un par de estrategias mixtas $\langle \sigma_i, \sigma_{-i}\rangle$ tal que $\sigma_{-i} \in \mathcal{BR}_{-i}(\sigma_i)$ y $\sigma_i \in \mathcal{BR}_i(\sigma_{-i})$. En el caso de la Batalla de los Sexos, hay tres equilibrios de Nash en estrategias mixtas: $\langle 1,1\rangle$, $\langle 0,0\rangle$ y $\langle (2/3),(1/3)\rangle$ donde $\langle p, 1-p\rangle$ denota la distribución que da a Box y Ballet probabilidades p y $1\text{-}p$, respectivamente. Notemos que los dos primeros equilibrios son equivalentes a $\langle Box, Box\rangle$ y $\langle Ballet, Ballet\rangle$, los equilibrios de Nash en estrategias puras.

Una estrategia s_i se dice **racionalizable** si existen subconjuntos de acciones $Z_i \subseteq S_i$ y $Z_{-i} \subseteq S_{-i}$ tales que (Osborne y Rubinstein, 1994):

- $s_i \in Z_i$,
- para $k = i,-i$, cada $s_k \in Z_k$ es tal que $s_k \in \mathcal{BR}_k(\mu_{-k})$ donde μ_{-k} es una distribución de probabilidad con soporte Z_{-k}.

Para entender el alcance del concepto de racionalizabilidad conviene introducir la noción de estrategia *estrictamente dominada*. Una acción $s_i \in S_i$ está estrictamente dominada si existe una estrategia mixta τ_i tal que el pago esperado para i de $\langle \tau_i, s_{-i}\rangle$ es estrictamente mayor que el pago de $\langle s_i, s_{-i}\rangle$ cualquiera sea $s_{-i} \in S_{-i}$.

Un procedimiento iterativo permite a los agentes ir descartando estrategias estrictamente dominadas. Así, el jugador i comienza eliminando de consideración sus estrategias estrictamente dominadas. $-i$, *tomando en cuenta las estrategias eliminadas por* i, elimina las estrategias que ahora son estrictamente dominadas para él. Después i hace lo propio tomando en cuenta las eliminaciones de la etapa anterior, seguido por $-i$, etc. Cuando el proceso finaliza, las estrategias que sobreviven (al menos una para cada jugador) constituyen los conjuntos $\mathbf{IU}_i$ y $\mathbf{IU}_{-i}$.

Un resultado fácil de ver es que $Z_k = \mathbf{IU}_k$ para $k = i, -i$.[1] En la Batalla de los Sexos esto significa que **todas** las acciones son racionalizables, dado que no hay estrategias estrictamente dominadas.

3. El modelo epistémico de un juego

Para cada noción de solución que vimos (equilibrio de Nash en estrategias puras, equilibrio de Nash en estrategias mixtas y racionalizabilidad), su "predicción" debería estar justificada por el conocimiento y las creencias de los agentes. Para analizar esto formalmente debemos considerar los modelos epistémicos de los juegos analizados.

Consideremos la siguiente variante simple de juego de coordinación (Brandenburger, 2007):

½	*I*	*D*
A	2,2	0
B	0	1,1

Las acciones del jugador 1 (que elige filas) forman el conjunto $S_1 = \{A, B\}$, mientras que las de 2 son $S_2 = \{I, D\}$. Para analizar el juego, ampliamos su descripción mediante:

- un conjunto de tipos T_i para cada i,
- una función μ_i, que a cada tipo de i, t_i, le asigna una distribución de probabilidades sobre $S_{-i} \times T_{-i}$ denotada $\mu_i(t_i)$.

Notemos que para cada i, μ_i en conjunción con μ_{-i} indica que el tipo t_i se identifica con una probabilidad sobre $S_{-i} \times T_{-i}$, lo que arroja probabilidades sobre $S_{-i} \times (S_i \times T_i)$, lo que a su vez da probabilidades sobre $S_{-i} \times (S_i \times (S_{-i} \times T_{-i}))$, etc.

[1] Esto es cierto para la extensión a n jugadores, si no exigimos que, para cada jugador k, las elecciones de los otros jugadores no sean independientes entre sí. Es decir, permitiendo que los jugadores $-k$ se correlacionen.

Un *estado del juego* es $(s_i, t_i; s_{-i}, t_{-i})$, donde t_i y t_{-i} son los tipos de ambos jugadores mientras que s_i y s_{-i} son las acciones elegidas por ellos.

Supongamos que los posibles tipos de 1 y 2 son $T_1 = \{t^a, u^a\}$ y $T_2 = \{t^b, u^b\}$ mientras que μ_1 y μ_2 vienen dados por:

μ_1 (t^a):

T_2 / S_2	I	D
u^b	0	½
t^b	0	½

μ_1 (u^a):

T_2 / S_2	I	D
u^b	½	0
t^b	0	½

μ_2 (t^b):

T_1 / S_1	A	B
u^a	0	½
t^a	0	½

μ_2 (u^b):

T_1 / S_1	A	B
u^a	½	0
t^a	0	½

Veamos qué ocurre en el estado $(B, t^a ; D, t^b)$:

- La respuesta de 1 es "correcta", dado que asigna a D una probabilidad ½ + ½. Es decir, dado que 1 cree que 2 va a elegir D con certeza, lo mejor que puede hacer es elegir B.
- La respuesta de 2 también es correcta, dado que asigna a B probabilidad 1 y por lo tanto su mejor respuesta es D.

Sin embargo notemos que:

- 1 piensa que es posible que 2 esté equivocado acerca de lo que él va a decidir: 1 asigna al tipo u^b una probabilidad ½ y u^b asigna una probabilidad ½ a que 1 juegue A en vez de B.
- 2 piensa que 1 puede estar equivocado acerca de su elección. Asigna una probabilidad ½ al tipo u^a, que a su vez asigna una probabilidad ½ a que 1 juegue I en vez de D.

En conclusión: 1 y 2 son *racionales*, dado que maximizan sus pagos dadas sus creencias. Pero por otro lado 1 piensa que es posible que 2 sea irracional dado que asigna una probabilidad ½ a (D, u^b), mientras que si fuera realmente de tipo u^b, 2 obtendría mayor pago con I que con D. Del mismo modo, 2 piensa que es posible que 1 sea irracional dado que asigna una probabilidad ½ a (B, u^a), siendo que si fuese de tipo u^a, 1 obtendría mayor pago con A que con B.

Este ejemplo muestra que el modelo epistémico del juego permite hablar de lo que los agentes *saben* y de lo que *creen* en cualquier estado. Más precisamente, consideremos un estado ω, perteneciente a un conjunto de estados Ω, donde $\omega = (s_i,t_i;s_{-i},t_{-i})$.

Sea el conjunto de los estados que i concibe como posibles cuando está en el estado ω. Suponemos que esta relación de indistinguibilidad entre estados es una equivalencia. Por lo tanto P_i determina una partición de Ω.

La acción elegida por i en el estado ω se denota $s_i(\omega)$ mientras que $\tau_i(\omega)$ es la distribución de probabilidades ("creencia") de i acerca de las posibles acciones de $-i$.

Entonces decimos que:

- Un evento $E \subseteq \Omega$ es **conocimiento mutuo** en el estado ω si $P_i(\omega) \subseteq E$, para $i = 1,2$.
- Un evento $F \subseteq \Omega$ es **auto-evidente** si para todo $\omega \in F$, $P_i(\omega) \subseteq F$ para $i = 1,2$.
- Un evento $E \subseteq \Omega$ es **conocimiento común** en el estado ω si hay un evento auto-evidente $F \subseteq \Omega$ tal que $\omega \in F \subseteq E$ para $i = 1,2$.

En base a estos conceptos podemos ahora hablar de las condiciones suficientes para las distintas nociones de solución presentadas antes y de paso discutir algunas nuevas.

4. Conocimiento y soluciones

Consideremos un par de acciones $\langle s_1(\omega), s_2(\omega)\rangle$ en un estado ω. Constituyen un equilibrio de Nash si cada *i* es tal que (Aumann y Brandenburger, 1995):

- conoce las estrategias elegidas por el otro: $P_i(\omega) \subseteq \{\omega' \in \Omega : s_{-i}(\omega') = s_{-i}(\omega)\}$,
- su creencia es consistente con su conocimiento: el soporte $\tau_i\,(\omega)$ está incluido en $\{s_{-i}(\omega') : \omega' \in P_i(\omega)\}$,
- es racional: $s_i(\omega) \in \mathcal{BR}_i(\tau_i(\omega))$.

En palabras, los estados que *i* no puede distinguir cuando el estado es ω deben ser tales que en todos ellos la acción elegida por *–i* es la misma. Por otro lado, las creencias de *i* deben dar probabilidad positiva únicamente a las acciones de *–i* que constituyen los estados indistinguibles de ω. Finalmente, *i* tiene que elegir su mejor acción dada su creencia. Si todas estas condiciones se cumplen, entonces las acciones elegidas constituyen un equilibrio de Nash. Desde luego, estas condiciones son suficientes, pero no necesarias. Equilibrios de Nash pueden obtenerse sin que se den estas condiciones.

Del mismo modo, el par de distribuciones de probabilidades $\langle \tau_1(\omega), \tau_2(\omega)\rangle$ constituye un equilibrio de Nash en estrategias mixtas en un estado ω si:

- cada *i* conoce las creencias del otro: $P_i(\omega) \subseteq \{\omega' \in \Omega : \tau_{-i}(\omega') = \tau_{-i}(\omega)\}$,
- la creencia de cada *i* es consistente con su conocimiento: el soporte de $\tau_i\,(\omega)$ está incluido en $\{s_{-i}(\omega') : \omega' \in P_i(\omega)\}$,
- cada *i* sabe que –i es racional: para cualquier $\omega' \in P_i(\omega)$, $s_{-i}(\omega') \in \mathcal{BR}_{-i}(\tau_{-i}(\omega'))$.

Aquí el punto fundamental es el conocimiento de las creencias del otro jugador porque esas creencias son las que constituyen la estrategia mixta a ser jugada. Esto provee una interpretación de las estrategias mixtas en equilibrio, distinta a la más directa basada en la aleatorización de acciones.[2]

---

[2] Este resultado no se extiende a más de dos jugadores. Las condiciones epistémicas para un equilibrio de Nash en estrategias mixtas cuando $n > 2$, incluyen que los jugadores empiecen con un mismo *prior* (de modo que puedan concluir ambos en que es posible que estén en ω), que en ω la racionalidad de ambos sea conocimiento mutuo y, más restrictivo aún, que $\tau_i\,(\omega)$ y $\tau_{-i}\,(\omega)$ sean conocimiento común.

Finalmente, para que un par de acciones $\langle s_1(\omega), s_2(\omega)\rangle$ en un estado ω constituya un equilibrio en estrategias racionalizables es suficiente que exista un evento auto-evidente F, tal que $\omega \in F$ y para todo ω' en F y cada i:

- el soporte de $\tau_i(\omega')$ sea un subconjunto de $\{s_{-i}(\omega''):\omega'' \in P_i(\omega')\}$,
- $s_i(\omega') \in \mathcal{BR}_i(\tau_i(\omega'))$.

En palabras: debe ser conocimiento común entre los agentes que las acciones elegidas serán mejores respuestas a las creencias acerca de las acciones concebibles de los otros agentes.

En este último caso, el de la racionalizabilidad, es más evidente que las condiciones epistémicas son una reescritura de la definición de la noción de solución. Para los equilibrios de Nash esto resulta algo más difícil de ver, sin embargo ese es también el caso. Tanto es así que el propio Aumann reconoce que durante años (y esto se refleja en su entrada sobre Teoría de Juegos en el *New Palgrave Dictionary of Economics*) concibió a las condiciones epistémicas como externas a las soluciones de juego. Es un desarrollo reciente que se las vea como parte inherente de las mismas.

5. Nuevas soluciones

Dado que el componente epistémico es inherente a las nociones de solución tradicionales, cabe preguntarse si se pueden concebir soluciones a partir de consideraciones acerca de lo que conocen los agentes en un juego. Esto se vuelve particularmente interesante a la luz de la evidencia arrojada por el estudio del Dilema del Viajero (*Traveler's Dilemma*) (Basu, 1994). Este problema, puesto en términos simples, involucra a dos agentes que en forma independiente tienen que declarar un número entre $p > 0$ y $N > p$. El pago de cada agente $i = 1,2$ cuando declara n_i es:

- n_i, si la declaración de $-i$ es $n_{-i} = n_i$
- $n_{-i} - p$, si $n_i > n_{-i}$
- $n_i - p$, si $n_i < n_{-i}$

La presencia del premio p para el que declara la cifra menor (y castigo para el que declara el mayor valor) lleva a que el único equilibrio de Nash sea $\langle p, p\rangle$. Más aún, la única solución racionalizable es también $\langle p, p\rangle$. Esto va contra la experiencia que indica que en experimentos, los individuos tienden en su gran mayoría a elegir la opción N cuando p es relativamente pequeño.

Una alternativa es definir una noción de solución que admita comportamientos no racionalizables. Un primer paso consiste en considerar estrategias débilmente dominadas. Esto es, $s_i \in S_i$ está *débilmente dominada* si existe una estrategia mixta σ_i definida sobre S_i tal que el pago esperado de la combinación $\langle \sigma_i, s_{-i} \rangle$ es mayor o igual que el pago de $\langle s_i, s_{-i} \rangle$ cualquiera sea $s_{-i} \in S_{-i}$, y existe algún s'_{-i} tal que el pago esperado de $\langle \sigma_i, s'_{-i} \rangle$ es estrictamente mayor que el pago de $\langle s_i, s'_{-i} \rangle$.

Decimos que una estrategia débilmente dominada es inadmisible. Las estrategias que sobreviven la eliminación iterada de estrategias inadmisibles se denominan *admisibles iteradas* (**IA**). En el caso del Dilema del Viajero, el conjunto de estrategias racionalizables y el de aquellas que son admisibles iteradas coinciden, dando por solución **IA** al juego otra vez a $\langle p, p \rangle$.

Por lo tanto, para poder capturar otros resultados en el Dilema del Viajero hacen falta otras nociones de solución. Una alternativa consiste en recortar las posibilidades de iteración en la eliminación de estrategias inadmisibles. Esto nos lleva a la noción **m – IA**, el conjunto de estrategias que permanece después de m rondas de admisibilidad iterada. La noción **m – IA** puede arrojar, en principio, combinaciones de acciones que no sean racionalizables.

En el Dilema del Viajero, cuando los pagos están entre p y N los conjuntos de declaraciones que son soluciones para distintos valores de m son:

- $\mathbf{0-IA}:\{p,\ldots,N\}$
- $\mathbf{1-IA}:\{p,\ldots,N-1\}$

  $\vdots$
- $(\mathbf{N-p})-\mathbf{IA}:\{p\}$

Veamos unas definiciones previas a presentar las condiciones epistémicas para **m – IA** (Brandenburger, 2007):

- *Racionalidad*: en el modelo epistémico de un juego, s_i y t_i son racionales si s_i arroja el máximo pago esperado con respecto a la distribución de probabilidades correspondiente a t_i.

- *Suposición* ("Assumption"): un evento E es una suposición si para cualquier par de estados $\omega^1 \in E$ y $\omega^2 \notin E$, ω^1 es infinitamente más probable que ω^2.[3]

Entonces, para un tipo t_i del jugador i, el evento "$-i$ es racional", que constituye un subconjunto de $S_{-i} \times T_{-i}$, es una suposición si tiene probabilidad

$$\mu_i(t_i)\left[-i \text{ es racional}\right]=1.$$

Denotamos con Sup_i $[E]$ al conjunto de tipos para los que E es supuesto. La suposición de racionalidad de $-i$ es:

$$Sup_i\left[-i \text{ es racional}\right]=\left\{t_i \in T_i : \mu_i(t_i)\left[-i \text{ es racional}\right]=1\right\}.$$

Esto permite definir la m-suposición de racionalidad inductivamente:

- $R_i^0\left[-i \text{ es racional}\right]=S_i \times Sup_i\left[-i \text{ es racional}\right]$,

$\vdots$

- $R_i^m\left[-i \text{ es racional}\right]=R_i^{m-1} \cup \left[S_i \times Sup_i\left[R_{-i}^{m-1}\right]\right]$.

Podemos proponer una condición de racionalidad y m-suposición de racionalidad, **RmAR** (*Rationality and m-th order Assumption of Rationality*). Esto es, se consideran sólo los estados $(s_i,t_i;s_{-i},t_{-i})$ en que valga que el tipo t_j arroja que la acción s_j maximiza el pago esperado de t_j, para $j = i, -i$ y valga que $(s_i,t_i;s_{-i},t_{-i}) \in R_i^m \times R_{-i}^m$.

Finalmente, la condición de **completitud** indica que cada espacio de tipos T_j, $j = i, -i$, contiene todos los tipos posibles. Esto es, no puede haber ninguna posible creencia acerca del juego que no esté resumida en un t_j.

Se prueba que **RmAR** junto con completitud implican que la solución del juego va a ser $(m + 1)$ – **IA**. Esto es, el resultado de m rondas de eliminación de estrategias inadmisibles. Obviamente esta solución se diferencia de **IA** sólo si m es menor que el número de acciones disponibles para cualquiera de los jugadores.

---

[3] Esto se define formalmente en un sistema en el que las probabilidades se asignan "lexicográficamente". Esto es, la probabilidad es muy alta para una opción e infinitesimalmente pequeña para la que le sigue en plausibilidad.

En el caso del Dilema del Viajero, un m pequeño indicaría que los jugadores, en la solución declararían un valor cercano a N, en forma consistente con la evidencia de los experimentos.

6. OTROS PROBLEMAS

Un tópico importante y que no hemos mencionado hasta aquí es la distinción entre *información* y *conocimiento*. Si bien en el discurso informal muchas veces son utilizados en forma indistinta, son diferentes en varios sentidos. El más importante, tal vez, es que un agente con conocimiento es conciente (*aware*) de las posibilidades que enfrenta y por lo tanto puede razonar acerca de las mismas. Las conclusiones que obtiene forman parte de su cuerpo de conocimiento. Por lo tanto, el conocimiento es autorreferente, lo que permite iterarlo.

El *awareness* del conocimiento es una condición que hasta cierto punto puede relajarse. Por ejemplo, no es necesario que un agente sepa lo que desconoce. Todos los modelos epistémicos discutidos hasta ese punto suponen que un agente conoce lo que no conoce. Una literatura muy importante y ligada con la de racionalidad acotada deja de lado este supuesto (Modica y Rustichini 1999).

Otro problema para los modelos epistémicos se ve claramente en la caracterización de la solución $(m + 1) - \mathbf{IA}$. Aun siendo la más laxa de todas las que hemos visto, requiere la completitud de los espacios de tipos. Es decir, exige que todos los sistemas de creencias sean posibles. Sin embargo es fácil pensar creencias que no son posibles de codificar de modo consistente en forma de tipo (y por lo tanto determinar una distribución de probabilidades). Por ejemplo: "*A cree que B cree que A cree que B está equivocado acerca de lo que A cree*".

Hay varias formas de escapar a este problema. Una es suponer que las creencias sólo pueden estar representadas como probabilidades, lo que impediría una creencia como la antedicha. Esta es la versión clásica, que permitió convertir a los juegos con información incompleta en juegos bayesianos con información imperfecta (Böge y Eisele, 1979, Mertens y Zamir, 1985). Se ha mostrado que utilizar otras representaciones (lenguaje lógico de primer orden) puede dar lugar a regresiones infinitas sin punto límite. Esto se resuelve apelando a una teoría de conjuntos alternativa en lo que toda una estructura de creencias acerca de creencias se convierte en una creencia en sí. Pero para evitar enunciados autocontradictorios sigue siendo necesario restringir el tipo de creencias, por ejemplo impidiendo creencias negativas (Tohmé, 2005).

Un resultado de inconsistencia se obtiene también cuando se intenta extender la condición **RmAR** para tratar de proveer una fundamentación epistémica de ***IA***.

Sorprendentemente, la versión de **RmAR** para *m* infinito, **RCAR,** es inconsistente con *completitud* de tipos. Esto es, la racionalidad y la suposición de racionalidad de orden infinito puede llevar a un conjunto vacío de estados (Brandenburger et al., 2008).

Finalmente, cabe preguntarse cómo extender el análisis epistémico a juegos en forma extensiva. Si nos restringimos a juegos con información perfecta, la discusión se centra en el status epistémico de la solución de *backward induction* (Battigalli y Siniscalchi, 1999). Para evitar las inconsistencias en el análisis, las conclusiones acerca del conocimiento de los agentes en la versión extendida deberían mantenerse en su forma reducida estratégica (Kohlberg-Mertens 1986). Esta condición de *invariancia* permite concluír que *backward induction* arroja el mismo resultado que $(m+1)-\mathbf{IA}$, para *m* suficientemente grande (Marx y Swinkels, 1997).

Obviamente hay otros tópicos que ni siquiera podemos comenzar a mencionar, pero el área de teoría de juegos epistémica ha adquirido una gran vitalidad en las últimas décadas y promete convertirse en una fundamentación de juegos de importancia comparable a la evolutiva. Creemos además que, excepto para economías grandes, es más relevante para el análisis del comportamiento económico.

Referencias

Aumann, R. (1976): "Agreeing to Disagree", *Annals of Statistics,* 4, 1236-1239.

Aumann, R. (1987): "Game Theory" en *New Palgrave Dictionary of Economics*, Vol. 2: 473, Macmillan NY.

Aumann, R. y A. Brandenburger (1995): "Epistemic Conditions for Nash Equilibrium", *Econometrica,* 63, 1161-1180.

Battigalli, P. y M. Siniscalchi (1999): "Hierarchies of Conditional Beliefs and Interactive Epistemology in Dynamic Games", *Journal of Economic Theory*, 88, 188-230.

Basu, K. (1994): "The Traveler's Dilemma: Paradoxes of Rationality in Game Theory", *American Economic Review*, 84, 391-395.

Böge, W. y T.H. Eisele (1979): "On the Solutions of Bayesian Games", *International Journal of Game Theory*, 8, 193-215.

Brandenburger, A. (2007): "The Power of Paradox: Some Recent Developments in Interactive Epistemology", *International Journal of Game* Theory, 35, 465-492.

Brandenburger, A. y E. Dekel (1993): "Hierarchies of Beliefs and Common Knowledge", *Journal of Economic Theory*, 59, 189-198.

Brandenburger, A., A. Friedenberg y J. Keisler (2008): "Admissibility in Games", *Econometrica*, 76, 307-352.

Harsanyi, J., (1967): "Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players, Part I. The Basic Model", *Management Science,* 14, 159-182.

Kohlberg, E. y J.-F. Mertens (1986) : "On the Strategic Stability of Equilibria", *Econometrica*, 54, 1003-1037.

Marx, L. y J. Swinkels (1997): “Order Independence for Iterated Weak Dominance”, *Games and Economic Behavior,* 18, 219-245.

Mertens, J.-F. y S. Zamir (1985): “Formulation of Bayesian Analysis for Games with Incomplete Information”, *International Journal of Game Theory*, 14, 1-29.

Milgrom, P. y N. Stokey (1982): “Information, Trade and Common Knowledge”, *Journal of Economic Theory*, 26, 17-27.

Modica, S. y A. Rustichini (1999): “Unawareness and Partitional Information Structures”, *Games and Economic Behavior*, 27, 265-298.

Morgenstern, O. (1928): *Wirtschaftsprognose: Eine Untersuchung ihrer Voraussetzungen und Möglichkeiten*.

Osborne, M. y A. Rubinstein (1994): *A Course in Game Theory*, MIT Press, Cambridge MA.

Tohmé, F. (2005): “Existence and Definability of States of the World”, *Mathematical Social Science*, 49, 81-100.