REVISIÓN DE LOS MODELOS DE VALORACIÓN DE OPCIONES FINANCIERAS

Fabio Rotstein
Gastón S. Milanesi
Juan I. Esandi
René D. Perotti
Anahí Briozzo

Universidad Nacional del Sur

SUMARIO: 1. Fundamentos de la valuación de opciones: réplica del derivado mediante el uso de instrumentos sintético; 2. Principios generales contenidos en la valoración de las opciones financieras; 3. Principios específicos en la valoración de las opciones financieras. Límites máximos y mínimos al valor de una opción; 4. Fundamentos en los procesos de valuación de flujos inciertos: los procesos estocásticos; 5. El modelo binomial. 6- El modelo de valuación de Black & Scholes; 7. Opciones Americanas: Valoración de opciones de compra y de venta; 8. Opciones y Dividendos; 9. Opciones Exóticas; 10. Extensiones y derivaciones en los modelos de valoración; 11. Conclusión.

Para comentarios: frotstein@uns.edu.ar
milanesi@uns.edu.ar
jesandi@uns.edu.ar
rperotti@uns.edu.ar
abriozzo@uns.edu.ar

Este trabajo forma parte del Proyecto de Investigación con acreditación externa: "*Concebir y desarrollar un manual integral de evaluación económico-financiera de proyectos de inversión en activos reales, desde la óptica de inversores privados, que responda a enfoques modernos, informatizados y de especial aplicación a pequeñas y medianas empresas de Argentina*". El Grupo de Investigación está integrado por: Fabio Rotstein (director), Juan I. Esandi, Gastón S. Milanesi y René D. Perotti. El presente trabajo fue totalmente financiado por la Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina. Queremos destacar la participación especial de la Lic. Anahí E. Briozzo.

Resumen. El presente trabajo revisa los principales conceptos, modelos y herramientas vinculados a la valoración[1] de opciones financieras. Partiendo de las nociones básicas en materia de valuación de opciones mediante la construcción de carteras réplicas, se exponen las bases generales y específicas en las cuales se cimientan los clásicos modelos de valoración. A continuación se presentan los fundamentos de los distintos procesos estocásticos empleados, en términos generales para la valuación de flujos inciertos y en lo particular utilizados por la por la teoría de las opciones. El fin es poner luz al comportamiento supuesto por los modelos de valoración de opciones en relación al activo subyacente.

Siguiendo la clasificación presentada de los procesos estocásticos en función al comportamiento de la variable aleatoria, se desarrollan los clásicos modelos: El modelo multiplicativo binomial y el modelo de Black-Scholes-Merton. De estos se exponen los puntos débiles como: el comportamiento de la varianza, dividendos continuos y discretos, y el dilema que presentan en materia de valuación las opciones americanas frente a su par europeo. Se explica brevemente las principales clases de opciones exóticas y los modelos matemáticos utilizados para su valuación. Finalmente se describen los nuevos modelos que incorporan modificaciones a los tradicionales, ya sea mediante la introducción de dos o más variables aleatorias o la suposición de que el activo subyacente sigue procesos estocásticos distintos a los utilizados por el modelo multiplicativo binomial y el modelo de Black-Scholes-Merton.

1. FUNDAMENTOS DE LA VALUACIÓN DE OPCIONES: RÉPLICA DEL DERIVADO MEDIANTE EL USO DE INSTRUMENTOS SINTÉTICOS

1.1 La naturaleza de las opciones

Se puede definir una opción como el derecho, asociado a una obligación simétrica, de comprar (opción de compra) o vender (opción de venta) un activo específico (subyacente) mediante el pago de un precio pactado (precio de ejercicio) en o antes de la fecha de vencimiento del instrumento (fecha de expiración). Si la opción puede ser ejercida con antelación a su vencimiento se la conoce como opción americana, si solamente puede ser ejercida al vencimiento se la conoce como opción europea.

La razón de ser del valor de una opción reside en el beneficio asimétrico a favor del tomador del instrumento de ejercer o no el derecho de comprar o vender derivado del instrumento. A su vez es una de las principales diferencias con los contratos de futuros los cuales obligan al tomador a comprar o vender el activo subyacente al vencimiento. Los flujos de fondos futuros derivados de un contrato de futuro son simétricos en relación con las variaciones del precio del título subyacente, a diferencia de la opción donde los flujos de fondos son asimétricos debido a la flexibilidad del instrumento.

El activo subyacente de una opción está compuesto por una amplia variedad de activos financieros y reales. Se pueden encontrar opciones sobre acciones, índices bursátiles, bonos públicos en relación a los tipos de interés, commodities, divisas, bonos privados. En el mercado de capitales argentino en función a las operaciones autorizadas en el reglamento del Mercado de Valores S.A se encuentran autorizados los contratos de opciones de compra y venta sobre acciones y títulos de renta fija autorizados por lista y sobre índice bursátil (Merval), divisa a futuro

[1] Las palabras ‘valoración’ y ‘valuación’ muchas veces son utilizadas como sinónimos con el fin de significar todo proceso de asignación de valor. En sentido estricto, se debe utilizar la palabra valoración para ‘explicar’ los factores de mercado que afectan el precio del activo bajo estudio, en el presente caso de la opción. No es equívoco pensar que las siglas OPM *(Option Pricing Model)* hace referencia a dichos procesos de valoración mediante el uso de la palabra *pricing*. No obstante es de uso habitual la expresión ‘modelo de valuación de opciones’, tal vez porque se utiliza un modelo de valoración, con sus condiciones referidas al mercado de títulos, para hacer el cálculo del precio que *debería tener* la opción , en definitiva el proceso de cálculo que es una valuación.

(Indol) y tasa de interés (Baibor)[2]. En relación a los activos reales (decisiones estratégicas de la firma vinculadas a proyectos de inversión nuevos y en marcha) y el enfoque de valuación a través del uso de opciones reales excede el objeto del presente trabajo el cual versa sobre la naturaleza de los modelos de valuación para opciones financieras[3].

Una de las características propias de las opciones es su relación positiva con la incertidumbre. Si el activo subyacente es muy volátil esto se refleja en un mayor precio de la opción debido a que existen posibilidades de beneficios futuros derivados del ejercicio del instrumento, por ejemplo supóngase una opción con precio de ejercicio X de $50. Supóngase que a ese momento el título subyacente tiene un valor S de $60, el valor de una opción de compra es igual a $C=S-X$, es decir $5. Si el activo adquiere mayor volatilidad, variando en forma positiva a $80 o en forma negativa a $40 la opción antes del vencimiento adquiere mayor valor. En el caso de un escenario negativo, que el valor del título sea inferior al precio de ejercicio, la pérdida se limita el precio pagado por el instrumento. Si el escenario es favorable al ejercicio, siguiendo el ejemplo, los beneficios se incrementan siendo en el ejemplo de $80 – $50 o $30. Al contrario de la creencia tradicional de que la incertidumbre tiene un impacto negativo, por las características del instrumento, en el caso de las opciones tiene un impacto positivo.

A diferencia de las opciones de compra las opciones de venta se benefician con los movimientos contrarios (son ejercidas en el supuesto que el precio del subyacente sea inferior al precio de ejercicio pactado). En el ejemplo anterior hubiese sido ejercida en el caso de que el precio del título fuese de $40, generando un beneficio de $50 – $40 o $5, caso contrario la pérdida sufrida es el precio pagado por el derivado. Las opciones de venta son utilizadas como un seguro contra la caída en el precio del activo subyacente.

Las opciones pueden concebirse con múltiples usos ya que utilizadas en descubierto (es decir sin tener la propiedad o posesión del subyacente) implican adoptar posiciones de un alto apalancamiento y riesgo típico de una posición especulativa. En el supuesto de operar cubierto pueden pensarse como una protección contra el riesgo de variación en el precio del subyacente, propio de una posición de cobertura.

1.2 Nociones básicas de valuación mediante réplica de la opción con una cartera sintética

Un instrumento financiero sintético es aquel que surge de la combinación de dos o más instrumentos, así el instrumento derivado pensado como instrumento sintético, a consecuencia de la aplicación de la ley del precio único debe generar el mismo rendimiento o flujo de fondos con similar riesgo que la cartera de títulos que le dio origen.

La teoría de opciones se basa en la idea de que el instrumento puede ser replicado mediante la combinación que surge de comprar N cantidad de acciones del activo subyacente y tomar prestado fondos contra el título a una cantidad equivalente a $$B$ al tipo sin riesgo. Esta posición de comprar N títulos financiada a $$B$ al tipo sin riesgo genera los mismo pagos y por ende el mismo rendimiento que adquirir una opción de compra sobre el mismo activo cualquiera sea el estado de la naturaleza que acontezca.

A raíz de la ley del precio único, si el mercado está en equilibrio y para evitar acciones de arbitraje de parte de los participantes, el precio de la posición apalancada resultante de la combinación compra de acciones y financiamiento al tipo libre de riesgo debe tener el mismo valor que la posición de comprar una opción de compra sobre el título en cuestión. De la equivalencia expuesta se concluye que se puede valuar una opción de compra a través de la determinación del costo del producto sintético o su cartera réplica.

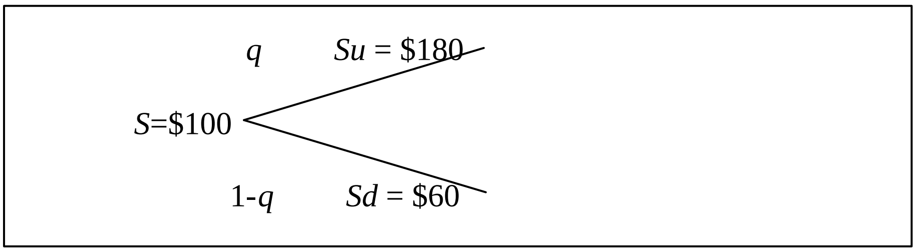
---

[2] Un mayor desarrollo vinculado a la parte instrumental de los diferentes contratos e instrumentos existentes en el mercado de capitales local se puede encontrar en, Verchik (1993) y Verchik (2000).

[3] Existe numerosa bibliografía en relación con este tema, entre otros se puede citar a Amram and Kulatilaka (1998); Brennan and Trigeorgis (2000); Copeland and Antikarov (2001); Trigeorgis (1997); Trigeorgis (1995).

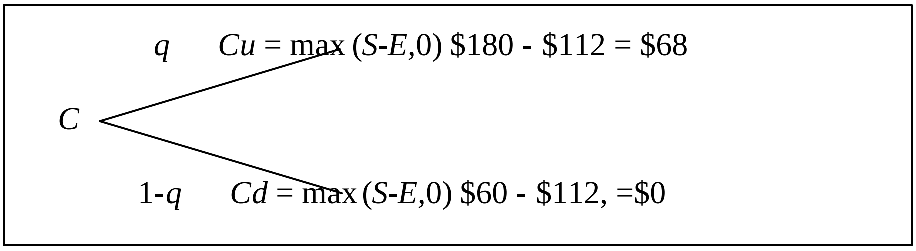
Si se considera una acción *S*, con precio de \$100, la cual en el próximo periodo puede ascender a \$180, dado un factor multiplicativo del precio *u* de 1,8, o descender a \$60 debido un factor multiplicativo *d* de 0,6, con probabilidad de ocurrencia de cada evento de *q* y *1-q* tendremos los distintos valores que puede adoptar el título según se expone en la ilustración 1:

Ilustración 1: Escenarios y valores posibles que puede tomar el título



El valor de la opción de compra en el próximo periodo es contingente dependiendo del precio que asuma el principal o sea el título subyacente que le da vida. Suponiendo un precio de ejercicio *E* de \$112 y un tipo sin riesgo *r* del 0.08 el valor de una opción de compra al final del periodo será de \$68 o nulo dependiendo del comportamiento de la acción conforme se expone en la ilustración 2

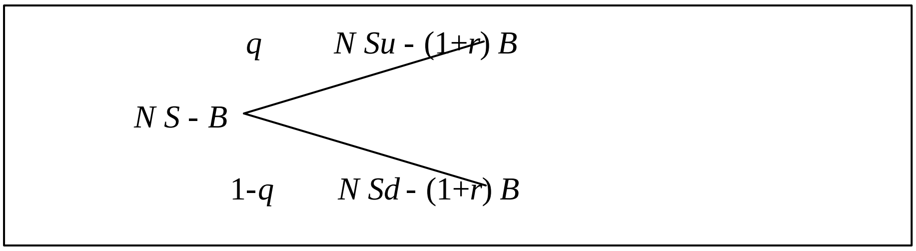
Ilustración 2: Escenarios y valores posibles que puede tomar la opción de compra



Ahora bien, para demostrar la simetría entre el valor de la opción y su cartera réplica supóngase que se construye la primera a partir de la compra de *N* (cantidad) títulos *S*, financiada la adquisición en un monto igual a \$*B* al tipo libre de riesgo pagadero en *t*. La posición neta de la cartera sería igual a $N\ S - B$. Se deriva que el valor de una opción de compra es equivalente al portafolio construido, es decir $C \cong N\ S - B$.

Una vez transcurrido el periodo de tiempo *t* se debe devolver el préstamo tomado, es decir pagar el principal *B* más el interés devengado (1+*r*), entonces los posibles valores que la cartera puede tomar al vencimiento se exponen en la ilustración 3.

Ilustración 3: Escenarios y valores posibles que puede tomar la cartera réplica de la opción de compra



Partiendo de la ley del precio único, si la cartera genera el mismo flujo de fondos que la opción de compra cualquiera sea el estado de la naturaleza, se tiene la siguiente equivalencia en el caso de contar con dos escenarios futuros:

Escenario 1: $N\,Su - (1+r)\,B = Cu$ con probabilidad de ocurrencia q

Escenario 2: $N\,Sd - (1+r)\,B = Cd$ con probabilidad de ocurrencia $(1-q)$.

Igualando las expresiones contenidas en cada escenario, bajo el supuesto de que la ley del precio único se encuentre vigente y asignando a las variables los valores indicados precedentemente, se obtiene en función de N la cantidad de acciones a adquirir:

$$N = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} = \frac{68-0}{180-60} = 0.56 \qquad Ec\ 1$$

El número de acciones a comprar, con el fin de replicar el perfil de la opción para el próximo periodo, es conocido como el delta de la opción o ratio de cobertura de la opción el cual será tratado más adelante. En el caso de comportamiento discreto de la variable aleatoria, la cantidad de títulos se obtiene a partir del cociente entre los valores posibles a fecha de expiración de la opción y el diferencial de los precios posibles al finalizar el periodo del título, siendo en el presente ejemplo de 0.56.

Despejando para B se obtiene el importe de la cantidad a solicitar prestada[4]

$$B = \frac{S_d C_u - S_u C_d}{(S_u - S_d)(1+r)} = \frac{NS_d - C_d}{1+r} = \frac{0.56x60-0}{1+0.08} = \$31 \qquad Ec\ 2$$

Se puede replicar el perfil de la opción y valuarla comprando N cantidad de acciones al precio corriente S financiando la compra con $\$B$ al tipo r. En el ejemplo se compran $N = 0.56$ del activo subyacente al precio de $S = \$100$ financiando $B = \$31$ al tipo $r = 0.08$

Si las variables de la expresión $C = N\,S - B$ son reemplazadas por las ecuaciones 1 y 2, despejando en función del valor hoy de la opción, se obtiene el valor de la prima de la opción considerando los posibles estados de la naturaleza.

$$C = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{1+r} = \frac{0.4x0.68 + 0.6x0}{1+0.08} = \$25 \qquad Ec\ 3$$

Donde \$25 es el valor de la opción de compra hoy considerando los escenarios posibles indicados en las ilustraciones 1 y 2. Las probabilidades p y su complemento $1-p$ son obtenidas de la siguiente manera

$$p = \frac{(1+r)S - S_d}{S_u - S_d} = \frac{1.08x100-60}{180-60} = 0.4 \qquad Ec\ 4$$

Si se calcula el valor esperado de la opción de compra en función a los posibles escenarios y su probabilidad de ocurrencia se obtiene que su precio asciende a $C_1 = 0.4x68 + 0.6x0 = \$27.2$

El cual actualizado al tipo sin riesgo es igual al valor hoy de la opción: $C = \frac{27{,}2}{1+0.08} = \$25$

En el caso de una opción de venta la valuación es similar a su par, solamente varían las posiciones adoptadas en la conformación de la cartera réplica, ya que la posición en este caso es equivalente a vender N acciones y colocar fondos al tipo sin riesgo r. Consecuentemente una opción de venta se construye a partir de:

P= (Vender N acciones + Colocar fondos al tipo r)

El ratio de cobertura de una opción de venta es el complemento de la cobertura de una opción de compra, es decir delta menos 1, quedando el valor en términos negativos representativo de la posición vendedora,

N= N opción de compra – 1 *Ec 5*

---

[4] En realidad la operación de préstamo es una venta en corto del título sin riesgo.

En el caso de la opción de venta la cantidad a colocar al tipo sin riesgo surge de la siguiente ecuación

$$B = \frac{NS^{-} - P^{-}}{1+r} \qquad Ec\ 6$$

Y la cartera replicante de una opción de venta es

$$P = -NS + B \qquad Ec\ 7$$

1.3 El concepto de cartera réplica, replicante o de cobertura

Antes de proseguir con el estudio de los fundamentos de valor de las opciones es imperativo poner luz sobre los conceptos de cobertura y cartera réplica. El porque insistir en esta idea esta explicado por el hecho de que en ella descansa el fundamento de los modelos de valoración de opciones. Fischer Black explica en forma intuitiva las bases de su modelo de la siguiente manera: (Chriss, 1997)

> *"Supóngase que hay una formula que explica como el valor de una opción de compra (Europea) depende del precio del activo subyacente, la volatilidad de la acción, el precio de ejercicio, el vencimiento y la tasa de interés.*
>
> *Dicha formula nos indica cuanto del valor de la opción cambiará cuando el precio de la acción cambia en un pequeño monto en un corto periodo de tiempo. Supóngase que la opción aumenta en $0.50 cuando la acción aumenta en $1.00, y disminuye en $0.50 cuando la acción desciende en su precio $1.00. Entonces se puede crear una posición de cobertura (hedged position) mediante la combinación entre una posición corta sobre dos contratos de opciones y una larga sobre el mismo lote de acciones.*
>
> *Tal situación es aproximada a una posición libre de riesgo. Para movimientos en la acción en intervalos pequeños de tiempo, las pérdidas de un lado se ven compensadas por ganancias del otro lado…*
>
> *Como la posición de cobertura será cercana a una situación libre de riesgo, debería generar un rendimiento equivalente al tipo de corto de los títulos que prácticamente no tiene riesgo. Este principio fue el que nos dio la formula de valoración de opciones."*

El titular de una opción tendrá la posibilidad de protegerse del riesgo mediante la cobertura citada. De allí que toda ecuación de valoración se integra por dos componentes: la opción en sí misma y la correspondiente estrategia para su cobertura. La relación entre la estrategia de cobertura y la opción está explicada y cuantificada por el costo total de la cobertura, y esto hace que ecuaciones como la de Black & Scholes sean importantes, ya que como será desarrollado, el costo total de una cobertura sobre una posición tomada en una opción es conocido antes que la cobertura comience[5].

Ahora bien, siempre que se traslade el riesgo de una inversión mediante la realización de otra inversión se está frente a una cobertura donde se genera un intercambio entre precio y rendimiento asumiendo un costo por tal protección.

En el supuesto que uno construya una cobertura contra el riesgo asociado al lanzamiento de una opción de compra, la principal preocupación reside en si el precio del subyacente crece por encima del precio de ejercicio. Para proteger la posición se necesita cubrir un flujo de fondos equivalente a la diferencia entre el precio del subyacente y el precio de ejercicio, suponiendo

[5] Siempre que en los supuestos contenidos en el modelo se verifiquen en el mercado, cosa poco probable no obstante la ecuación de Black & Scholes, que nace del concepto de carteras réplicas, provee de una forma de pensar y un excelente benchmark para contrastar con los valores derivados del mercado.

que el primero es superior al último. La cobertura será dada por aquella inversión que al vencimiento pague un flujo de fondos equivalente a la posición original asumida. Por su naturaleza, en el marco de las opciones la cartera de cobertura simplemente consiste en comprar una cantidad determinada del subyacente y financiar la operación mediante la venta corta de bonos sin riesgo. La cantidad neta a invertir en la cartera réplica o replicante es lo que determina el valor de la opción

Una cobertura perfecta siempre paga el valor de la opción, o sea el importe necesario para cubrir la posición y no más. En el caso de una cobertura perfecta se *replica* o *sintetiza* el instrumento derivado mediante la combinación de dos instrumentos directos (subyacente y bonos al tipo sin riesgo). En el caso de cubrir una posición larga en una opción de compra, la réplica del instrumento se obtiene de combinar una cartera con *n* cantidades del subyacente financiando una fracción al tipo sin riesgo. Dicha cobertura replicará el perfil riesgo-rendimiento de la opción, es decir al vencimiento se obtendrá el valor del activo subyacente (*n* cantidades invertidas) menos el precio de ejercicio (financiamiento al tipo libre de riesgo) o carecerá de valor en el escenario inverso. La relación mencionada se conoce como principio de las carteras réplicas (*payoff replication*) es una de las piedras angulares en las cuales se cimientan los modelos de valoración de opciones.

Las relaciones de cobertura *(hedged)* de las diferentes variables explicativas del precio de la opción (precio del subyacente, volatilidad, interés y tiempo) serán desarrolladas en el punto 6.

2. PRINCIPIOS GENERALES CONTENIDOS EN LA VALORACIÓN DE LAS OPCIONES FINANCIERAS

A diferencia de la Teoría de Modelos de Equilibrio para la valoración de títulos[6] el valor de una opción financiera no depende de la actitud que tengan los inversores frente al riesgo ni de la tasa de rendimiento esperada del activo subyacente. El hecho de que el valor de las opciones sea independiente del rendimiento esperado del principal y del comportamiento de los agentes frente al riesgo da mayor solidez a la presente teoría frente a los tradicionales modelos de valoración.

Si bien la aseveración precedente es cierta, puede parecer un tanto tajante y no discernir entre los fines de los modelos mencionados. Los modelos de valoración de opciones no consideran explícitamente el rendimiento del subyacente en sus formulaciones debido al principio de cartera réplica en el cual se apoyan. En ese orden de ideas el fin de los modelos de valoración de activos es determinar el precio en condiciones de equilibrio de los activos financieros en el mercado, a partir de un precio general por el riesgo sistemático o por los factores explicativos de las distintas fuentes de riesgo.

Los modelos de valoración de opciones tienen por objeto valorar instrumentos financieros derivados suponiendo determinado comportamiento del activo subyacente, independientemente de las preferencias frente al riesgo del inversor. De hecho uno de los aspectos más importantes es que en los modelos de opciones cobra importancia la varianza o volatilidad en el precio del subyacente en contraposición a su rendimiento. Esto es, sobre los dos aspectos estadísticamente importantes del precio del activo (rendimiento esperado y volatilidad), sólo interesa la volatilidad.

Ese 'interés' de los inversores por la volatilidad se conoce como equivalentes a certeza o neutralidad frente al riesgo (*risk-neutrality*).

[6] Dentro de estos modelos tenemos aquellos que se basan en el comportamiento de los inversores frente al riesgo bajo el criterio de elección media – varianza o MVB *(mean–variance behaviour*) como el CAPM *(capital asset pricing model*) y aquellos en donde el proceso de valoración de títulos se fundamenta en argumentos de arbitraje como el APM *(arbitrage price model*). El CAPM se basa en los supuestos clásicos sobre el comportamiento de los inversores frente al riesgo, a diferencia del APM quien prescinde del comportamiento de la función de utilidad de los inversores en el proceso de valoración.

La robustez de los modelos de opciones cobra importancia al momento de tratar el tema de la asignación del riesgo en las decisiones de inversión y la utilización de la filosofía contenida en las opciones financieras[7].

Los supuestos generales sobre los cuales se cimientan los modelos de valoración de opciones financieras son:

1) Mercados perfectos y eficientes, sin costos de transacción, impuestos, información disponible en forma homogénea para todos los participantes, toma y colocación de fondos al tipo sin riesgo y ventas cortas ilimitadas.
2) El tipo libre de riesgo es constante a lo largo de la vida de la opción
3) El activo subyacente no paga dividendos durante la vida de la opción. El presente supuesto luego es abandonado cuando se introduce el ajuste en el precio a consecuencia del pago de dividendos.
4) El precio del activo subyacente (y por ende todos los títulos negociados en el mercado de capitales) es explicado por un proceso estocástico continuo conocido como de Wiener. Estos procesos se caracterizan por el hecho de que la variable aleatoria, o sea el precio del título, varía a lo largo del intervalo de medición en forma continua. Este supuesto implica asumir que la varianza del precio se mantiene constante en el tiempo y el no pago de dividendos que impliquen saltos o variaciones abruptas en el precio del activo[8]. La varianza constante y la inexistencia de saltos en el comportamiento de las variables aleatoria son abandonados en función al proceso estocástico que se defina.

Si bien luego será estudiado con mayor profundidad es útil aclarar en que consiste el proceso al cual se hizo referencia en el punto IV. Este es conocido como proceso de difusión de Wiener, el cuál se explica por la siguiente expresión,

$$\frac{dS}{S} = a\,dt + s\,dz \qquad Ec\ 8$$

La variación del precio del activo subyacente, dS/S, es explicada por la ecuación 8 donde a es el rendimiento instantáneo esperado del título, s es la varianza instantánea sobre el precio del título, la cual se supone constante a lo largo del intervalo de medición, y dz es el diferencial del proceso de difusión de Wiener con media de cero y varianza igual a dt. En el caso que la variable aleatoria, precio del título, asuma un comportamiento discreto el proceso estocástico continuo es reemplazado por un proceso multiplicativo binomial el cual, como será visto posteriormente, cuando los intervalos de medición tienden a infinito deviene equivalente a la distribución continua lognormal del proceso indicado en la ecuación 8. El tema de los procesos estocásticos, como instrumentos matemáticos para determinar el valor de la opción, será abordado con mayor detalle en el punto 4.

---

[7] La presente afirmación se ve respaldada en el actual y profundo desarrollo de la teoría de valoración mediante el uso de los modelos de Opciones Reales. En el marco de las decisiones de inversión puede pensarse que debido a que el valor de la opción depende de la varianza y no de la covarianza del subyacente, este es e independiente del grado de diversificación de los inversores y por eso está más cerca del enfoque directivo de las decisiones de inversión. No obstante el presente razonamiento puede sonar un poco excesivo, ya que el rendimiento, el cual compensa el riesgo sistemático, influye en el valor de la opción sobre el título.

[8] Es sabido que luego del pago del dividendo el precio de la acción cae en una magnitud equivalente al valor del dividendo. Existe suficiente evidencia sobre la afirmación precedente citándose entre otros a Fama and French (1996); Fama and French (1995).

3. PRINCIPIOS ESPECÍFICOS EN LA VALORACIÓN DE LAS OPCIONES FINANCIERAS. LÍMITES MÁXIMOS Y MÍNIMOS AL VALOR DE UNA OPCIÓN

Merton (1973) desarrolló un conjunto de supuestos para fundamentar la teoría de las opciones financieras. La idea básica es el concepto de dominancia estocástica la cual se explica en dos órdenes. El concepto de dominancia estocástica de primer orden indica que la cartera A domina a la cartera B, sí para un intervalo de tiempo y para los diferentes estados de la naturaleza los rendimientos de la cartera A son superiores a los rendimientos de la cartera B, entonces el primer activo tiene dominancia estocástica respecto del segundo. Los inversores, al requerir más riqueza a menos, preferirán invertir en la primera cartera independientemente de sus preferencias frente al riesgo (es decir si son adversos, afectos o neutrales). La dominancia estocástica de segundo orden sostiene que ante dos carteras con igual rendimientos para cada estado de la naturaleza será dominante aquella que presente la menor desviación de los rendimientos para cada escenario futuro.

A partir de los conceptos de dominancia estocástica, el estudio de las opciones no depende del comportamiento de los inversores frente al riesgo siendo el valor del instrumento explicado y limitado por las siguientes propiedades:

3.1 Principios específicos

***Propiedad 1*:** El valor de una opción nunca es negativo. Las opciones al ser de ejercicio voluntario solamente son ejecutadas en la medida que generen un beneficio para los intereses de su tenedor lo cual implica que si su valor es negativo simplemente se dejarán expirar,

$$C(S,t,E) \geq 0$$
$$c(S,t,E) \geq 0$$
$$P(S,t,E) \geq 0$$
$$p(S,t,E) \geq 0$$

Propiedad 2: Al vencimiento una opción de compra tiene dos posibles resultados. Para una opción de compra el resultado al vencimiento está explicado por la máxima diferencia entre el precio del activo subyacente y el precio de ejercicio. Si el precio del subyacente es inferior al precio de ejercicio por aplicación de la propiedad 1 la opción carece de valor,

$$C(S,0,E) = c(S,0,E) = \max(S-E,0)$$

El razonamiento inverso es aplicable a una opción de venta,

$$P(S,0,E) = p(S,0,E) = \max(E-S,0)$$

Propiedad 3: Una opción Americana debe ser vendida como mínimo al precio de ejercicio o la diferencia entre el valor actual del subyacente y el precio de ejercicio, ya que al poder ser ejercida durante su vida existe la posibilidad de arbitrar comprando nuevamente y ejecutándola,

$$C(S,t,E) \geq \max(S-E,0)$$

$$P(S,t,E) \geq \max(E-S,0)$$

Propiedad 4: En el caso de dos opciones Americanas sobre el mismo subyacente pero con distintas vidas, valdrá antes del vencimiento más aquella que tenga mayor plazo para su expiración,

$$C(S,t_1,E) \geq C(S,t_2,E) \text{ si } t_1 > t_2$$

Propiedad 5: Una opción Americana antes del vencimiento tiene un valor igual o mayor que su par Europeo ya que la primera brinda todos los derechos de la segunda más el derecho de ejercicio prematuro,

$$C(S,t,E) \geq c(S,t,E)$$

$$P(S,t,E) \geq p(S,t,E)$$

Propiedad 6: Una opción de compra con precio de ejercicio menor tiene un valor igual o mayor que otra opción idéntica pero con mayor precio de ejercicio,

$$C(S,t,E_1) \geq C(S,t,E_2)$$

$$c(S,t,E_1) \geq c(S,t,E_2) \text{ si } E_1 \leq E_2$$

Propiedad 7: Una opción de compra no puede valer más que su activo subyacente,

$$C(S,t,E) \leq S .$$

La propiedad 7 se deriva de la propiedad 4 relativa al plazo y de la propiedad 6 relativa al precio de ejercicio,

$$C(S,t,E) \leq C(S,\infty,0) \leq S$$

Propiedad 8: Una opción de compra no tiene valor si el activo subyacente tampoco lo tiene,

$$C(0,t,E) = c(0,t,E) = 0$$

La presente propiedad es una consecuencia de la propiedad 1 en donde el valor de una opción nunca es negativo y de la propiedad 7 donde la opción de compra no puede valer más que su activo subyacente. En el caso de una opción de venta se aplica el razonamiento inverso, si el subyacente no tiene valor seguramente será ejercida y se ganará el precio de ejercicio.

Propiedad 9: Una opción de compra sobre un activo subyacente que no paga dividendos, vale antes del vencimiento la diferencia entre el valor del activo menos el valor actual del precio de ejercicio,

$$C(S,t,E) = c(S,t,E) \geq \max(S - B(t)E, 0)$$

donde $B(t) \equiv \ell^{-rt}$ es el precio de un bono cuya estructura de flujo de fondos es cupón cero el cual rinde el tipo sin riesgo y paga al vencimiento el valor nominal de $1.

A partir de dos portafolios, los cuales se exponen en el siguiente cuadro, se explicara la propiedad 9 apelando al concepto de dominancia estocástica,

Cuadro 1: Carteras y escenarios probables Propiedad 9

Carteras	A	B
Si $S < E$	$0+E$	S
Si $S > E$	$(S-E)+E=S$	S

La cartera A se integra por una opción de compra Europea $c(S,t,E)$ y E bonos al precio $B(t)$ tal que el total de la inversión asciende a $c(S,t,E) + B(t)E$.

La cartera B se encuentra compuesta por la compra del activo subyacente al precio S.

Al vencimiento, conforme se expone en el cuadro, la cartera A domina a la cartera B ya que el precio de ejercicio es mayor al valor del título al darse el estado $S < E$. Si por el contrario el estado de la naturaleza es $S > E$ entonces $c(S,t,E) + B(t)E \geq S$. Aplicando la propiedad 1 se demuestra la propiedad 9.

Propiedad 10 [9]***:*** Una opción de compra Americana sobre una acción que no paga dividendos no debe ser ejercida antes de su expiración y su valor será equivalente al de una opción Europea. En la propiedad 5 se indicó que una opción Americana tiene igual o mayor valor que su par Europeo, situación en principio cierta salvo para el caso de una opción de compra sobre un título que no paga dividendos,

$$C(S,t,E) = c(S,t,E)$$

De la propiedades 1 y 9 y partiendo que antes del vencimiento $B(t) < 1$ para $r,t > 0$ se tiene,

$$C(S,t,E) \geq c(S,t,E) \geq \max(S - B(t)E, 0) > \max(S - E, 0)$$

Es decir una opción de compra Americana sobre un título que no paga dividendos tiene más valor si se mantiene viva en vez de ser ejercida en forma temprana. Implica que el ejercicio anticipado para esta clase de opciones no es óptimo situación derivada del valor tiempo del dinero sobre el precio de ejercicio y el apalancar al comprar con un bono a descuento cuyo valor nominal sea igual a E.

En el caso de las opciones de venta Americana, la presente propiedad no se cumple ya que siempre existe una probabilidad positiva derivada del ejercicio antes del vencimiento, por lo que dicha flexibilidad que brinda el *put* Americano a diferencia de su par Europeo tiene valor en este caso. Apelando a una explicación intuitiva si el valor del título cayera a cero, $S = 0$, seguramente la opción de venta sería ejercida por lo que una opción Americana de venta tiene siempre un mayor valor que su par Europeo,

$$P(S,t,E) \geq p(S,t,E)$$

Propiedad 11: El pago de dividendos D durante la vida de la opción justifica el ejercicio temprano de una opción de compra Americana,

Cuadro 2: Valor de una opción americana sobre una acción que paga dividendos

Carteras	*Valor Actual*	*Si S < X*	*Si S > X*
A	*c(S,t,E)+(E+D)B(t)*	*0 + E +D*	*S - E + E +D*
B	*S*	*S + D*	*S + D*
Relación valor terminal A y B		Valor A > Valor B	Valor A = Valor B

Dependiendo del valor de los dividendos y del tipo sin riesgo es posible tener la siguiente situación $(E + D)\ell^{-rt} > S$. En ambos escenarios el ejercicio temprano dota de mayor valor a la opción Americana, por lo que la flexibilidad vinculada a su ejercicio es valorada por el mercado cuando existe el pago de dividendos durante la vida de la opción.

Propiedad 12: Una opción cuya fecha de expiración es a perpetuidad sobre una acción que no paga dividendos tiene el mismo valor que el título,

[9] Un mayor desarrollo a partir del uso de carteras réplicas para las Propiedades 9, 10 y 11 se puede ver en Copeland, Weston and Shastri (2004).

$$C(S,\infty,E) = S$$

Esta propiedad se deriva de la propiedades 7 y 9 donde para $t = \infty$ se tiene que el valor de una opción de compra es igual a $C(S,\infty,E) \geq C(S,\infty,B(t)) = S$.

Propiedad 13: Un punto a tener en cuenta en la valuación de opciones es el principio de paridad entre el valor de una opción de venta y compra. La utilidad de dicha igualdad reside en el hecho de que con solo conocer el valor de una de las primas se puede derivar el valor de la opción contraria, en la medida que los derivados tengan la misma fecha de expiración, surjan del mismo subyacente y adquieran el formato de opción europea

La presente relación, establecida por Stoll (1969), es conocida como el principio de paridad put-call (*put-call parity*).

El principio se pude ilustrar apelando al siguiente ejemplo. Supóngase que un inversor forma una cartera compuesta por una acción y opciones Europeas de compra y venta. Ambas opciones son el mismo activo, en este caso la acción comprada por el inversor *S*, con igual fecha de expiración *t* y similar precio de ejercicio *E*. Al vencimiento se presentan dos estados de la economía, el primero donde el precio de la acción es inferior al precio de ejercicio $S < E$ y el segundo donde el valor del subyacente es superior al precio de ejercicio pactado, $S > E$.

Los flujos de efectivo de la cartera para cada estado se resumen en el presente cuadro.

Cuadro 3: Paridad put-call opciones europeas

Conceptos integrantes de la cartera	Si $S<E$	Si $S>E$
a-Tenencia acción S	S	S
b-Resultado de la opción de compra	0	0
c-Resultado de la opción de venta	$E-S$	$-(S-E)$
Posición neta de la cartera	E	E

Sin importar el escenario que acontezca, el flujo de efectivo generado por la cartera siempre será *E*. Consecuentemente el flujo de fondos de la cartera será cierto y el mismo puede actualizarse al tipo sin riesgo, *r*.

$$S + p - c = \frac{E}{1+r} \qquad \text{Ec 9}$$

donde *p* y *c* son los valores de la opción de compra y venta europea sobre el activo en cuestión

Ordenando los términos se llega a la ecuación de paridad entre opciones Europeas de compra y de venta,

$$c - p = \frac{(1+r)S - E}{1+r} \qquad \text{Ec 10}$$

Un caso especial en la presente relación ocurre cuando el precio de ejercicio es igual al valor del subyacente es decir $S = E$.

$$c - p = \frac{rS}{1+r} > 0 \qquad \text{Ec 11}$$

Cuando los parámetros de valuación entre las opciones que integran la paridad son iguales, es decir igualdad para el precio del subyacente, fecha de expiración, varianza y tipo sin riesgo y se presenta el caso especial de que el precio de ejercicio es igual al valor del activo entonces el valor de una opción de compra es superior al valor de una opción de venta.

La forma de expresar la ecuación de paridad entre una opciones de compra y venta por lo general es partiendo de la base de que las variables aleatorias no adoptan un comportamiento discreto sino continuo, por lo que el proceso de actualización empleado es instantáneo tal que la ecuación de paridad call-put queda expresada de la siguiente manera

$$c - p = S - E\ell^{-rfT} \qquad \textit{Ec 12}$$

donde ℓ^{-rfT} es el factor de actualización instantánea.

3.2 Límites máximos y mínimos en el valor de una opción

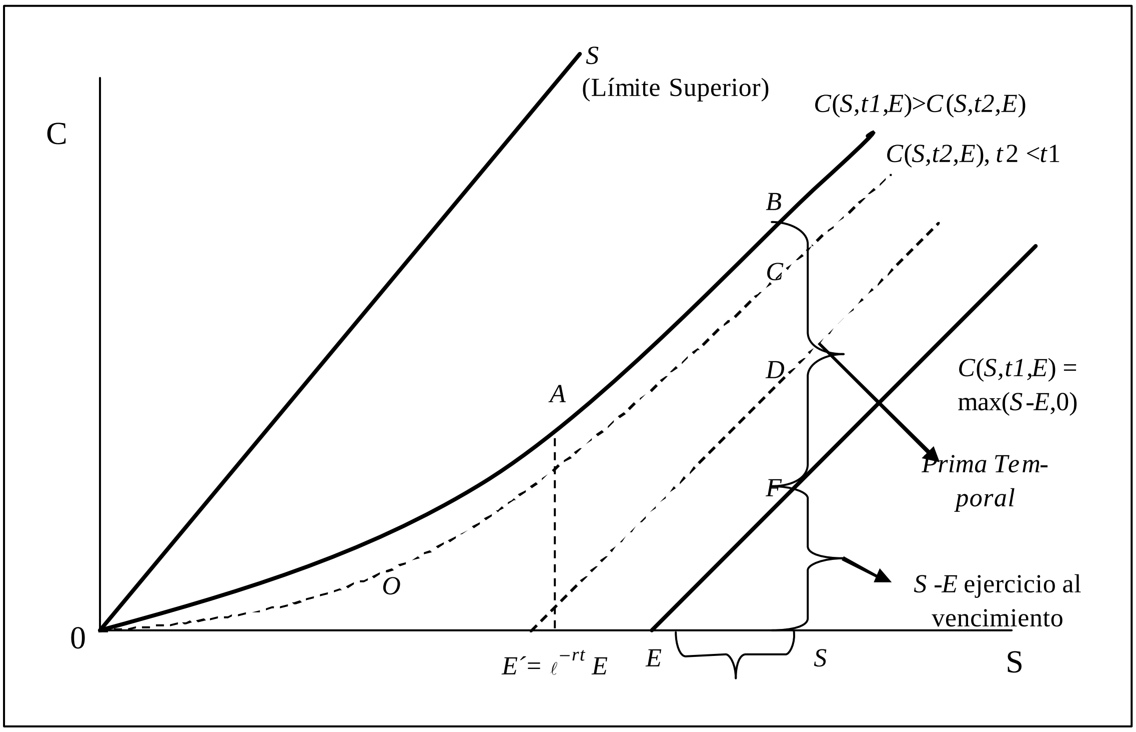
A partir de las propiedades indicadas, el valor de una opción se encuentra establecido por valores límites que dan origen a los gráficos de las ilustraciones 4 y 5, para una opción de compra y para una opción de venta.

Límites y perfiles para una opción de compra

1) De la propiedad 1 donde $C \geq 0$ el límite inferior indicado por la línea continúa OE es igual a cero. En el punto A donde el valor del subyacente es igual a su precio de ejercicio, el valor de la opción es positivo AE > 0 ya que existe la posibilidad de que el activo supere al precio de ejercicio.
2) De la propiedad 3 donde $C \geq \max(S - E, 0)$ el valor de la opción se encuentra limitado por la línea continúa OEF. Cuando el valor del subyacente a la expiración es superior al precio de ejercicio el valor de la opción se encuentra limitado por la recta a 45º EF. Este valor que surge de la diferencia entre (S – E) es aquel que adopta la opción al vencimiento o al momento de ejercerla y es conocido como valor intrínseco, al vencimiento o a la expiración del derivado.
3) De la propiedad 4, donde $C(S, t_1, E) \geq C(S, t_2, E)$ para $t_1 > t_2$ la curva OB, con mayor plazo para su expiración, tiene mayor valor que la curva OC por lo cual se ubica por encima de esta.
4) De la propiedad 7, donde $C \leq S$ el valor de la opción de compra tiene su límite superior indicado en la línea continua OS, situación que se verifica en el supuesto de una opción con plazo de vencimiento a perpetuidad, $C(S, \infty, E)$
5) De la propiedad 8 si $S = 0$ entonces el valor de la opción de compra es igual a 0, $C = 0$ teniendo como límite el punto O del origen.
6) De la propiedad 9 $C(S, t, E) \geq \max(S - B(t)E, 0)$ tiene un valor mínimo en el punto en el cual el precio de ejercicio es igual a $E' = E\ell^{-rt}$ y se aproxima a $S - E\ell^{-rt}$ en el punto D, en el límite en que $S \lim_{S\to\infty}$. Dichos valores se encuentran expresados en la recta punteada OE´D. Significa que cuando el valor de la acción crece sustancialmente la opción seguramente será ejercida por lo que el valor de esta se aproxima al valor del título menos el valor actual del precio de ejercicio.

Conforme se analizo el valor de una opción de compra es equivalente a la compra apalancada de acciones, financiada al tipo de interés libre de riesgo siendo la devolución del préstamo al momento de la expiración del instrumento. De allí que el valor de un *call* crece a medida que las condiciones del *apalancamiento* son más ventajosas, es decir cuando aumenta el tipo sin riesgo y el plazo para la expiración.

Ilustración 4: Determinantes del valor (límites) de una opción de compra



En el gráfico surge que el valor de la opción de compra crece a raíz del crecimiento del activo subyacente, conforme surge de la curva OAB. En el supuesto de una opción de compra donde la acción no paga dividendos el valor de la opción antes del vencimiento es siempre superior al valor intrínseco o al vencimiento del instrumento, razón por la cual el ejercicio óptimo de una opción de venta Americana no debe ser antes de la fecha de vencimiento. También se observa que el valor de una opción de compra es mayor cuanto mayor es la volatilidad, s , del activo subyacente ya que el titular si bien tiene la posibilidad de perder tiene una potencial posibilidad de que el precio aumente, situación esta última que se potencia a medida que el plazo de expiración es mayor.

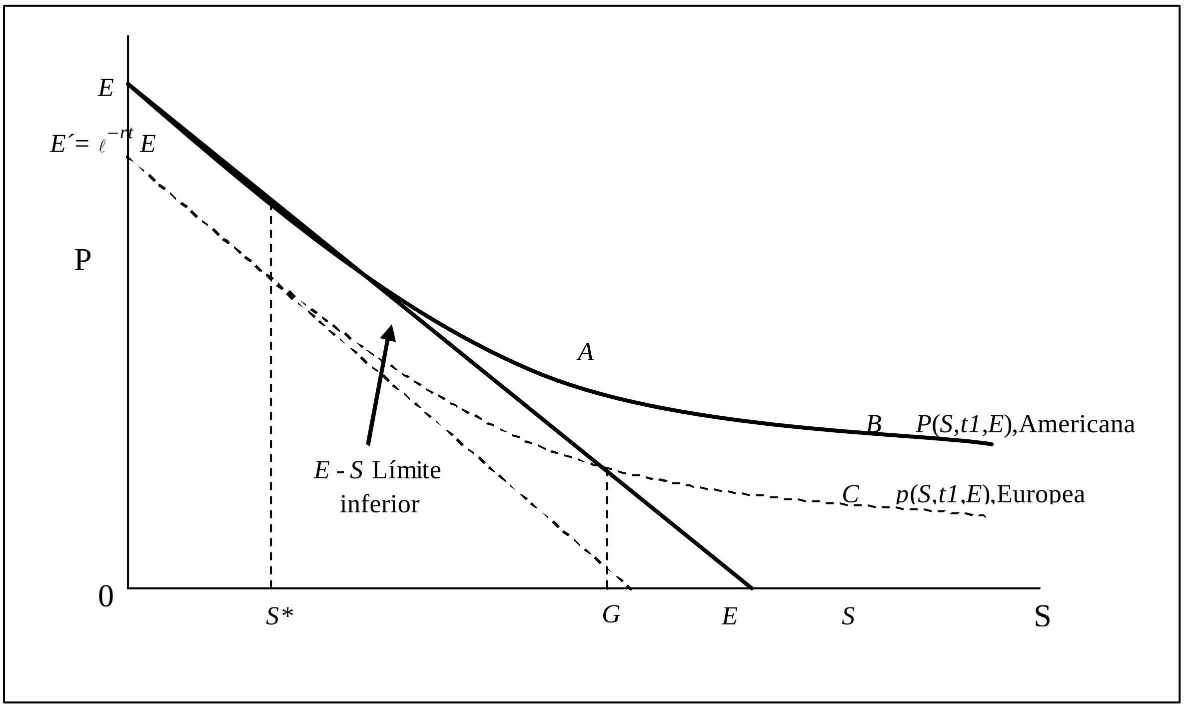
El valor de una opción de compra *C*, manteniéndose constantes las demás variables, tiene una relación positiva con S, r, t y s mientras que con el precio de ejercicio *E* mantiene una relación negativa.

Límites y perfiles para una opción de venta. En el caso de una opción de venta, al vencimiento, el máximo valor que puede adoptar está dado por la diferencia entre el precio de ejercicio y el valor del activo subyacente (*E - S, 0*) conforme se indica en la línea EE´´S. A la inversa de una opción de compra la opción de venta decrece en su valor a medida que el precio del subyacente *S* y el tipo libre de riesgo *r* aumentan, no obstante cuando se incrementa *E* , la volatilidad s y el lapso para su expiración t, el valor de la opción de venta se relaciona en forma directa con dichos movimientos.

A diferencia de las opciones de compra Americanas sobre títulos que no pagan dividendos, en el caso de las opciones de venta el ejercicio prematuro puede ser óptimo. De hecho si el precio del subyacente se encuentra debajo de determinado valor critico conforme se muestra en la figura, $S < S^*$ la opción de venta adopta un valor equivalente a su valor intrínseco, $P = (E - S)$ es decir para valores bajos del activo subyacente la curva de la opción de venta Americana se confunde con el perfil de rendimiento al vencimiento. Para reforzar la aseveración del ejercicio temprano, si en un caso extremo el valor del principal cae a cero, $S = 0$ la opción será ejercida porque pagará E, o sea al máximo valor que puede adquirir[10].

Si bien una opción de venta Americana se valora igual que su par Europeo este tiene un menor valor conforme se expuso en la propiedad 5. En el gráfico se observa que la opción Europea gana menos que su valor al vencimiento al llegar el activo subyacente a un valor inferior a un punto crítico como G. Es decir la recta del valor intrínseco es interceptada por la opción cuando $S = G$ siendo $G > S^*$ y se cruza con el eje vertical cuando $S = 0$ para un valor $E' = E\ell^{-rt}$ el cual es menor a E.

Ilustración 5: Determinantes del valor (límites) de una opción de venta



A partir de las propiedades generales y particulares referidas al comportamiento de las opciones se desarrolla una teoría de valoración sustentada en los conceptos de dominancia estocástica y prescindiendo supuestos de comportamientos de los inversores frente al riesgo.

Como fue indicado, las opciones al ser un instrumento derivado de un activo financiero o si se quiere accesorio de un principal conocido como activo subyacente, el valor de estas depende del comportamiento del título que les da vida. Es así que para el desarrollo de modelos de valoración es necesario partir de supuestos relacionados con la distribución de probabilidad a seguir por la variable aleatoria, o sea los movimientos de los títulos. A continuación se presentarán los dos grupos de modelos de valoración de opciones los cuales se caracterizan por los diferentes supuestos adoptados en materia del comportamiento del subyacente: En un primer grupo se tiene los modelos que parten del supuesto de que el título es una variable aleatoria con un comportamiento discreto en el tiempo. Un segundo grupo está integrado por modelos que presumen un comportamiento continuo de la variable aleatoria basándose en el proceso estocástico dinámico conocido en su expresión general como proceso de difusión de Wiener.

[10] Si la situación de valor cero del subyacente se mantiene en el tiempo también puede ganarse E al vencimiento no obstante dicho ganancia se diferirá en el tiempo con el consecuente costo de oportunidad, transformando en dicha circunstancia no óptimo el ejercicio al vencimiento.

4. FUNDAMENTOS EN LOS PROCESOS DE VALUACIÓN DE FLUJOS INCIERTOS: LOS PROCESOS ESTOCÁSTICOS

4.1 El proceso estocástico

Al estudiar las propiedades que determinan los límites al valor de una opción se observa que la clave en el proceso de valoración está en el comportamiento futuro del activo subyacente. Por lo expuesto, el punto principal en materia de valuación de opción se vincula a desarrollos de modelos capaces de predecir el comportamiento potencial de la variable aleatoria[11] de la ecuación, o sea los movimientos del activo principal.

El comportamiento de la variable aleatoria es formalizado y explicado por los modelos denominados procesos estocásticos. Una variable sigue un proceso estocástico cuando a lo largo de un intervalo de tiempo adopta en su totalidad o en parte[12] un comportamiento aleatorio. Es decir un proceso estocástico representa una serie de eventos gobernados por leyes probabilísticas.

Un proceso estocástico puede describirse como *Proceso donde se define una ley de probabilidad para la evolución de la variable aleatoria x, adoptando valores* x_t *a lo largo de un intervalo temporal t. Para intervalos de tiempo* $t_1 < t_2 < t_3$, *se puede calcular la probabilidad de que los valores correspondientes a* x_1, x_2, x_3 *se encuentren en determinado rango por ejemplo,* $prob(a_1 < x_1 \leq b_1, a_1 < x_2 \leq b_1,...)$.

Transcurrido el periodo t_1 se obtiene el valor x_1 condicionando la probabilidad de ocurrencia de futuros eventos sobre dicha información.

4.2 Variables aleatorias estacionarias y no estacionarias:

Ahora bien, un tema de importancia está dado por el comportamiento de la variable aleatoria respecto del grado de estacionariedad de sus propiedades estadísticas, de donde surge la clasificación de estacionarias y no estacionarias. Las primeras se caracterizan por mantener constantes, en el largo plazo, las propiedades estadísticas. Se suele apelar al ejemplo de la temperatura de la tierra, en determinada región, como variable aleatoria estacionaria. La temperatura en algunas épocas del año, por ejemplo la primera quincena de marzo es independiente de la temperatura en la segunda quincena de agosto, no obstante la esperanza matemática y la varianza de la tempera-

---

[11] Vale realizar una aclaración en relación al uso de las palabras variable aleatoria y proceso estocástico. Siguiendo a Ricardo Fornero, tanto la variable como el proceso pueden calificarse como aleatorio o estocástico. En inglés se usan las palabras *random variable* y *stochastic process*, en español se suele utilizar la expresión 'variable aleatoria' (en vez de variable estocástica) y 'proceso estocástico' (en lugar de proceso aleatorio). La palabra aleatorio viene del latín y estocástico del griego y es usual en estadística considerar que son sinónimos.

a) Una 'variable' en matemática es algo con connotaciones distintas en un contexto probabilístico. En matemática 'variable' significa algo que puede tomar cualquier valor de un conjunto especificado, mientras que los valores que puede tomar una 'variable aleatoria' en un marco probabilístico resultan de la función de probabilidad que tiene asociada. No es lo mismo decir que algo 'varía' a que 'varía según una distribución de probabilidad'.

b) Aleatorio tiene que ver con 'suerte', en el sentido de 'resultado al azar', y entonces estrictamente haría referencia sólo a una distribución uniforme de probabilidad (como la que regiría los lanzamientos de un dado).

c) Pero cuando un resultado es 'más probable' que otro ya no sería cuestión de efecto del azar, sino que hay una estructura distinta al puro azar, desconocida para quien está analizando la cosa, y que se resume en la distribución. Y la expresión 'variable aleatoria' se refiere a cualquier distribución.

Entonces, en la expresión 'variable aleatoria' no hay que prestar atención al significado individual de las palabras 'variable' y 'aleatoria', sino a la expresión entera con el significado que se le da, algo que puede tomar valores en función a una distribución de probabilidad asociada en un contexto probabilístico.

[12] El hecho de que el comportamiento de la variable bajo estudio sea parcialmente aleatorio se puede explicar apelando al ejemplo de las acciones de una firma. Estas en el corto plazo son volátiles y erráticas en sus movimientos pero a largo plazo se puede pretender un comportamiento determinístico ya que en principio existe un crecimiento positivo de su valor que compensa el riesgo asumido por el inversor.

tura para las sucesivas primeras quincenas de marzo se mantienen constantes con lo cual, desde la perspectiva de variable, adquiere el carácter de estacionaria.

En el otro extremo se tiene a las variables aleatorias no estacionarias en donde las propiedades estadísticas no se mantienen invariables en el largo plazo. Se puede citar el comportamiento de las acciones en el mercado de capitales, donde su valor en un contexto probabilística puede ser un precio alto y en otro escenario un resultado cercano a cero. La media y la varianza de los rendimientos quedan sujetas a cambios tanto más como se incremente el horizonte de proyección *T*.

No obstante debe indicarse el hecho de que la media o la varianza cambien o no en el tiempo es un problema estadístico cuando se analizan datos seriados, y hay transformaciones (como la logarítmica o la diferenciación) para llegar a series homogéneas y la mayoría de los inconvenientes en econometría surgen de la falta de linealidad, no de la falta de estacionariedad. En los modelos conceptuales la media y la varianza suelen considerarse constantes, o sujetas a una pauta de comportamiento, que es lo mismo que considerarla constante. Por ejemplo se puede citar el caso donde el rendimiento está sujeto a el cambio de la media y el aumento de la varianza en el proceso browniano, o el aumento de la varianza hasta cierto punto, y a partir de ahí estable, como en el proceso de reversión a la media.

Por eso, también se cuestiona el hecho de plantear la existencia de modelos que reflejan procesos estacionarios y no estacionarios lo cual no parece del todo preciso. Los modelos siempre implican alguna pauta especificada de cambio de la media o la varianza, lo cual es distinto a identificar, cuando se analiza una serie, que hay, por ejemplo, cambios de la varianza a lo largo del tiempo que no pueden resolverse con transformaciones.

4.3 Procesos discretos y continuos

Todo proceso estocástico se divide en continuo o discreto en función al tratamiento de la variable tiempo t en relación a los posibles resultados de parte de la variable aleatoria x .Se puede decir que una variable aleatoria adopta un proceso estocástico continuo cuando en el intervalo temporal de medición t, se asume variaciones *instantáneas* de sus posibles valores. En el lado opuesto se ubican los procesos estocásticos discretos en donde la variable aleatoria toma valores puntuales en determinados momentos de tiempo a lo largo del intervalo de medición. De hecho un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias, es decir para cada momento t, $x(t)$ es una variable aleatoria donde comúnmente se interpreta a t como tiempo y $x(t)$ es el estado del proceso en el tiempo t. El recorrido de x (*sample path*) entonces puede ser discreto o continuo.

La presente distinción de los procesos estocásticos en función al tratamiento de la variable aleatoria en relación con la variable temporal, es primordial habida cuenta que traza la división entre los modelos de valoración de opciones en base a procesos estocásticos discretos y procesos continuos.

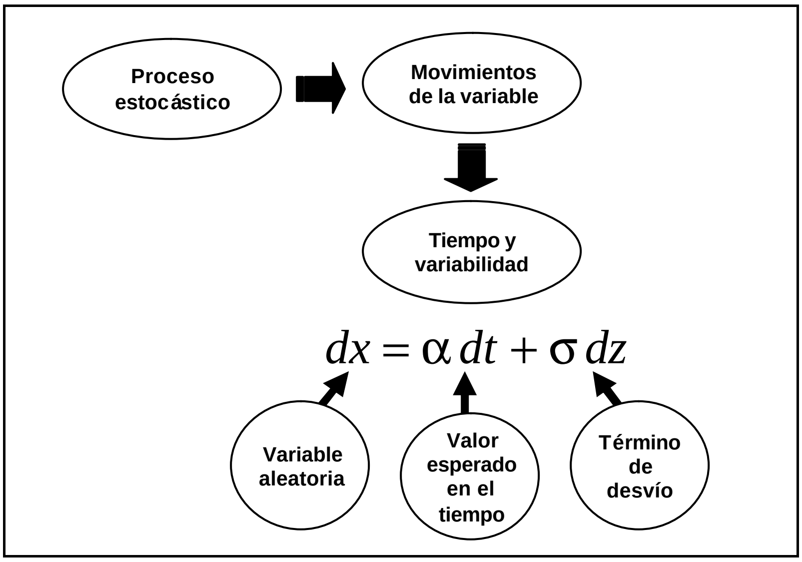
4.4 Estructura de una variable aleatoria

Las variables de los procesos estocásticos en la mayoría de los casos tienen la siguiente estructura: un término de valor esperado (*drift term*) y un término aleatorio (*random term*). El proceso estocástico proyectado para una variable x puede concebirse como la suma del valor proyectado $(E[x])$ más el término de error, donde este sigue alguna distribución de probablidad, tal que:

$$x(t) = E\left[x\left(t\right)\right] + error\left(t\right) \qquad \text{Ec 13}$$

En términos de incrementos un proceso estocástico puede presentarse tal como se muestra en la ilustración 6.

Ilustración 6
Estructura de un proceso estocástico

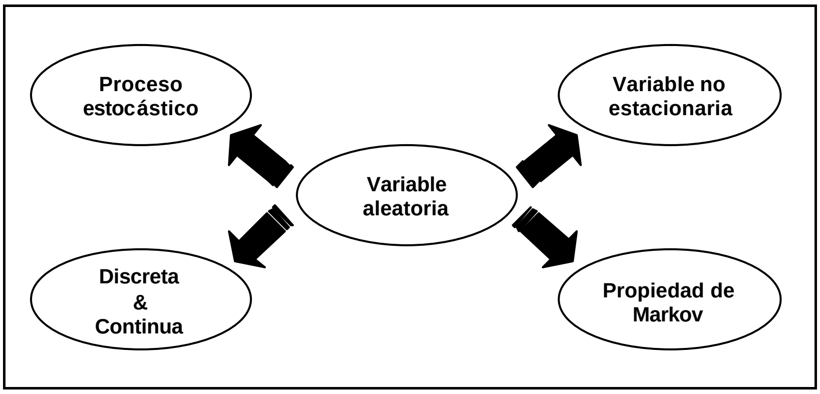


4.5 Información, eficiencia de mercado y el proceso de Markov

Una forma particular de proceso estocástico es el conocido proceso de Markov (*Markov process*) en donde el estado presente del proceso es relevante para predecir el futuro comportamiento de la variable aleatoria, careciendo de fuerza el comportamiento histórico de la variable bajo estudio[13].

Los procesos estocásticos discretos y continuos empleados en los modelos de valoración de opciones son procesos que cumplen con la propiedad de Markov (*Markov property*) en tanto y en cuanto se valen del valor actual de la variable aleatoria para proyectar su valor futuro. Esta propiedad indica que la distribución de probabilidad de x_{t+1} depende de x_t y no del comportamiento pasado de la variable. Por ejemplo si se tiene una variable aleatoria con valor $x_t = 10$ y con una probabilidad de $\frac{1}{2}$ variar en una unidad en forma normal, por la propiedad de Markov los posibles valores a tomar en x_{t+1} pueden ser de 9 o 11 respectivamente.

Ilustración 7
Características de la variable aleatoria.



En términos de activos financieros, suponer que las acciones (variable aleatoria) siguen procesos estocásticos que cumplen con la propiedad de Markov implica que solamente la información pública y actual modifica los precios de las acciones y que los valores corrientes de los títulos deben ser tomados como base para las proyecciones. La información presente sobre los activos rápidamente es tomada por los inversores y reflejada mediante sus actos en el mercado ajus-

[13] Se podría decir que el proceso de Markov carece de memoria.

tando los precios corrientes. Al reflejar solamente la información histórica, los precios de los títulos tienen como causa de variación la incorporación de información nueva e impredecible. Estas ideas son consistentes con la noción de eficiencia débil del mercado de capitales[14].

4.6 Movimiento browniano geométrico (*Geometric Brownian motion*)

Es uno de los procesos estocásticos de mayor difusión y utilización en el campo de las finanzas. Este proceso nace del proceso de Wiener[15], también conocido como movimiento Browniano (*Brownian motion*), que es un proceso utilizado para explicar el comportamiento de distintos fenómenos y objetos entre los cuales se encuentran los activos financieros. El mismo se caracteriza por reunir tres propiedades:

1) Es un proceso estocástico del tipo Markov (*Markov process*) conforme fue explicado precedentemente. Esto significa que la distribución de probabilidad correspondiente a los valores esperados de la variable aleatoria x depende solamente del valor actual de la variable, siendo el comportamiento pasado del proceso es irrelevante. Bajo esta propiedad los precios de las acciones reflejan toda la información pretérita (*se encuentra descontada del precio*) y responden ajustándose a los nuevos e impredecibles flujos de información actual
2) Los incrementos de las variables aleatorias son independientes unos de otros, es decir las distribuciones de probabilidad correspondientes a los incrementos (variaciones) de la variable aleatoria son independientes para los distintos intervalos en consideración $t=0,\ldots.n$. El proceso puede pensarse como el caso continúo límite de un proceso discreto (*random walk*). Por esta propiedad las variaciones en el precio (rendimiento) de las acciones son independientes unas de otras.
3) Los cambios de la variable aleatoria siguen una distribución normal de probabilidad. Esta característica parece un poco restrictiva en el caso de los activos financieros, ya que estos últimos no pueden tener valor negativo siendo su rango de variación desde cero. Por lo dicho, en el caso de las acciones, parece más apropiado asumir que el logaritmo natural del precio sigue un proceso de Wiener.

A partir de sus propiedades, se parte de que si la variable $z(t)$ sigue un comportamiento explicado por el proceso de Wiener, para un cambio en z, de magnitud Δz correspondiente a un intervalo de tiempo Δt se deben satisfacer las siguientes condiciones:

Condición 1. La relación entre Δz y Δt está explicada por la siguiente ecuación:

$$\Delta z = e_t \sqrt{\Delta t} \qquad \textit{Ec 14}$$

donde e_t es una variable aleatoria que sigue una distribución de probabilidad normal con media cero y desvío estándar 1. La variable Δz por consiguiente se encuentra normalmente distribuido con media $E\ (\Delta z) = 0$ y varianza que se incrementa linealmente a medida que aumenta el horizonte de tiempo, $V\,(\Delta z) = \Delta t$.

Condición 2. Los valores de Δz para dos intervalos de tiempos distintos son independientes debido a la inexistencia de correlación serial de la variable aleatoria e_t.

[14] De no sostenerse esta noción, la información histórica tendría valor para efectuar proyecciones por lo que simplemente haciendo uso del análisis técnico se podría predecir el comportamiento futuro de la variable aleatoria.

[15] Norbert Wiener (1894-1964) fue un matemático que planteó en 1923 la teoría matemática del movimiento browniano. El ‘movimiento browniano’ se denomina así por un botánico, Robert Brown, que en 1827 teorizó observando el movimiento errático del polen en el agua. Mucho después, Einstein formuló la explicación matemática, pero fue Wiener quien definió la forma probabilística de este movimiento, con lo cual dio origen al ‘análisis estocástico’.

Una consecuencia de la aplicación de las condiciones 1 y 2 es que la variación de Δz depende de $\sqrt{\Delta t}$ con lo cual la varianza (amplitud) del cambio de la variable aleatoria se incrementa a medida que se incrementa el lapso de tiempo[16], es decir existe un crecimiento proporcional en función al mayor horizonte de proyección. De lo dicho se deriva que estamos frente a un proceso no estacionario, es decir la varianza tiende a valores infinitos a largo plazo. Una aclaración, por largo plazo no se debe entender intervalos de tiempo amplio, en días, meses o años, sino un plazo 'matemáticamente' largo, en un lapso temporal que puede ser 'corto'. Puesto en otras palabras una sucesión infinitamente larga de momentos infinitamente pequeños.

Si Δt tiende a ser infinitesimalmente pequeño tendiendo a cero entonces el proceso se plantea en término de ecuaciones diferenciales,

$$dz = e_t \sqrt{dt} \qquad \text{Ec 15}$$

siendo la media igual a $E(dz)=0$ y la varianza $V(dz)=dt$.

Los precios de las acciones tienden a tener comportamiento explicado por una tendencia distinta de cero y una volatilidad distinta de uno. Una primer generalización partiendo del proceso de Wiener está dada por el Movimiento Browniano Geométrico (*Geometric Brownian Motion*),

$$dx = a\,dt + s\,dz \qquad \text{Ec 16}$$

donde dz es el incremento del proceso de Wiener, a es el parámetro que explica la tendencia que siguen los movimientos y s es el parámetro que explica la varianza de los movimientos.

Para un intervalo de tiempo Δt el movimiento de la variable x, el comportamiento del activo subyacente, sigue una distribución normal de probabilidad con media $e(\Delta x) = a\Delta t$ y varianza $V(\Delta x) = a^2 \Delta t$.

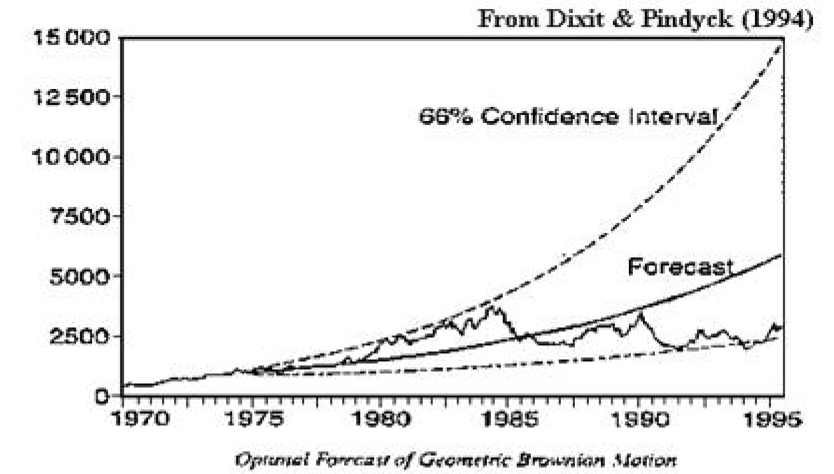
En la ecuación precedente el primer término representa la tendencia (*drift*) y el segundo término representa la desviación de la tendencia o la variabilidad.

Una de las características del proceso de Wiener es que la varianza de la variable crece a medida que se incrementa el horizonte de planeamiento, por lo que el desvío estándar crece en proporción a la raíz cuadrada del horizonte de proyección. También se debe destacar que la para el largo plazo los movimientos de la variable proyectada siguen la tendencia exponencial mientras que en horizontes cortos predomina la volatilidad, comportamiento que se verifica en los movimientos de mercado de los activos financieros. Matemáticamente la explicación reside en el hecho de que la probabilidad de que el valor en un futuro lejano de la variable xt sea menor a xo, $xt < x0$, con una tendencia positiva como podría ser una hipótesis de crecimiento, $a > 0$, es muy poco probable que ocurra en el largo plazo a diferencia de las probabilidades de ocurrencia en el corto plazo, debido a la dominancia de la volatilidad en dicho horizonte temporal, en otros términos para pequeños Δt, $\Delta t^{1/2}$ es mayor que Δt que es lo que determinará el promedio de comportamiento de la variable aleatoria.

En la ilustración 8 se muestra el comportamiento del proceso en un intervalo de confianza del 66%, con el recorrido de la variable aleatoria y el valor proyectado. La proyección comienza a partir de diciembre de 1974 hasta el 2000, tomando como comportamiento histórico el periodo 1950–1974. Al ser un proceso de Markov, para proyectar sólo interesa comenzar con el valor a diciembre de 1974, es decir $x\ 1974 + t = x1974 + 0.016667T$, donde 0.01666 es la tendencia mensual de una tendencia anual de 0.2. La desviación estándar en este ejemplo crece proporcional a la raíz cuadrada del horizonte de tiempo. Para un intervalo de confianza del 66 % para proyecciones de T meses hacia delante se tiene, $x1974 + 0.016667T \pm 0.2887T^{1/2}$.

[16] Que la varianza del proceso continuo tienda a infinito no significa que el precio tienda a infinito. Varianza grande significa que hay una probabilidad, que puede ser pequeña, de que el precio aumente 'mucho'.

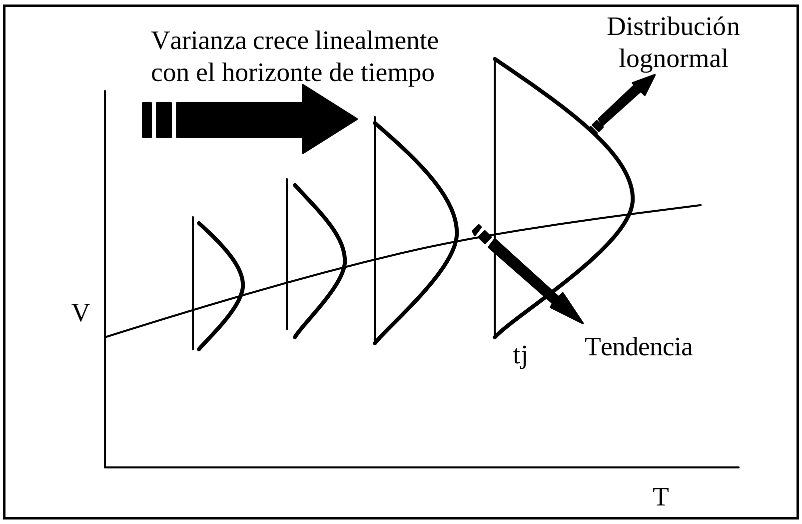
Ilustración 8
Proyección en base a Geometric Brownian Motion



Extraído de Stochastic Processes with Focus in Petroleum Applications http://www.puc-rio.br/marco.ind/main.html. Ejemplo proveniente de Dixit Avinash y Pindick Robert, *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press. 1994 Chp 3

Conforme fue indicado, este proceso posee la característica de que la varianza crece proporcionalmente con el intervalo de tiempo, tal como se observa en la ilustración 9.

Ilustración 9
Crecimiento de la varianza en el tiempo



4.7 Movimiento browniano aritmético (*Arithmetic Brownian motion*)

Si bien la mayoría de las aplicaciones utiliza el movimiento geométrico en algunas situaciones, sobre todo en el caso de opciones reales, es propicio utilizar el movimiento aritmético por la posibilidad que este brinda de trabajar con el logaritmo del valor del proyecto.

Para esto se debe apelar al proceso de Itô[17]; en realidad, es una especificación del proceso browniano simple, considerando el logaritmo de la variable. Itô, en el 1951 proporcionó una solución de la ecuación diferencial estocástica expresada a partir de un movimiento browniano, conocida como la fórmula de Itô, o el 'lema de Itô'.

---

[17] Kiyosi Itô es un matemático japonés, nacido en 1915, que formuló la teoría de las ecuaciones diferenciales estocásticas, a partir de 1942.

Si $\frac{dx}{x} = a\,dt + s\,dz$, siendo $x = \ln(x)$ y usando el lema de Itô se encuentra que x sigue un proceso browniano aritmético. La ecuación que explica los movimientos de la variable aleatoria bajo este proceso es la siguiente,

$$dx = a\left(x,t\right)dt + s\left(x,t\right)dz \qquad Ec\ 17$$

En la ecuación 17 dz es el incremento explicado por el proceso de Wiener, mientras que $a\left(x,t\right)$ y $s\left(x,t\right)$ son parámetros conocidos. Tanto la tendencia como la volatilidad son funciones del factor tiempo y del valor actual del subyacente (*x*=*S*). La media de la ecuación 17 es igual a $e(dx) = a(x,t)$ y la varianza es igual a $V(dx) = s(x,t)$ donde $a(x,t)$ es la tasa de crecimiento instantánea del proceso y $s^2(x,t)$ es la varianza instantánea. El proceso de Îto es una generalización del proceso de Wiener, ya que la pendiente $a(x,t)$ y la varianza $s(x,t)$ son funciones del estado presente y del tiempo.

No es lo mismo hablar de movimiento aritmético que geométrico aunque usualmente son confundidos. Dada que las pendientes no son las mismas, no es equivalente *d(lnx)* que *dx/x*. En realidad la pendiente del movimiento aritmético es inferior al geométrico tal que *d(lnx)< dx/x*.

Una especificación del Movimiento Browniano Aritmético a partir de considerar el logaritmo de la variable y utilizando la transformación de proceso de Îto, para obtener una solución a una ecuación estocástica a partir de un movimiento simple, está dado por el Movimiento Browniano Geométrico (*Geometric Brownian Motion*). Aquí $a\left(x,t\right) = a\,x$ y $s\left(x,t\right) = s\,x$, donde la tendencia y la varianza se mantienen constantes tal que la ecuación 17 se transforma en,

$$dx = a\,xdt + s\,xdz \qquad Ec\ 18$$

En el Movimiento Browniano Simple la distribución de probabilidad que sigue la variable aleatoria x es normal, en el Movimiento Browniano Geométrico la variable sigue una distribución de probabilidad lognormal, con lo cual se dota de mayor realismo[18] al proceso estocástico a la hora de explicar el comportamiento de los precios de los títulos. El valor esperado de xt está dado por $e(x_t) = x_0 \ell^{a t}$ y la varianza de xt está explicada por $V(x_t) = x_0{}^2 \ell^{2at}\left(\ell^{2at} - 1\right)$

El valor esperado que surge de la distribución de probabilidad de la ecuación 18 es utilizado en el campo de valoración de pagos contingentes o CCA (*contingent claim analysis*) que siguen un proceso estocástico como el estudiado, con el fin de calcular el valor actual del flujo generado por la variable aleatoria xt. La versión integral de la ecuación 18 está explicada en la ecuación 19

$$e\left[\int_0^{\infty} x(t)\ell^{rt}dt\right] = \int_0^{\infty} x_0 \ell^{-(r-a)t}dt = x_0/(r-a) \qquad Ec\ 19$$

donde r es la tasa de actualización, a la tasa de crecimiento y x_0 el estado actual de la variable aleatoria (activo financiero).

Los títulos tienen un comportamiento que puede ser ajustado a la explicación dada por el presente proceso estocástico. Otra manera de exponer la ecuación 18, correspondiente al Movimiento Geométrico es plantearla en términos de diferenciales

$$\frac{dx}{x} = a\,dt + s\,dz \qquad Ec\ 20$$

[18] Como fue expresado una de las características de las acciones es que su valor (precio) no puede ser negativo y tiene crecimiento sin techo. La distribución de probabilidad normal no podría describir fielmente el comportamiento de los precios de los títulos.

Como fue expuesto a y s son constantes (tanto la tasa instantánea de rendimiento como la volatilidad de los rendimientos) y *dz* es el diferencial del proceso de Wiener (con media igual a cero y varianza igual a 1). Al suponerse constante en el tiempo el rendimiento del título, debido a que la variable x se incrementa en una proporción a, el rendimiento total esperado para un intervalo Δt es igual al producto entre la pendiente y la variación temporal $a x \Delta t$, siendo x la variable aleatoria o el activo subyacente.

4.8 Proyección de variables, simulación y comparación entre la simulación real versus la neutral al riesgo

Para la proyección de la variable bajo estudio se pueden obtener los datos de la serie pasada con el fin de trabajar con la pendiente histórica y la volatilidad. Si x es la variable a través del logaritmo natural de x se puede inferir la pendiente en virtud a que $\ln(x)_t - \ln(x)_{t-1} = (a - 1/2s^2)$, siendo el promedio aritmético de las diferencias la pendiente. El desvío se calcula a partir de las diferencias, o sea la desviación estándar de $\ln(x)_t - \ln(x)_{t-1}$[19].

La proyección de los valores implica que la variable x sigue un proceso lognormal en el tiempo con los siguientes parámetros,

$$E(x)_t = x_0 E(a_t) \qquad Ec\ 21$$

Y la desviación estándar es,

$$s = x_0 E(a_t)\left[E(a^2_t) - 1\right]^{1/2} \qquad Ec\ 22$$

Mediante la correspondiente proyección de la variable se define el intervalo de confianza con el cuál se operará[20].

Si se opta por simular el comportamiento de la variable, siguiendo un Movimiento Browniano Geométrico, la mejor opción es utilizar el logaritmo de la variable *ln(x)* el cuál sigue un Movimiento Browniano Aritmético donde la ecuación se plantea como

$$\ln(x)_t = \ln(x)_0 + (a - 1/2s^2)t + s^{1/2}e \qquad Ec\ 23$$

donde e es la distribución normal de probabilidad. La simulación se realiza para distintos valores de la distribución normal con el fin de obtener distintos valores de *ln(x)*

En el caso de la simulación está se puede realizar trabajando con riesgo real o riesgo neutral. La principal diferencia surge del cómputo de la pendiente de la variable aleatoria. En el supuesto de riesgo real, siguiendo un Movimiento Browniano Geométrico, la pendiente que se toma es a y el precio en el momento t es dado por $x_t = x_0 E\left[(a - 1/2s^2)dt + s\, dt^{1/2} e\right]$. El proceso de actualización implica que se debe utilizar una tasa ajustada por riesgo para actualizar x_t.

De trabajar con una simulación neutral al riesgo se emplea una pendiente neutral al riesgo, lo que implica que a la pendiente anterior se le descuenta el premio por riesgo no diversificable siendo la pendiente igual a,

$$r - d \qquad Ec\ 24$$

---

[19] Una pregunta a resolver desde el punto de vista estadístico es la cantidad de datos a computar en la muestra. Para la pendiente, el mejor estimador con menor varianza, está dado por la amplitud del intervalo que se muestrea mientras que para la volatilidad importa el número de observaciones.

[20] Como describe el autor, en los trabajos empíricos uno de los escollos se encuentra en la irregularidad en los que respecta a frecuencia de los datos. La ventaja de trabajar con procesos estocásticos continuos es que permite la utilización de las series irregulares.

donde $a - l s = r - d$, y l es el adicional por riesgo de mercado del activo subyacente respondiendo a la lógica del CAPM (*capital asset pricing model*) (ver Trigeorgis, 1997).

La estructura de la tasa de actualización correspondiente al activo subyacente es

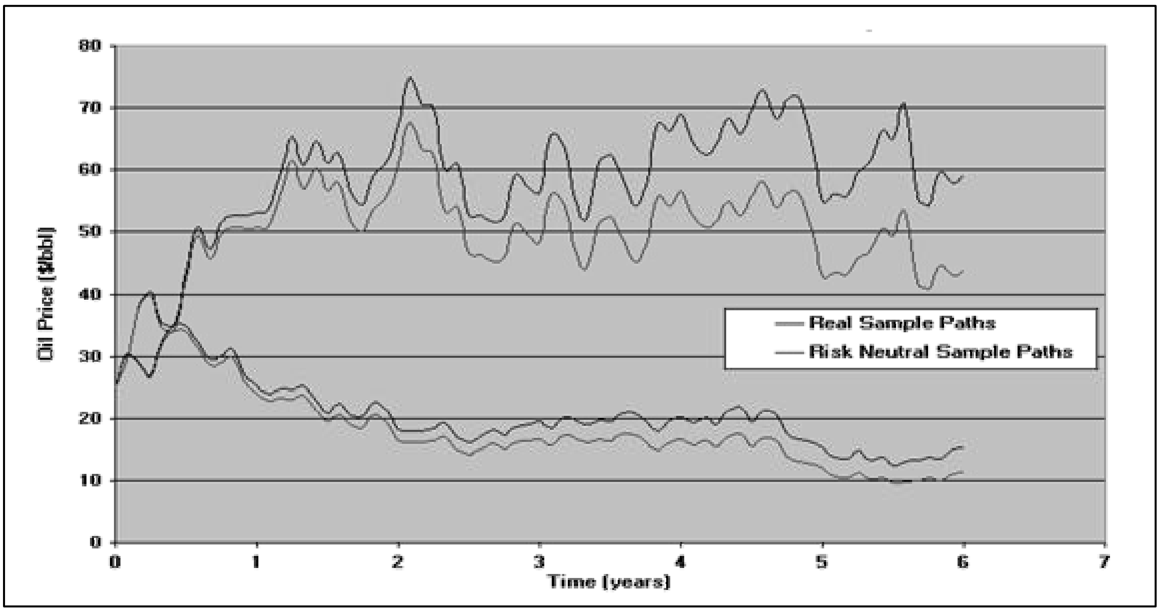
$$m = a + d = r + l s \qquad Ec\ 25$$

Al variar la pendiente la ecuación queda planteada de la siguiente manera,

$$x_t = x_0 E\left[((r-d)-1/2s^{\,2})dt + s\, dt^{1/2} e\right] \qquad Ec\ 26$$

La tasa de actualización empleada es el tipo libre de riesgo. En el gráfico de la ilustración 10 se exponen dos recorridos simulados de la variable aleatoria utilizando la pendiente completa y la simulación neutral al riesgo. Los recorridos son paralelos, la única diferencia está en la pendiente siendo la simulación neutral al riesgo menor a la simulación con riesgo en una magnitud igual al premio por riesgo de mercado del subyacente.

Ilustración 10. Simulaciones Risk neutral vs real: Dos trayectorias



Extraído de Stochastic Processes with Focus in Petroleum Applicationshttp://www.puc-rio.br/marco.ind/main.html.

4.9 Proceso de reversión a la media[21] (*Mean Reversion process*)

Se sostiene que para algunas clases de subyacentes como son los commodities y tasas de interés los procesos de reversión a la media tienen describen mejor el comportamiento de los activos mencionados que el clásico modelo de Movimiento Browniano Geométrico.

La ecuación básica de este proceso es la siguiente,

$$dx = h x(M - x)dt + s\, xdz \qquad Ec\ 27$$

Los nuevos elementos introducidos en relación al Movimiento Browniano Geométrico son M variable que representa el precio a largo plazo de equilibrio del activo (en la lógica del proceso estocástico el precio al cuál se tiende a revertir) y h la velocidad de reversión.

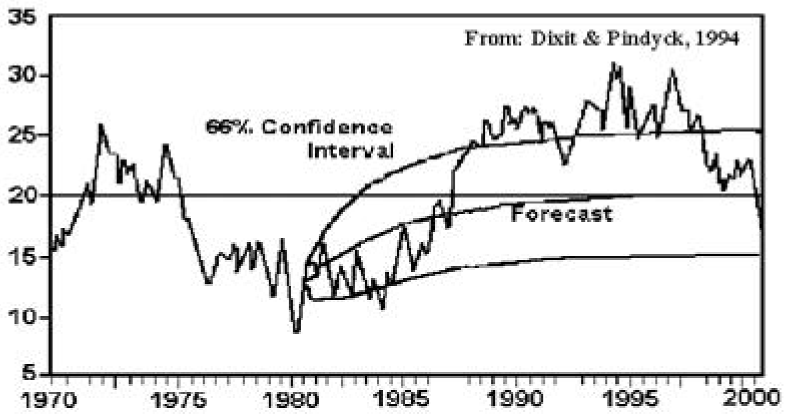
[21] En la literatura se pueden encontrar diversas modalidades derivadas del presente proceso como el proceso *Geométrico Ornstein–Uhlenbeck o Dixit & Pindick Process.* Para un mayor detalle, ver Stochastic Processes with Focus in Petroleum Applicationshttp://www.puc-rio.br/marco.ind/main.html.

La diferencia entre los procesos de reversión a la media y los brownianos geométricos reside en la pendiente, ya que en el primer caso puede ser positiva o negativa dependiendo de si el precio corriente del subyacente x es superior o inferior a la media M, siendo positiva si $x < M$ y negativa si $x > M$. La idea que subyace es que los precios tienden o revierten a la media, o sea al nivel de equilibrio.

Dentro de estos modelos, el de mayor difusión es el de Ornstein-Uhlenbeck[22], tratando de reconciliar algunos comportamientos supuestos por el proceso de Wiener con las realidades físicas. En el campo de las opciones estas realidades tienen que ver con aquellas situaciones donde dada la estructura del mercado y como consecuencia de los mecanismos de oferta y demanda, los precios se ajustan a niveles de equilibrio. De allí su gran utilidad sobre todo en el campo de los commodities.

En la ilustración 11 se muestra un proceso de reversión a la media de los precios del petróleo, con un intervalo de confianza del 66% y los valores proyectados tendientes a la media de equilibrio.

Ilustración 11
Proceso de reversión a la media



Extraído de Stochastic Processes with Focus in Petroleum Applications http://www.puc-rio.br/marco.ind/main.html. Ejemplo proveniente de Dixit Avinash y Pindick Robert, *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press. 1994 Chp 3

Los procesos de reversión a la media, si bien son procesos lognormales de difusión la varianza, a diferencia del Movimiento Browniano Geométrico, no crece en proporción al intervalo de tiempo. Esta crece al comienzo y luego se estabiliza en un valor cierto en virtud al efecto de ajuste o reversión a la media. En las siguientes ilustraciones se expone el comportamiento positivo y negativo de la pendiente dependiendo de los valores de equilibrio y el precio de la variable.

Los procesos de reversión a la media son utilizados preferentemente para describir el comportamiento de los commodities. En teoría el precio de los commodities debe converger, en el largo plazo, al costo marginal de producción.

4.10 Proceso de Poisson (*Poisson process*)

Estos procesos estocásticos se caracterizan por mediciones continuas generadas a partir de movimientos en un punto dado, los cuales son independientes y tienen idéntica distribución de probabilidad, siendo los procesos conocidos bajo el nombre de procesos de punto (*point process*). Uno de clásicos procesos en este grupo está dado por el proceso de Poisson (*Poisson process*) el cuál en la literatura financiera es conocido como procesos de salto (*jump process*). Las características del proceso de Poisson son:

---

[22] El nombre del modelo surge del trabajo publicado por Uhlenbeck G and Ornstein L, On the Theory Of Brownian Motion, *Physical Review*, volumen 36 1930.

Ilustración 12
Reversión a la media con 'precios bajos' del subyacente

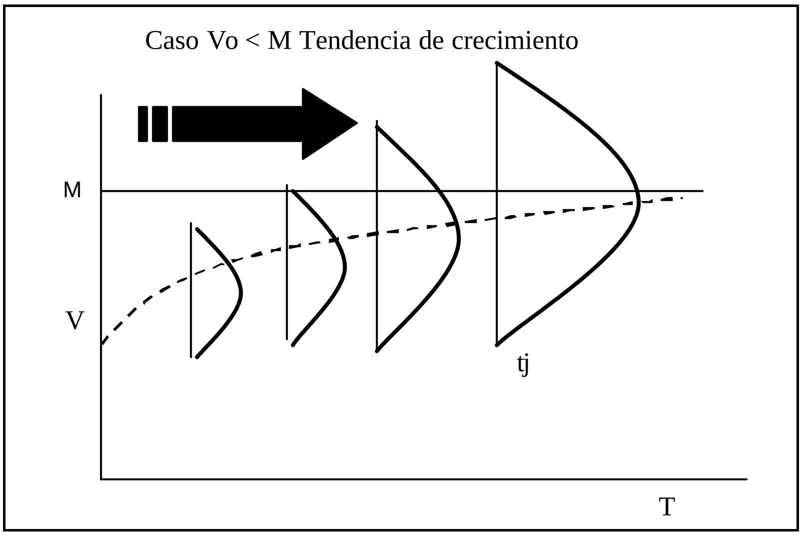
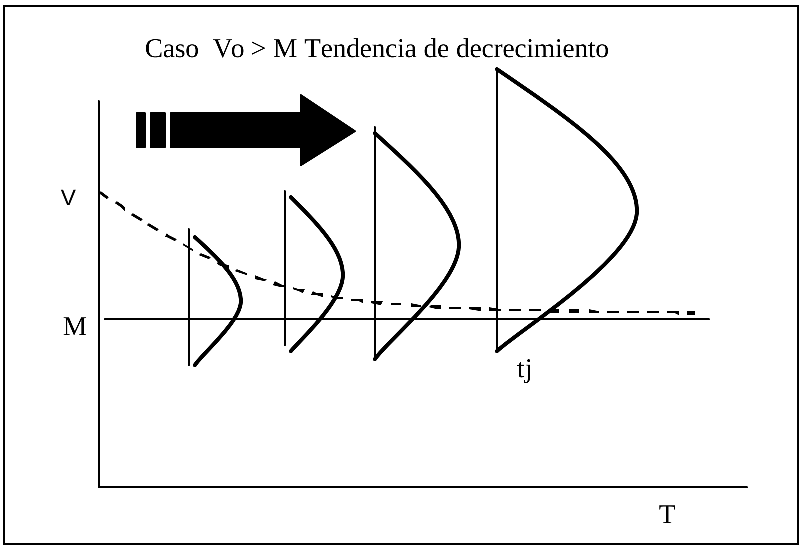


Ilustración 13
Reversión a la media con 'precios altos' del subyacente



1) En $t=0$ no hay saltos, es decir el número de saltos en $t=0$ es cero.
2) Los incrementos son independientes y estacionarios.
3) Para $t > 0$ la probabilidad de ocurrencia de n saltos hasta el momento t es, $P[N(t)=n]=(1/n)(l\,t)^n \ell^{-lt}$ *para* $n= 0,1,2,\ldots$.

La curiosidad de este proceso es tiende a tener una distribución normal en la medida que l tiende a infinito.

Uno de los procesos de Poisson de mayor utilización en finanzas es el conocido proceso Gaussiano-Poisson (*Poisson-Gaussian Process o jump-diffusion process*) Los saltos son denominados eventos y la tasa media de generación de eventos es denotada con el símbolo l, durante un intervalo temporal *dt*. La probabilidad de que un evento ocurra está dada por $l\,dt$ y la probabilidad de que un evento no ocurra está explicada por el complemento 1- $l\,dt$. El evento tiene una amplitud de salto del tamaño *k*, los cuales son aleatorios. Si p denota un proceso de Poisson, entonces se tiene que

$$dp = \begin{cases} 0 \text{ con probabilidad } 1- l\,dt \\ k \text{ con probabilidad } l\,dt \end{cases}$$

Realizando la transformación mediante el empleo del proceso de ecuaciones diferenciales de Îto se tiene la siguiente ecuación,

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz + x(k-1)dp \qquad Ec\ 28$$

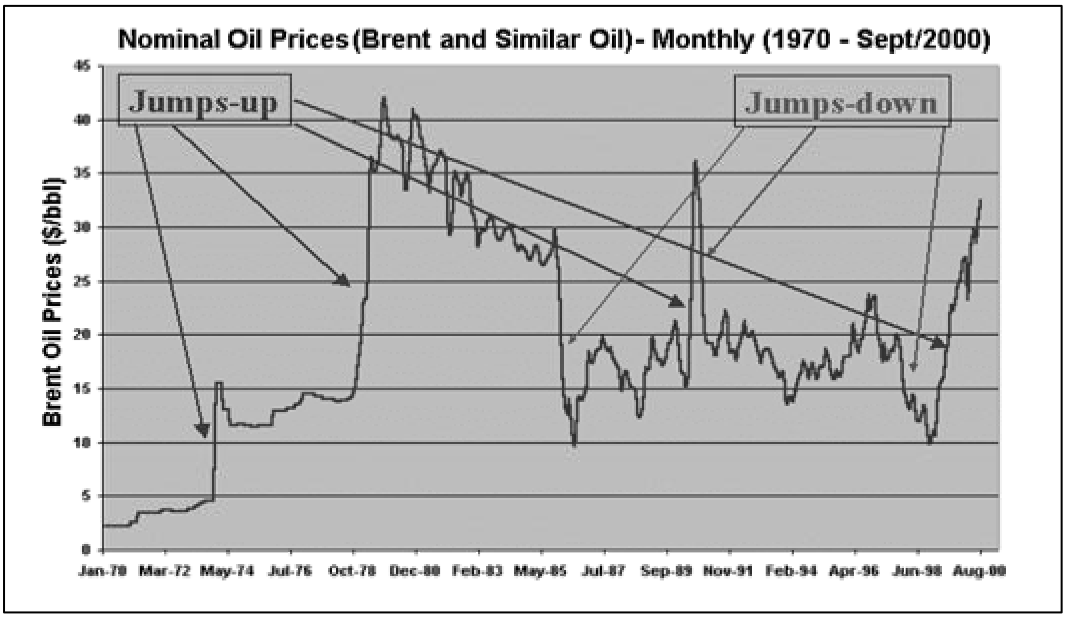
donde, $a(x,t)dt$ es la pendiente que puede adoptar el formato de αx si sigue un Movimiento Browniano Geométrico o puede tener un formato $h(M-x)$ si sigue un proceso de reversión a la media; y $b(x,t) = \sigma x$.

La ecuación estocástica del Movimiento Browniano Geométrico con saltos, en la versión logarítmica queda planteada como

$$d(\ln x) = (\alpha - 1/2\sigma^2)dt + \sigma dz + \ln(k)dp \qquad Ec\ 29$$

El gráfico 14 expone el comportamiento de un activo el cuál es modelizado por un proceso de Poisson (discreto) con reversión a la media (continuo).

Ilustración 14: Movimientos del precio del petróleo



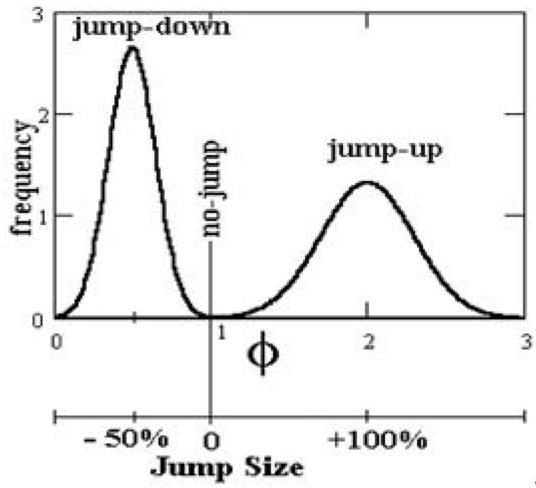
Extraído de Stochastic Processes with Focus in Petroleum Applicationshttp://www.puc-rio.br/marco.ind/main.html.

Los modelos *jump-diffusion* pueden utilizarse como herramienta para explicar los cambios en el precio del subyacente debido al arribo de nueva información. Existen dos tipos de información, la información normal que generan suaves movimientos y los eventos extraordinarios o anormales, que son los que originan los saltos en los precios. Los suaves movimientos del subyacente pueden modelarse con procesos continuos como un proceso de reversión a la media o browniano geométrico (continuo), los saltos son explicados por un proceso de Poisson (discreto).

En el gráfico 15 se presenta las probabilidades de ocurrencia de los saltos ascendentes y descendentes.

La ventaja del proceso estocástico de Poisson es que describe con mayor precisión el comportamiento de la variable aleatoria y tiene mayor fortaleza que los procesos que asumen un comportamiento normal o lognormal de la variable debido a que toma en cuenta la asimetría y los movimientos anormales o extraordinarios que se presentan en la mayoría de los subyacente como consecuencia de la incorporación de información extraordinaria.

Ilustración 15
Probabilidad de ocurrencia y amplitud de los saltos



Extraído de Stochastic Processes with Focus in Petroleum Applications
http://www.puc -rio.br/marco.ind/main.html

En el marco de la teoría de las opciones el inconveniente que presenta está dado en la estimación de sus parámetros (magnitud del salto) y la construcción de una cartera sin riesgo. A diferencia del modelo de Black y Scholes para valuar flujos contingentes (*contingent claims analysis)* el cuál supone que el subyacente sigue un comportamiento continuo del tipo browniano geométrico, en el presente proceso se está frente a la dificultad de construir la cartera sin riesgo. El segundo problema se centra en la estimación de los parámetros ya que por lo general es difícil estimar la ley que explica el tamaño y la distribución asociada al salto, no obstante existen distintas técnicas de simulación para la estimación de los mismos[23]

4.11 Procesos estocásticos discretos

Los procesos estocásticos discretos se caracterizan por el hecho de que la variable aleatoria toma valores probables para momentos de tiempo determinados.

Si x es la variable bajo estudio, x_t serán los valores que adopte en cada intervalo de tiempo *t*, donde su recorrido comienza con un valor conocido para x_0 con t =0. Para cada intervalo t=1,2,3…, la variable x_t varía incrementando o disminuyendo su valor con una probabilidad de ocurrencia asociada.

Al ser cada una de las variaciones independientes una de otras se puede describir el recorrido de la variable aleatoria mediante la siguiente ecuación,

$$x_t = x_{t-1} + e_t \qquad \textit{Ec 30}$$

donde e_t es una variable aleatoria con distribución de probabilidad e_t *= 1/2* para incrementos de la variable y e_t *= 1/2* para decrementos.

La distribución de probabilidad que sigue x_t es conocida como distribución binomial. La expresión general para *n* decrementos y *t-n* aumentos de la variable aleatoria es,

$$\binom{t}{n} 2^{-t} \qquad \textit{Ec 31}$$

Otra forma de generalizar el proceso es definir a *p* como la probabilidad de éxitos y *q = (1-p)* la probabilidad de fracasos. Con probabilidad de éxitos mayores a los fracasos, *p > q,* al mo-

[23] Para un mayor desarrollo del tema ver *Stochastic Processes with Focus in Petroleum Applications* en http://www.puc-rio.br/marco.ind/main.html.

mento t = 0 el valor esperado de x_t para $t > 0$ es superior que cero y se incrementa a medida que se incrementan los periodos, en dicho caso se tiene una variable aleatoria discreta con tendencia (*random walk hit drif*).

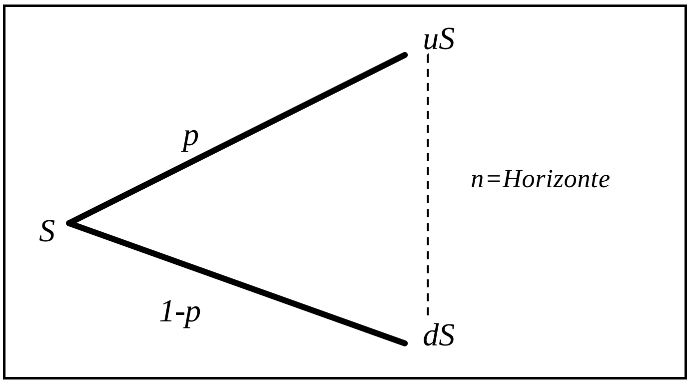
5. EL MODELO BINOMIAL

5.1 El modelo Binomial[24]

Desarrollado por Cox, Ross y Rubinstein (1979) se encuadra dentro de aquellos procesos estocásticos donde la variable aleatoria sigue un comportamiento discreto puro, no estacionario y conserva la propiedad de Markov, es decir el valor futuro probable surge del valor corriente. El mecanismo de valoración se basa en el modelo de carteras réplicas explicado precedentemente en el punto 1.

El principio general relacionado con el comportamiento de la variable aleatoria indicado en el punto 2 como continuo, ahora toma la forma de binomial donde el precio de la acción S al comienzo de un periodo determinado puede incrementarse mediante un factor multiplicativo u con probabilidad de ocurrencia al valor uS, o bien puede disminuir a razón de d con probabilidad de ocurrencia q[25] al valor dS al final del periodo.

Ilustración 16
Posibles movimientos de la acción con distribución de probabilidad binomial



Se puede considerar que u y d representan la tasa de rendimiento del activo la cual resultará del movimiento ascendente o descendente del mismo, donde $d = 1/u$.

5.2 Derivación del modelo:

Siguiendo a Trigeorgis L (1996) se deriva el modelo binomial de valuación de opciones. Si $S^+ \equiv uS$ y $S^- \equiv dS$ en donde $d = 1/u$ se pueden reescribir los valores resultantes en términos de rendimiento tal que,

$$u \equiv \frac{S^+}{S} = 1 + R^+ \qquad Ec\,32$$

donde R^+ es el rendimiento obtenido en el supuesto de un aumento en el valor de la acción.

$$d \equiv \frac{S^-}{S} = 1 + R^- \qquad Ec\,33$$

donde R^- es la pérdida en términos porcentuales obtenida en el supuesto de un decremento en el valor de la acción.

---

[24] Un desarrollo del modelo binomial y trinomial se puede encontrar en Neuman y Zanor (2005).

[25] La probabilidad de fracasos q es el complemento de la probabilidad de éxitos p tal que $q = (1\text{-}p)$.

Reemplazando las expresiones de las ecuaciones 34 y 35 en la ecuación 1 (planteada en el punto 1.2) donde se calcula la cantidad de acciones a comprar para replicar el derivado, en la ecuación 2 donde se calcula la inversión en activo libre de riesgo (el apalancamiento de la operación) y en la ecuación 3 donde se replica el valor de una opción de compra mediante la combinación de las posiciones contenidas en las ecuaciones 1 y 2 se tiene

$$N = \frac{C^{+} - C^{-}}{(u-d)S} \qquad Ec\ 1´$$

$$B = \frac{dC^{+} - uC^{-}}{(u-d)(1+r)} \qquad Ec\ 2´$$

$$C = \frac{pC^{+} + (1-p)C^{-}}{1+r} \qquad Ec\ 3´$$

La ecuación 4 que expresada de la siguiente manera,

$$p = \frac{(1+r)-d}{u-d} \qquad Ec\ 4´$$

y el complemento es

$$1-p = \frac{u-(1+r)}{u-d} \qquad Ec\ 4”$$

Una aclaración respecto de los valores de *u* y *d*. El multiplicador *d* debe ser menor a 1 y mayor a 0 a los efectos de asegurar siempre que el valor del subyacente no caiga por debajo e cero. Para *n* periodos $\lim_{n\to\infty} d^n = 0, 0 \leq d \leq 1$. En el caso del multiplicador *u* no habría límite.

Valgan aquí algunas aclaraciones conceptuales sobre un tema que trae consigo algo de confusión. Los inversores, frente a mercados eficientes y completos, se suponen con la habilidad de construir carteras libre de riesgo que replican el valor de la opción. De allí que la valuación de la opción se realiza suponiendo que se está en un *mundo neutral al riesgo* donde los flujos de fondos son actualizados al tipo libre de riesgo, más no debe confundirse esta neutralidad frente al riesgo con la *indiferencia del inversor frente al riesgo*; los inversores son por naturaleza adversos al riesgo, sin perjuicio que mediante las estrategias de cobertura, en mercados completos, puedan anularlo por completo.

El ratio de probabilidad equivalente a certidumbre está dado por *p* el cual es menor igual a 1 y mayor igual a 0, $0 \leq p \leq 1$. El rendimiento esperado del activo subyacente y de la opción en un *mundo neutral al riesgo* es igual al tipo sin riesgo *r*. En equilibrio se obtiene el precio de la opción mediante el cálculo de sus valores esperados utilizando el ratio *p* y actualizando al tipo libre de riesgo.

Si $(1+r)S = puS + (1-p)dS$, resolviendo para *q* se tiene,

$$p = \frac{(1+r)-d}{u-d} \qquad Ec\ 34$$

5.3 Las carteras de cobertura y su ‘rebalanceo’: El delta de una opción en el enfoque binomial

El delta de una opción es la razón entre el cambio de precio de la opción y el cambio de precio del activo subyacente. Como oportunamente fue indicado el delta de una opción de compra es igual a $N = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$ y el delta de una opción de venta es igual a $N = \frac{P_u - P_d}{S_d - S_u}$ dadas las características del perfil riesgo-rendimiento del instrumento.

Al variar continuamente el precio del activo con el fin de mantener la posición de cobertura, mediante el uso de acciones y opciones, se debe balancear de manera periódica la cartera[26]. El rebalanceo para el modelo binomial puede ilustrarse con el siguiente de la siguiente manera:

En t_0, se tienen N_0 acciones a un precio S_0, tal que la cobertura es igual a $N_0 S_0 - B_0 (1+rf)^{-t}$

En t_1, se tiene $N_1 = \frac{C_{1u} - C_{1d}}{S_{1u} - S_{1d}}$ acciones a un precio S_1, tal que la cobertura es igual a $N_1 S_1 - B_1 (1+rf)^{-t}$.

Se puede extender la ecuación a *n* periodos tal que en *n*, se tiene $N_n = \frac{C_{nu} - C_{nd}}{S_{nu} - S_{nd}}$ acciones a un precio S_n, tal que la cobertura es igual a $N_n S_n - B_n (1+rf)^{-t}$

5.4 El modelo binomial: un caso de aplicación para dos periodos

Supóngase una acción cuyo valor actual asciende a \$10 y tiene una probabilidad del 50% de un movimiento ascendente, tal que p = 50% y su complemento *1-p* = 50% siendo el factor multiplicativo de ascenso u = 1,2 y el descenso d = 0,6. El tipo libre de riesgo r = 10% periódico. En el supuesto que el horizonte fuese de dos periodos el recorrido de la acción sería el que se muestra en la ilustración 17.

Si el precio de ejercicio pactado es igual a \$11, tal que X = \$11 valuando desde el horizonte hasta el momento *t0*, el valor que adopta la opción de compra se presenta en la ilustración 18.

Utilizando las ecuaciones 3´ y 4´ se procede a calcular el valor de la opción de compra.

Comenzando por la rama superior tenemos que el valor de *cu* para el periodo dos es igual a $C = \frac{pC^{+} + (1-p)C^{-}}{1+r}$, siendo $p = \frac{(1+r)-d}{u-d}$ y $1-p = \frac{u-(1+r)}{u-d}$ donde los escenarios que se toman en consideración son cu^2 y cdu:

$$cu = \frac{\left[\left(\frac{1.1-0.6}{1.2-0.6}\right)\$3.4 + \left(\frac{1.2-1.1}{1.2-0.6}\right)\$0\right]}{1.1}, \; cu = \frac{\left[(0.833)\$3.4 + (0.166)\$0\right]}{1.1} = \$2.575$$

Para el extremo inferior *cd* la opción de compra carece de valor, en este caso se deben hacer jugar los escenarios *cud* y cd^2,

$$cd = \frac{\left[\left(\frac{1.1-0.6}{1.2-0.6}\right)\$0 + \left(\frac{1.2-1.1}{1.2-0.6}\right)\$0\right]}{1.1}, \; cd = \frac{\left[(0.833)\$0 + (0.166)\$0\right]}{1.1} = \$0$$

Finalmente el valor de la opción en *c0* es igual a

$$c = \frac{\left[\left(\frac{1.1-0.6}{1.2-0.6}\right)\$2.575 + \left(\frac{1.2-1.1}{1.2-0.6}\right)\$0\right]}{1.1}, \; c = \frac{\left[(0.833)\$2.575 + (0.166)\$0\right]}{1.1} = \$1.944$$

[26] Dicho procedimiento es conocido como *hedging*, proveniente de *hedge* (cobertura).

Ilustración 17: Recorrido del precio de la acción con proceso estadístico binomial para dos periodos

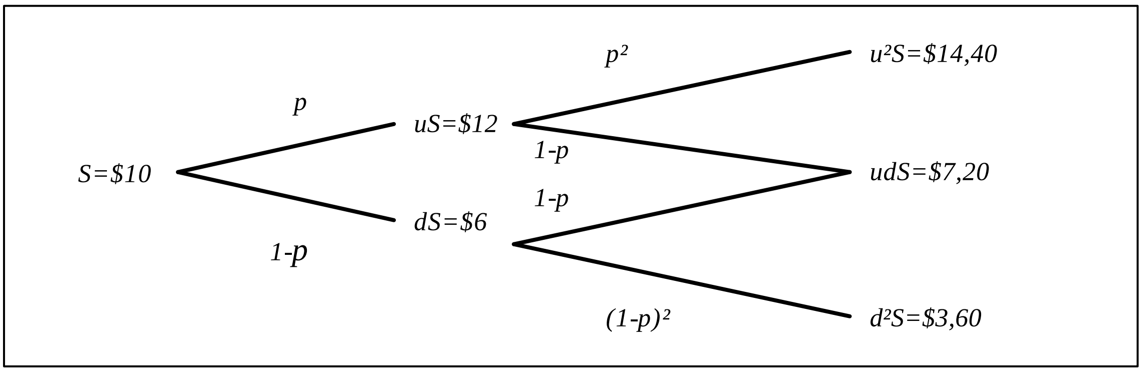
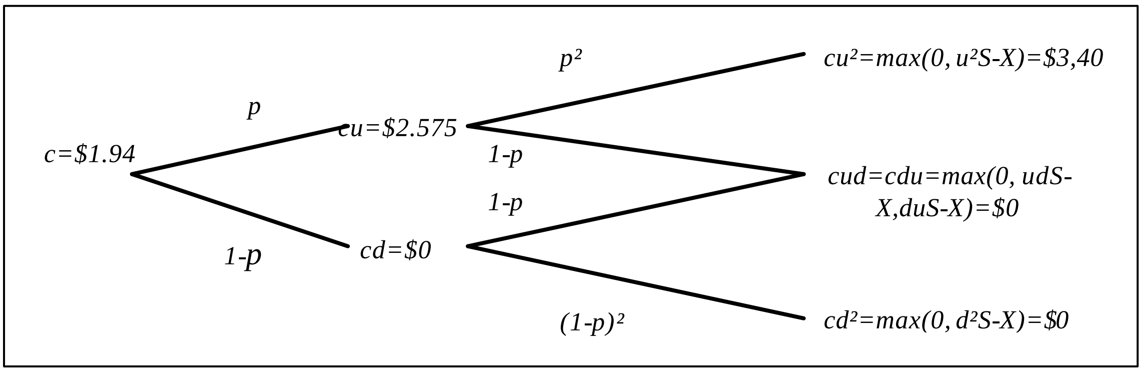


Ilustración 18: Distribución binomial para una opción de compra en dos periodos



La cobertura para el periodo 1 nos indica que se deben comprar 0.42833 acciones, esto surge directamente de aplicar la ecuación 1´,

$$N = \frac{C^+ - C^-}{(u-d)S} \quad \frac{\$2.57 - 0}{\$10(1.2 - 0.6)} = 0.42833$$

La cantidad de activo libre de riesgo a adquirir al vencimiento es igual a B, que surge de la ecuación 2´,

$$B = \frac{dC^+ - uC^-}{(u-d)(1+r)}, \ \frac{0.6\$2.57 - 1.2\$0}{(1.2-0.6)(1+0.1)} = \$2.3363$$

El valor de la opción de compra en el supuesto de ascenso y descenso del valor de la acción para al vencimiento del periodo 1 es igual a

$$NS^+ - (1+r)B = cu, \ \$12(0.42833) - (1.1)\$2.3363 = \$2.57$$

$$NS^- - (1+r)B = cd, \ \$6(0.42833) - (1.1)\$2.3363 = \$0$$

Al trabajar con el concepto de *equivalente a certeza* y cartera réplicas es interesante, en este ejemplo, saber cual es el valor y composición de la cartera sin riesgo. Está se integrará por una determinada cantidad de opciones de compra que deben mantenerse para cubrir la riqueza del inversor ante un eventual variación en el precio del subyacente. Si establecemos que m indica la cantidad de opciones de compra a invertir entonces se puede exponer la siguiente igualdad mediante el uso de carteras equivalentes,

$$uS - mcu = dS - mcd \qquad Ec\ 35$$

Despejando en función de la cantidad de opciones se tiene,

$$m = \frac{S(u-d)}{cu-cd} \qquad Ec\,36$$

Aplicando las ecuaciones 19 y 20 se tiene que la cantidad de opciones a mantener a los efectos de generar una cobertura es igual a $\frac{\$10(1.2-0.6)}{\$2.57-\$0} = 2.33$ opciones de compra.

El flujo de efectivo que genera la cartera se calcula en el cuadro 4

Cuadro 4. Flujo de efectivo de la cartera de cobertura en el periodo 1

Estado de la naturaleza	*Cartera de cobertura*	*Flujo de Fondos*
Favorable	*uS – mcu=FF*	\$12 – (2.33)\$2.57 = \$6
Desfavorable	*dS – mcd=FF*	\$6 – (2.33)\$0 = \$6

Al estar en un escenario sin riesgo el rendimiento de la opción debe ser igual al tipo libre de riesgo tal que el valor de la cartera sin riesgo en el momento *t0* es igual a
$S - mc = \$10 - (2.33)\$1.94 = \$5.48$

El cociente entre el flujo de fondos de la cartera al vencimiento y el valor de la misma al inicio debe ser equivalente al tipo sin riesgo,

$$\frac{Su-mcu}{S-mc} = \frac{\$12-(2.33)\$2.57}{\$10-(2.33)\$1.94} = 1.1 = 1+r$$

En el ejemplo se puede observar que el comportamiento de las opciones tiene características singulares, que en el marco del tratamiento del riesgo sirven de fundamento en contraposición al tratamiento tradicional otorgado por los modelos de equilibrio[27] tales como:

1) Las actitudes de los inversores frente al riesgo es irrelevante para derivar las ecuaciones de valoración de opciones. El único supuesto que se debe verificar es que el inversor pretende acumular más riqueza a menos.
2) La única variable aleatoria de la cual depende el valor de la opción está dada por el comportamiento del activo subyacente. El valor del activo financiero derivado no depende de la existencia de una *cartera de mercado.* Lo que existe es una cartera conformada por el título y su complemento de inversión o préstamo sin riesgo, y que debe ajustarse, conforme fue explicado, para mantener la posición protegida de riesgo. En definitiva es una cartera de arbitraje.

En el caso de que el modelo binomial de valuación de opciones se extienda para dos periodos como en el ejemplo expuesto, la ecuación 3´ que desarrollada de la siguiente manera

$$c = \frac{\left[p^2 c_{uu} + p(1-p)c_{ud} + (1-p)pc_{du} + (1-p)^2 c_{dd}\right]}{(1+r)^2} \qquad Ec\,37$$

Siguiendo la distribución binomial se está frente a un binomio cuadrado perfecto que resulta ser una expansión de la ecuación 3´. Los posibles valores de la opción de compra después de dos periodos son iguales a los términos entre corchetes, *cuu, cud. cdu* y *cdd.* En definitiva el valor de

---

[27] Modelos como el CAPM y sus derivaciones parten de rígidos supuestos objetivos y subjetivos a los efectos de establecer el esquema de equilibrio general que demanda su aplicación. El APT, si bien morigera los supuestos del equilibrio aún a nivel de teoría no ha podido demostrar y establecer cuales son los factores explicativos de los rendimientos de los activos financieros. Estas situaciones son las que dan lugar a un nuevo campo en materia de valuación utilizando los principios de la Teoría de las Opciones Financieras como base de los modelos de valuación mediante el uso de Opciones Reales.

la opción de compra es igual a la suma de los valores esperados al cabo de los dos periodos, donde este último tiene en equilibrio probabilidad de ocurrencia *p* y *1 – p*, descontados al tipo libre de riesgo.

5.5 Generalización para n periodos

El modelo binomial puede ser extendido para varios periodos. En este caso, el plazo *t* es subdivido en *n* intervalos de similar longitud cada uno denominado *h* tal que *h = t/n*. El proceso de valuación es el mismo que el indicado precedentemente, es decir se debe comenzar desde el final mediante el uso de carteras réplicas hasta llegar al valor de la opción de compra en el momento *h0*.

La ecuación general para *n* periodos se encuentra definida por la siguiente expresión,

$$c = \frac{\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \max(u^j, d^{n-j}, S-E, 0)}{(1+r)^n} \qquad Ec\,38$$

La primera parte de la ecuación 23, $\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j}$ es la distribución binomial indicando la probabilidad de que el activo subyacente S tenga j movimientos ascendentes y n-j descensos con probabilidad de ocurrencia p en n periodos. La segunda parte del denominador $\max(u^j, d^{n-j}, S-E, 0)$ indica el valor de la opción al vencimiento, valor condicionado a los j movimiento ascendentes de amplitud *u%* y *n-j* movimientos descendentes de cuantía *d%*.

La sumatoria de todos los probables valores desde 0 hasta *n* multiplicado por su probabilidad de ocurrencia, descontados al tipo libre de riesgo desde el horizonte hasta el momento de valuación, $(1+r)^{-n}$, dan el valor de la opción de compra.

5.6 Los árboles trinomiales

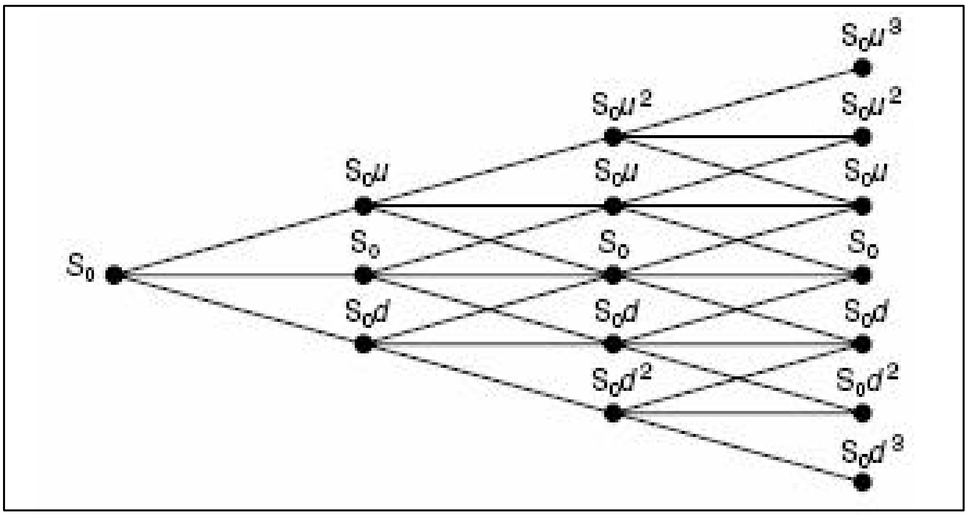
El árbol trinomial es similar al binomial, la característica es que existen tres posibilidades en cada caso (alta, media, baja). Existen diversas posibilidades de estimar las variaciones y las probabilidades de ocurrencia asociadas. La ventaja del árbol trinomial en relación al binomial es que el primero genera mayor cantidad de nodos y por lo tanto sus valores tienden a acercarse más al caso continuo. Siguiendo a Luenberger D (1998), Hull J (2005) y Num J (2005) los árboles trinomiales no reemplazan a los binomiales debido a que es imposible replicar tres flujos de fondos utilizando solamente dos activos en la conformación de la cartera réplica: el subyacente y el libre de riesgo. Los árboles trinomiales sirven como estructura alternativa en los procesos de valoración pero no como base en el marco de la teoría de las opciones. Por lo expuesto la única razón de usar árboles trinomiales es meramente perfeccionar el resultado obtenido con un proceso binomial.

Los parámetros son los mismos que en el proceso binomial, *u* (alza) y *d* (baja) siendo:

$$u = \ell^{s\sqrt{3st}} \qquad Ec\,39$$

$$d = \ell^{-s\sqrt{3st}} = 1/u \qquad Ec\,40$$

Ilustración 19. Arbol trinomial para el activo S



Reproducido de Mun Johnathan, Real Options: Analysis Course, Wiley, 2005

Las probabilidades neutrales son para los tres estadios p_b, p_m, p_a (bajo, medio, alto)

$$p_b = \frac{1}{6} - \sqrt{\frac{\Delta t}{12s^2}}\left(r - q - \frac{s^2}{2}\right) \qquad \textit{Ec 41}$$

$$p_m = \frac{2}{3} \qquad \textit{Ec 42}$$

$$p_a = \frac{1}{6} + \sqrt{\frac{\Delta t}{12s^2}}\left(r - q - \frac{s^2}{2}\right) \qquad \textit{Ec 43}$$

La forma de resolución es similar al modelo binomial, tomando el camino óptimo desde el último nodo hasta el momento de valuación.

6. PROCESOS ESTOCÁSTICOS CONTINUOS: EL MODELO DE VALUACIÓN DE BLACK & SCHOLES

6.1 El modelo de valoración de Black & Scholes

Black y Scholes (1973)[28] desarrollaron un modelo de valoración que permite arribar a una solución cerrada para estimar el valor de opciones europeas. Por la complejidad del cálculo matemático involucrado en la derivación de la fórmula, la cuál excede el marco del presente trabajo, simplemente se desarrollaran los aspectos salientes de la ecuación.

La idea sobre la cual se cimienta el modelo es la de carteras réplicas, criterio enmarcado en el concepto de valoración de pagos contingentes conocido por las siglas CCA (*Contingent Claim Approach*[29]). De hecho la presente ecuación tiene dos componentes; la opción y la estra-

[28] Una excelente e intuitiva explicación de cómo los autores llegaron a su conocida ecuación se puede encontrar en Fisher Black, How we came up with the option formula, *Journal of Portfolio Management*, 1989 (traducción en Cuadernos de Finanzas 34 de SADAF). También se puede encontrar un excelente desarrollo del modelo en Chriss (1997).

[29] Ver Trigeorgis (1997) Chp 3.

tegia de cobertura de la opción. Esto se logra mediante el concepto de la cobertura dinámica, estrategia que goza de dos propiedades, siendo capaz de replicar los flujos de fondos del derivado y tener un costo fijo y conocido.

6.2 El funcionamiento de la ecuación: Determinación del valor de la opción y la estrategia de cobertura

La clave reside en entender como la ecuación se traduce en estrategia de cobertura que replica los flujos de fondos de la opción, determinado que el costo de la estrategia es igual al valor de la opción. La estrategia de cobertura tiene dos dimensiones temporales, una al momento de la construcción y otra en el momento de su mantenimiento.

Para construir la cobertura de la cartera se necesitan los siguientes elementos:

1) *N* unidades del subyacente *S*[30]
2) Una posición corta en un bono sin riesgo *B* con vencimiento en *t*.

El valor de la cartera de cobertura es el valor del subyacente menos el valor actual del bono tal que:

$$N_t S_t - \ell^{-rt} B_t \qquad Ec\ 44$$

La ecuación 44 es una aproximación a la fórmula de Black & Scholes para obtener el valor de una opción de compra *C*.

El segundo paso es mantener la cartera a través del tiempo, para ello se debe revisar continuamente la cobertura. Al tener una posición larga en N_t unidades de *S* continuamente se debe revisar el valor del subyacente, comprando o vendiendo títulos con el fin de mantener la posición de cobertura. Los costos involucrados en el balanceo de la cartera se denominan costos de balanceo, los cuales permiten el autofinanciamiento de la estrategia. En el modelo a través de los costos de transacción se asume que no se incluyen los costos de transacción.

Desde la perspectiva de la cobertura, y de los costos, si se protege una posición corta en una opción de compras siempre se tendrá una cartera compuesta por *N* acciones financiada con un bono sin riesgo, el cual es igual al valor *C* de la opción, lo cuál es válido para cualquier momento del tiempo *t*. El inicio de la cobertura tiene un costo cierto el cuál es igual al valor de la opción de compra, mantenerlo en el tiempo implica incurrir en compras o ventas del activo subyacente, tal que el costo total de la cobertura a lo largo del intervalo de tiempo es igual a:

Costo total = Costos iniciales + Costos de balanceo.

Desde la perspectiva de los flujos de fondos derivados de la cartera de cobertura, la posición larga sobre *N* acciones combinada con la venta corta del papel sin riesgo es el equivalente a tener una opción de compra, tal que el costo de la cobertura es igual a la corriente futura de fondos asociada a la cartera en el momento *t*. Ahora bien, la ecuación de Black y Scholes indica la siguiente igualdad:

Costos iniciales = Valor de la opción (derivado de la ecuación B&S) = Costo total

Que los costos iniciales sean iguales al valor de la opción derivado de la ecuación bajo estudio es consecuencia de la concepción de la fórmula de la misma, la segunda igualdad refleja las consideraciones expuestas en la construcción de la cartera de arbitraje. Que los costos iniciales sean iguales a los costos totales implica que los costos de mantenimiento son nulos y la estrategia de cobertura se autofinancia.

[30] *N* es un ratio que se ubica entre 0 y 1. Los contratos de opciones vienen por lotes de subyacentes, así una opción de compra sobre 100 acciones, donde el ratio de cobertura sea 0.66, nos indica que se tiene que mantener una posición larga comprando 66 unidades del título

De lo expuesto se concluye que la ecuación de Black y Scholes tiene como propósito valuar la opción y definir la estrategia de cobertura la cual se financia a así misma, implicando:

Valor de una opción (Costos iniciales) = Cobertura ($N_t S_t - \ell^{-rt} B_t$ *)*

El ratio de cobertura de una opción es un elemento crucial ya que determina el valor del bono al *B* y define la condición de que *B* sea igual al precio de ejercicio *E* si la opción está vigente o su valor sea nulo si la opción no se encuentra en el dinero. Esta relación se explica mediante la siguiente ecuación:

$$N_t S_t - \ell^{-rt} B_t = C_t \qquad Ec\ 45$$

donde S_t es el precio de la acción en el instante t. Para cambios temporales desde el instante $t-1$ a t la relación entre el ratio de cobertura y el financiamiento de la cartera réplica es la siguiente,

$$(N_t - N_{t-1})\ell^{-rt} S_t = (B_t - B_{t-1})\ell^{-rt} \qquad Ec\ 46$$

Esta ecuación indica que dados los cambios en el ratio de cobertura como deben ser los cambios en el bono de la cartera réplica, dejando escaso margen para variaciones en el valor de *B*, sujeto a la condición de que *B=E* si la opción está en el dinero o *B=0* por el contrario. De ello se desprende que existe un único valor para el financiamiento y que en la ecuación de Black y Scholes el valor de una opción europea depende de tres elementos como el ratio de cobertura, la tasa de interés libre de riesgo y el tiempo hasta la expiración.

A través de la explicación precedente se puede derivar el valor de una opción determinando los posibles valores para la cobertura y el bono sin riesgo. Las ecuaciones para $N_t S_t$ y B_t siguiendo una distribución normal de probabilidad son:

$$N_t = N(d_1) = \frac{\ln(S/E) + \left[r + \left(s^2/2\right)\right]t}{s\sqrt{t}} \qquad Ec\ 47$$

$$B_t = N(d_2)E = E(d_1 - s\sqrt{t}) \qquad Ec\ 48$$

Siendo *E* el precio de ejercicio, *N(.)* la distribución acumulativa normal de probabilidad y s la volatilidad del subyacente, tal que la ecuación se reduce a

$$C_t = N(d_1)S_t - \ell^{-rt} E N(d_2) \qquad Ec\ 49$$

Y para una opción de venta

$$P_t = (N(d_1) - 1)S_t + \ell^{-rt} E(1 - N(d_2)) \qquad Ec\ 50$$

6.3 Una aproximación más rigurosa

Se parte del concepto de valuación de carteras réplicas utilizadas por el método binomial indicado en las ecuaciones 1, 2 y 3. Para movimientos discretos de la variable aleatoria la igualdad está explicada por la ecuación *C= NS-B*. En el límite asumiendo un comportamiento continuo de $N = \frac{\partial C}{\partial S}$, construyendo una cartera sin riesgo *NS-C=B*, vendiendo en corto una opción de compra sobre el subyacente y comprando $N = \frac{\partial C}{\partial S}$ sobre la acción al precio *S*.

Debe recordarse que se parte del supuesto de que el comportamiento del activo subyacente sigue un proceso estocástico de la forma de Movimiento Browniano Geométrico (*Geometric Brownian Motion*) explicado en la ecuación 16, siendo la expresión de forma

$$dS = mSdt + s\,dz \qquad Ec\ 51$$

donde

S es el valor de la acción,
dS es el incremento sufrido por el título explicado por la ecuación,
m es la tasa instantánea de rendimiento esperada de la acción (en la ecuación 16 se la designaba como la pendiente del recorrido aleatorio de la variable y se notaba con la letra a),
s es la desviación estándar instantánea de la tasa de rendimiento, que se supone constante durante el intervalo de proyección,
dt el incremento diferencial en la variable tiempo
dz un proceso de Wiener (distribuido normalmente con media 0 y varianza 1).

Desde que el proceso de Wiener, al cual están sujetas las variables *S* y *C* son los mismos para un intervalo pequeño de tiempo *dt*, este puede ser eliminado.

Para un incremento *dC=NdS-dB* del valor de la opción de compra, partiendo que el ratio de cobertura es igual a $N = \frac{\partial C}{\partial S}$ y utilizando la expresión de ecuaciones diferenciales de Îto[31] de la forma,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(s^2 x^2 dt\right) \qquad Ec\,52$$

Siendo $dC \equiv dF$ y la variable aleatoria *x* sustituida por la variable de estado activo subyacente *S* se tiene,

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\left(s^2 S^2 dt\right) = \frac{\partial C}{\partial S}dS - dB \qquad Ec\,53$$

La ecuación 53 se puede exponer en términos del activo libro de riesgo *dB*,

$$dB = -\left(\frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\left(s^2 S^2\right)\right)dt \qquad Ec\,54$$

Al ser la cartera creada libre de riesgo el rendimiento debe ser igual a *r*, tal que *dB/B=rdt* sustituyendo dicha expresión en la ecuación 54 se tiene,

$$dB = (B)rdt\left(\frac{\partial C}{\partial S}S - C\right)rdt \qquad Ec\,55$$

Igualando y resolviendo en función de *dB* las ecuaciones 54 y 55 y utilizando derivadas parciales en función de *C* se obtiene la siguiente ecuación,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = rC - rS\frac{\partial C}{\partial S}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}s^2 S^2 \qquad Ec\,56$$

La ecuación 56 es una ecuación diferencial no estocástica para el valor de una opción de compra la cual debe ser resuelta sujeta a las siguientes restricciones o valores límites,

$C(S,0,E) = \max(S-E,0)$ *valor terminal, máximo valor al vencimiento.*

$C(0,t,E) = 0$ *valor mínimo a adoptar por la opción de compra.*

$C(S,t,E)/S \to 1/S \to \infty$ *valor al cual puede ascender la opción.*

Para una opción de venta europea se llega a similar ecuación diferencial como la 56,

$$\frac{1}{2}s^2 S^2 pss + rSps - pt - rp = 0 \qquad Ec\,57$$

En donde las condiciones de frontera cambian,

$p(S,0,E) = \max(E-S,0)$ *valor terminal, máximo valor al vencimiento.*

[31] Para el desarrollo de la ecuación mediante el uso de series de Taylor puede verse Dixit and Pindyck (1994).

$p(0,t,E)=E$ *valor máximo al cual puede ascender la opción.*

$\frac{p(S,t,E)}{S}\rightarrow 0/S\rightarrow\infty$ *valor mínimo a adoptar por la opción de venta.*

La solución a la cuál arriban Black y Scholes (1973) es la siguiente,

$$c=S.N\left\{\frac{\ln(S/E)+\left[r+\left(s^{2}/2\right)\right]t}{s\sqrt{t}}\right\}-E\ell^{-rt}.N\left\{\frac{\ln(S/E)+\left[r+\left(s^{2}/2\right)\right]t}{s\sqrt{t}}\right\} \quad Ec\,58$$

Las variables fueron definidas previamente a excepción de $N(.)$ es la función acumulativa de probabilidad correspondiente a una variable unitaria con distribución normal., donde para $N(-\infty)=0$, $N(0)=0{,}5$ y para $N(\infty)=1$. $N(.)=\int_{-\infty}^{z} f(z)dz$ donde $f(z)$ tiene una distribución normal de probabilidad con media cero y desvío 1.

En forma más convencional la ecuación se expresa de la siguiente manera,

$$c(S,t,E)=SN(d_1)-E\ell^{-rt}N(d_2) \quad Ec\,59$$

donde

$$d_1=\frac{\ln(S/E)+\left[r+\left(s^{2}/2\right)\right]t}{s\sqrt{t}}$$

$$d_2=d_1-s\sqrt{t}\,.$$

En principio la ecuación 59 representa para el caso continuo la cartera sin riesgo desarrollada en las ecuaciones 1, 2 y 3. En esos términos el valor de una opción de compra es equivalente a mantener una compra apalancada de la acción donde el precio del subyacente es ponderado por $N(d_1)$ el cual es la inversa del ratio de cobertura *(N).*

Por cada acción una cartera sin riesgo contiene *1/* $N(d_1)$ opciones de compras tomadas contra el título y la cantidad de dinero a pedir prestado (la venta corta *B*) es explicada por $E\ell^{-rt}N(d_2)$, donde $N(d_2)$ se puede interpretar como la probabilidad de que la acción sea ejercida. Dado que *N* y *B* fluctúan de manera continua con las dos variables de estado, tiempo (*t*) y activo subyacente (*S*), teóricamente requieren de un ajuste continuo para mantener la equivalencia.

6.4 Las letras griegas

También conocidos como los parámetros de cobertura que permiten tomar posiciones protectoras contra variables que afectan el precio de la opción como el precio del subyacente, tiempo, tipo sin riesgo y volatilidad. Los cinco parámetros de cobertura son:

Letra	*Símbolo*	*Significado*
Delta	Δ	La tasa de cambio en el valor de la opción en relación al cambio en el precio del subyacente.
Gamma	Γ	La tasa de cambio en el ratio delta en relación al cambio de precio del subyacente.
Theta	Θ	La tasa de cambio en el valor de la opción a consecuencia del paso del tiempo.
Rho	*r*	La tasa de cambio en el valor de la opción a consecuencia de la variación en el tipo sin riesgo.
Vega	*n*	La tasa de cambio del valor de la opción en relación a la volatilidad del subyacente.

Además de operar como indicadores de cobertura los parámetros brindan una noción de cómo variará el valor de la opción en la ecuación de Black y Scholes al modificarse alguna de las variables explicativas de la opción, manteniéndose las restantes constantes. A continuación se presenta una breve explicación de cada uno.

Delta (Δ). Según se explicó, delta es el parámetro de cobertura que indica la cantidad de unidades de títulos a mantener en cartera para replicar el valor de la opción de compra. La ecuación de delta es

$$\Delta = \frac{C_{t0} - \ell^{-rt} C_{t1}}{S_{t0} - \ell^{-rt} S_{t1}} \qquad \textit{Ec 60}$$

El valor de delta siempre estará entre 0 y 1 el cual surge como consecuencia de la sensibilidad el valor de la opción ante los cambios en el precio del subyacente.

Gamma (Γ **).** Esta cobertura se encuentra ligada a la anterior ya que gamma mide la tasa de cambio del ratio delta ante una variación en el precio de la acción.

Gamma se ve afectado tanto por la volatilidad del subyacente, la vida de la opción y el hecho de que el instrumento esté en el dinero o no. El significado del valor de gamma es el siguiente: a mayor ratio, mayor sensibilidad del ratio delta ante cambios en el precio del subyacente, mayor cantidad de acciones se tendrán que adquirir para balancear el título. De hecho cuanto mayor es la volatilidad del título mayor es gamma y cuanto más cerca se esta del vencimiento de la opción mayor es gamma. A continuación se presenta la expresión del ratio.

$$\Gamma = \frac{N(d1)\ell^{-rt}}{Ss\sqrt{t}} \qquad \textit{Ec 61}$$

Una de las propiedades importantes del presente ratio de cobertura es que para una opción de compra y de venta europea sobre el mismo subyacente con igual precio de ejercicio el gamma de la opción de venta es igual al gamma de la opción de compra. Esto es así debido a que por la paridad existente entre opciones de compra y venta europeas se sabe que el delta de un *put* es igual al delta de un *call* menos una constante,

$$\Delta_p = \Delta_c - 1 \qquad \textit{Ec 62}$$

Una variación en el delta de la opción de venta es igual a la variación en el delta de la opción de compra menos el valor de la constante.

Theta (Θ**).** La tasa de cambio del precio de una opción en relación al paso del tiempo es conocida como theta.

Si Θ significa el theta de la opción, cuando pasa un día en el tiempo, el valor de la opción cambia en una magnitud igual a $\Theta/365$. De lo expuesto se puede concluir que un ratio theta negativo implica que el valor de la opción decrece con el tiempo mientras que un theta positivo implica un aumento en el precio del derivado.

Una propiedad del ratio para opciones de compra europeas es que a medida que transcurre el tiempo el valor del ratio es negativo implicando que el precio del *call* europeo disminuya como consecuencia del paso del tiempo, siempre que las restantes variables se mantengan constantes. El hecho de que el precio de la opción de compra europea disminuya con el tiempo es importante ya que se transforma en un factor determinable en el precio de la opción.

El valor de la opción, manteniéndose los factores constantes a excepción del riesgo, se puede explicar mediante un componente predecible (Theta) y un componente aleatorio (Delta). La forma de theta es,

$$\Theta = \frac{N(d1)s\,\ell^{-rt}}{2\sqrt{t}} - rE\ell^{-rt}N(d2) + S_{t0}N(d1) \qquad Ec\ 63$$

Dada la paridad *put-call* para opciones europeas el ratio se puede describir como,

$$\Theta_p = \Theta_c + rE\ell^{-rt} \qquad Ec\ 64$$

donde E es el precio de ejercicio y r es el tipo sin riesgo. Si $r = 0$ entonces $\Theta_p = \Theta_c$, por lo que el theta de la opción de venta crece en relación al ratio de la opción de compra más el valor actual del precio de ejercicio.

Rho (r). Mide la tasa de cambio del precio de la opción ante variaciones en el tipo de interés libre de riesgo. Manteniéndose las restantes variables constantes, rho es siempre positiva para opciones de compra europeas y negativo para opciones de venta, debido a que ante un incremento en el tipo sin riesgo el precio de la opción de compra aumenta, teniendo un efecto inverso en el valor de la opción de venta. La expresión del ratio es,

$$r = E\ell^{-rt}N(d2) \qquad Ec\ 65$$

Vega (n **).** Mide la relación entre la volatilidad del subyacente y el precio de la opción. La volatilidad del subyacente es importante habida cuenta que cuanto mayor es esta, mayor es la posibilidad de que la opción se encuentre en el dinero.

Existen dos eventos vinculados con la volatilidad: el efecto de la volatilidad sobre el valor de la opción disminuye a medida que se avanza hacia la expiración del instrumento, y dicho efecto es mayor para las opciones que se encuentran en el dinero.

La importancia de vega reside en que brinda una idea de que ocurre con el valor de la opción si la volatilidad cambia, y esto es importante ya que el modelo de valuación de Black y Scholes asume un comportamiento constante del componente volatilidad.

Las reglas que brinda vega son las siguientes:

1) Si n es el ratio vega de la opción, entonces una variación de un punto porcentual en la volatilidad del activo subyacente implica en un cambio de n /100 unidades monetarias en el precio de la opción.
2) Dada la paridad *call-put* para opciones europeas, vega de una opción de compra es igual al ratio vega para una opción de venta.

El vega se expresa mediante la siguiente ecuación,

$$n = S\sqrt{t}N'(d1) \qquad Ec\ 66$$

Con el fin de comparar opciones y sus correspondientes vegas es que se utiliza como medida el ratio vega normalizado, es decir si C es el valor de la opción de compra, el vega normalizado es igual al cociente entre vega y el valor del opción tal que

$$n' = \frac{n}{C} \qquad Ec\ 67$$

Este ratio mide el porcentaje de cambio en el valor de la opción ante una variación en el valor de vega.

6.5 Un factor crítico: estimación de la volatilidad[32]

La variable crítica, desde la perspectiva de los insumos de los modelos de valoración de opciones, esta dada por la volatilidad del subyacente. De hecho para utilizar la ecuación se necesitan conocer el valor de algunas variables, las cuales tienen un precio explicitado en el mercado. Así, del contrato de opción surge el valor del precio de ejercicio y la duración del instrumento, del mercado se puede observar el valor del subyacente y el tipo sin riesgo. El único elemento de la ecuación que no tiene manifestación explicita en el mercado es la volatilidad del principal. Algunas de las herramientas disponibles para la estimación de la volatilidad son:

Volatilidad histórica. Mediante esta técnica se utiliza la información pasada para determinación de la volatilidad del activo subyacente. Se debe definir la amplitud del intervalo de medición y la disponibilidad de información, donde debe recordarse que a mayor cantidad de observaciones, mayor grado de aproximación tendrá el estadístico al valor muestral.

Determinada la volatilidad, se supone constante durante la vida de la opción, supuesto congruente con el modelo de valoración de Black y Scholes. Si bien está técnica tiene como ventaja la simplicidad en su implementación adolece de todos las falencias propias de trabajar con datos pasados en la estimación de valores futuros.

Volatilidad implícita. En el caso que la opción tenga liquidez, es decir, existan precios actualizados de su valor en el mercado de capitales, la herramienta disponible está dada por la volatilidad implícita. Partiendo de la ecuación de Black y Scholes y tomando el valor de mercado de la opción, se infiere el valor de s correspondiente al valor del instrumento según la expresión del modelo de valoración bajo estudio, suponiendo constante las restantes variables.

a) Volatilidad y Movimiento Browniano Geométrico. Ahora bien una pregunta que surge a partir de los procesos estocásticos y la volatilidad del subyacente es la siguiente, ¿existe vínculo entre la volatilidad y el proceso de Movimiento Browniano Geométrico?

La respuesta en principio es negativa. Es sabido que el valor de toda opción se encuentra asociado a una volatilidad determinada. Ahora bien En el supuesto de diferentes contratos de opciones sobre un mismo activo subyacente, cabría preguntarse si la volatilidad es la misma para los distintos derivados. Si se sigue la lógica del Movimiento Browniano Geométrico la respuesta es afirmativa, ya que el modelo supone constante en el tiempo (igual) la volatilidad del subyacente.

En realidad si se computan volatilidades implícitas para diferentes contratos de opciones sobre un mismo activo se puede apreciar que esta se modifica en función a la variación de las condiciones contractuales (cambios en los precios de ejercicio y duraciones).

Si se asume que el mercado valora correctamente las opciones y que las oportunidades de arbitraje no existen entonces el hecho de que existan distintas volatilidades implica que los activos no necesariamente se ajustan en sus procesos al Movimiento Browniano Geométrico.

b) Cálculo de la volatilidad implícita. No existe un modelo de cálculo directo para obtente el valor de la volatilidad implícita. Es decir, dado el valor de C respecto de S no existe una ecuación para calcular el valor de la volatilidad de S. Se sabe que el precio de la opción es una función de componentes como $C = f\left(S_{t,} E, t, r, s\right)$.

Para calcular la volatilidad implícita se debe invertir las variables en función de s, quedando la expresión como $s\left(S_{t,} E, t, r, C\right)$. La expresión matemática a resolver combinada con el in-

[32] La estimación y tratamiento de la volatilidad se puede ver en Chriss (1997).

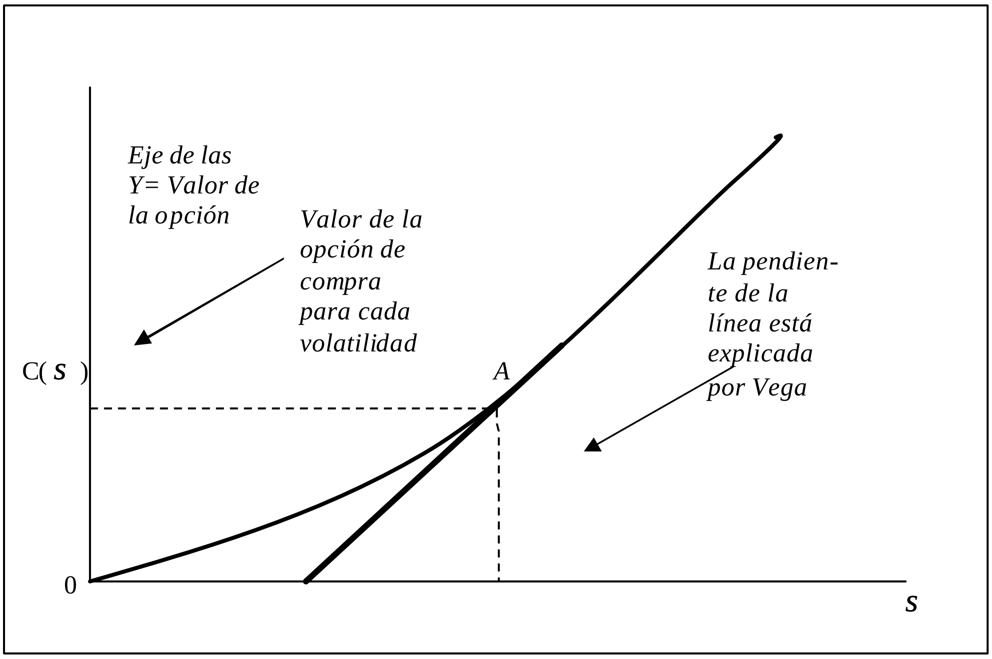
grediente de la distribución normal acumulativa *N(.)* son difíciles de resolver por lo que se hace uso de los denominados métodos iterativos.

c) Métodos iterativos. Método de las Bisecciones. Método de Newton-Raphson. La iteración implica resolver el problema mediante la repetición de procedimientos tantas veces como sea necesario hasta la obtención de un valor que satisfaga la ecuación. En el cálculo de la volatilidad iterar implica partir de una volatilidad supuesta, reemplazarla en la ecuación y obtener un primer resultado el cual será utilizado para estimar una segunda aproximación, así sucesivamente hasta llegar al valor que satisfaga la ecuación.

Existen dos métodos iterativos el método de las bisecciones y el método de Newton-Raphson. El primero implica estimar la volatilidad implícita iterando paso a paso, suponiendo constantes y dadas por el mercado las restantes variables de la ecuación. El método se caracteriza por su simplicidad, su punto débil es la cantidad de pasos para obtener la estimación y el menor grado de aproximación en el valor de la volatilidad que el método de Newton-Raphson.

Este método estima el valor de la volatilidad del título a partir del uso del ratio Vega. Al igual que el anterior se emplea el procedimiento de iteración, partiendo de una volatilidad supuesta para un valor estimado de la opción. A diferencia del método precedente, los sucesivos valores de la volatilidad son función del coeficiente Vega y de la volatilidad implícita obtenida en el paso anterior, derivada de la pendiente del valor teórico de la opción.

Ilustración 20. El método de Newton-Raphson



La volatilidad de la volatilidad. Se puede sostener que la volatilidad en así tiene un comportamiento aleatorio lo cual implica que no debe suponerse constante en el tiempo. El razonamiento precedente supone que a medida que el precio del título evoluciona en el tiempo, la volatilidad adopta un comportamiento aleatorio. Para crear un modelo estocástico es que se debe conocer las causas y naturalezas de dichos movimientos.

Si se quiere vincular al Movimiento Browniano Geométrico, se sabe que una de las propiedades de este es que la distribución de probabilidad de los movimientos en el precio del subyacente es independiente de los eventos pasados y obedece a una distribución de probabilidad normal con media proporcional al tiempo transcurrido y desvío proporcional a la raíz cuadrada del intervalo proyectado. En el Movimiento Browniano Geométrico la distribución de probabilidad de cada movimiento contribuye a determinar la volatilidad promedio del activo, de allí que se asume constante. No obstante existen modelos donde el componente de la volatilidad varía continuamente, la clave está en la correcta derivación del modelo y la forma que se asume se comportará la volatilidad.

Las preguntas a resolver para modelar un modelo estocástico sobre la volatilidad se ciernen sobre:

1) Si la volatilidad se asume constante o variable: en el supuesto de asumirse constante en el tiempo bastaría trabajar con su expresión implícita. En el caso de ser variable debería modelarse un modelo estocástico para prever su comportamiento.
2) Como se supone que evolucionará en el tiempo: Este interrogante conduce a la selección del proceso estocástico para estimar la volatilidad: Browniano Geométrico, Reversión a la Media, Poisson, Poisson combinado con Browniano Geométrico etc.

6.6 Aplicación de la ecuación

La utilización de la ecuación de Black & Scholes requiere de algunos insumos los cuales son obtenidos directamente del mercado, como el valor de mercado del subyacente, el precio de ejercicio del opción, su plazo hasta la expiración y la tasa libre de riesgo estimada mediante el cálculo del rendimiento promedio de títulos sin riesgo de similar vida al de la opción en cuestión[33].

Uno de los parámetros de la ecuación que no es obtenido directamente de la observación del mercado es la varianza del título, por lo que es importante señalar las distintas alternativas empleadas para su estimación las cuales infieren un comportamiento constante de dicha magnitud a lo largo del tiempo.

Estimación de la varianza del título a partir de los precios observados. A partir de la serie histórica de precios se procede a calcular los rendimientos continuos para cada periodo observado con el fin de obtener *n* rendimientos a través de la siguiente ecuación:

$$r_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \qquad \textit{Ec 68}$$

donde S_t / S_{t-1} indican el rendimiento observado para el momento *t* y *ln* el logaritmo natural del rendimiento con el fin de capitalizar de manera continua.

Una vez obtenido el rendimiento periódico se impone calcular el rendimiento promedio del activo tal que la ecuación a utilizar es

$$\bar{r} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} r_t \qquad \textit{Ec 69}$$

El rendimiento promedio es utilizado para estimar la varianza por periodo correspondiente a la duración de tiempo para la cual es calculado cada rendimiento observado

$$s^2 = \sum_{t=1}^{n}\left(r_t - \bar{r}\right)^2 \frac{1}{n} \qquad \textit{Ec 70}$$

Si la varianza fuese semanal se debe multiplicar por la cantidad de semanas para transformarla en anual o si fuese anual y se quisiera relacionar con un menor intervalo se debe proporcionar a la vida de la opción.

[33] Calculada a partir del rendimiento generado por títulos que se aproximan a las características de un activo libre de riesgo, es decir títulos sin riesgo de incumplimiento de parte del emisor y sin riesgo de reinversión, como podría ser el caso de bonos soberanos con estructura de pago cupón cero.

Un ejemplo. Supóngase el caso de una opción de compra sobre un título de renta variable que se negocia en el mercado local, siendo la acción en cuestión la emitida por la firma Acindar S.A denominada la especie bajo la sigla ACIN. La denominación de la opción tomada como ejemplo es ACI6C.264ª, cuya fecha de expiración es al 15 de abril del 2005, con precio de ejercicio $6,264, tasa libre de riesgo del 5% anual y precio de cotización de la acción a fecha de valuación correspondiente al 5 de abril del 2005 de $5,860.

El único dato que no puede ser observado directamente del mercado para valuar la opción es la volatilidad del subyacente la cual en el presente ejemplo fue calculada a partir de los precios mensuales observados de la acción durante el periodo que va desde enero del 2004 a abril del 2005. Utilizando la base de datos de la Bolsa de Comercio de Buenos Aires se obtiene la siguiente serie de precios correspondiente a la especie.

Cuadro 5. Serie de precios mensuales correspondiente al título subyacente

Publicadas por la Bolsa de Comercio de Buenos Aires. El logaritmo natural de los rendimientos fue obtenido utilizando el comando en Excel LN(), la media se obtuvo mediante el comando PROMEDIO(), la varianza mediante el comando VAR() y el desvío a través del comando DESVEST(). El desvío anualizado surge del producto del desvío mensual por $\sqrt{12}$.

Especie	*Período*	*Máximo*	*Mínimo*	*Cierre*	*Promedio*	*St/S(t-1)*	*lnSt/S(t-1)*
ACIN	2004-01	3,740	2,760	3,030	3,177		
ACIN	2004-02	3,170	2,570	2,950	2,897	0,912	-0,092
ACIN	2004-03	3,590	2,780	3,370	3,247	1,121	0,114
ACIN	2004-04	3,540	3,180	3,320	3,347	1,031	0,030
ACIN	2004-05	3,450	2,530	2,920	2,967	0,886	-0,121
ACIN	2004-06	3,020	2,650	2,880	2,850	0,961	-0,040
ACIN	2004-07	3,090	2,860	3,010	2,987	1,048	0,047
ACIN	2004-08	3,110	2,920	2,960	2,997	1,003	0,003
ACIN	2004-09	3,710	2,940	3,630	3,427	1,143	0,134
ACIN	2004-10	4,640	3,500	4,530	4,223	1,232	0,209
ACIN	2004-11	4,800	4,260	4,430	4,497	1,065	0,063
ACIN	2004-12	5,780	4,390	5,530	5,233	1,164	0,152
ACIN	2005-01	5,890	5,200	5,750	5,613	1,073	0,070
ACIN	2005-02	7,270	5,650	6,940	6,620	1,179	0,165
ACIN	2005-03	7,040	5,520	5,820	6,127	0,925	-0,077
						Media	0,047
						Varianza	0,011
						Desvío	0,103
						Anualizado	0,355

La volatilidad histórica mensual del título es del 10,30% siendo la dispersión anualizada del 35,50%. Si bien la ecuación de Black & Scholes sirve para valuar opciones europeas y en el mercado local la mayoría de las opciones son del tipo americano se asume que durante la vida de la opción la acción no paga dividendos, por aplicación de la propiedad 10 enunciada en el punto 3, la ecuación 41 puede ser utilizada en el presente ejemplo. Sustituyendo los valores observados del mercado conjuntamente con la estimación de la volatilidad de la acción se tiene,

$$c(\$5.86, 10d, \$6.24) = 5.86N(d_1) - 6.24\ell^{-0.05\frac{10}{365}}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(5.86/6.24) + \left[0.05 + \left(0.3550^2/2\right)\right]\frac{10}{365}}{0.3550\sqrt{\frac{10}{365}}} \quad d_1 = \frac{-0{,}062830579 + 0{,}003096233}{0{,}058760018}$$

$$d_1 = -1{,}01658148$$

$$d_2 = d_1 - 0.3550\sqrt{\frac{10}{365}} \quad d_2 = -1{,}01658148 - 0{,}058760018$$

$$d_2 = -1{,}07534149$$

El siguiente paso es hallar las probabilidades acumuladas de *N(d)* de los parámetros d_1 y d_2.

Cuadro 6: Tabla obtenida utilizando la función Excel DIST.NORM:ESTAND. Elaboración propia

d	*N(d)*	*d*	*N(d)*	*d*	*N(d)*	*d*	*N(d)*
-3	0,0013499	-1,45	0,07352926	0,1	0,53982784	1,65	0,95052853
-2,95	0,00158887	-1,4	0,08075666	0,15	0,55961769	1,7	0,95543454
-2,9	0,00186581	-1,35	0,08850799	0,2	0,57925971	1,75	0,95994084
-2,85	0,00218596	-1,3	0,09680048	0,25	0,59870633	1,8	0,96406968
-2,8	0,00255513	-1,25	0,10564977	0,3	0,61791142	1,85	0,96784323
-2,75	0,00297976	-1,2	0,11506967	0,35	0,63683065	1,9	0,97128344
-2,7	0,00346697	-1,15	0,12507194	0,4	0,65542174	1,95	0,97441194
-2,65	0,00402459	-1,1	0,13566606	0,45	0,67364478	2	0,97724987
-2,6	0,00466119	-1,05	0,14685906	0,5	0,69146246	2,05	0,97981778
-2,55	0,00538615	-1	0,15865525	0,55	0,70884031	2,1	0,98213558
-2,5	0,00620967	-0,95	0,17105613	0,6	0,72574688	2,15	0,98422239
-2,45	0,00714281	-0,9	0,18406013	0,65	0,74215389	2,2	0,98609655
-2,4	0,00819754	-0,85	0,19766254	0,7	0,75803635	2,25	0,98777553
-2,35	0,00938671	-0,8	0,2118554	0,75	0,77337265	2,3	0,98927589
-2,3	0,01072411	-0,75	0,22662735	0,8	0,7881446	2,35	0,99061329
-2,25	0,01222447	-0,7	0,24196365	0,85	0,80233746	2,4	0,99180246
-2,2	0,01390345	-0,65	0,25784611	0,9	0,81593987	2,45	0,99285719
-2,15	0,01577761	-0,6	0,27425312	0,95	0,82894387	2,5	0,99379033
-2,1	0,01786442	-0,55	0,29115969	1	0,84134475	2,55	0,99461385
-2,05	0,02018222	-0,5	0,30853754	1,05	0,85314094	2,6	0,99533881
-2	0,02275013	-0,45	0,32635522	1,1	0,86433394	2,65	0,99597541
-1,95	0,02558806	-0,4	0,34457826	1,15	0,87492806	2,7	0,99653303
-1,9	0,02871656	-0,35	0,36316935	1,2	0,88493033	2,75	0,99702024
-1,85	0,03215677	-0,3	0,38208858	1,25	0,89435023	2,8	0,99744487
-1,8	0,03593032	-0,25	0,40129367	1,3	0,90319952	2,85	0,99781404
-1,75	0,04005916	-0,2	0,42074029	1,35	0,91149201	2,9	0,99813419
-1,7	0,04456546	-0,15	0,44038231	1,4	0,91924334	2,95	0,99841113
-1,65	0,04947147	-0,1	0,46017216	1,45	0,92647074	3	0,9986501
-1,6	0,05479929	-0,05	0,48006119	1,5	0,9331928	3,05	0,99885579
-1,55	0,06057076	0	0,5	1,55	0,93942924	3,1	0,9990324
-1,5	0,0668072	0,05	0,51993881	1,6	0,94520071	3,15	0,99918365

Para $N(d_1)$ la probabilidad acumulada en la tabla es de 0.1546 y para $N(d_2)$ es de 0.1411. Resolviendo en función a la ecuación 41 se tiene:

$$c(\$5.86, 10d, \$6.24) = \$5.86(0{,}1546) - \$6.24_{\ell}^{-0.05\frac{10}{365}}(0{,}1411)$$

$$c(\$5.86, 10d, \$6.24) = 0{,}9064 - 0{,}8793$$

$$c(\$5.86, 10d, \$6.24) = \$0{,}027$$

El valor teórico de la opción de compra según la ecuación de Back & Scholes es de $0,027.

6.7 Convergencia entre modelos de valuación binomial y continuos

El modelo binomial se puede convertir y adoptar las propiedades de un modelo continuo en la medida que los intervalos de tiempo en los cuales se fracciones el plazo total de proyección sean cada vez más pequeños. Si T es el plazo de duración de la opción y n representa los intervalos en los cuales se divide la vida de la misma, en la medida que el tamaño de n sea cada vez más pequeño (tendiendo a cero) el comportamiento de la variable aleatoria deja de ser discreto para transformarse en continuo.

Cuando el número de periodos n es infinito en el lapso T el modelo multiplicativo binomial se transforma en un proceso de Wiener con distribución de probabilidad lognormal conforme fue expuesto en el punto 4.

De hecho, la variable aleatoria (el precio de la acción) se comporta obedeciendo a una distribución normal donde la distribución de probabilidad binomial $\Phi[.]$ convergerá a la forma de la distribución normal $N(.)$. Los parámetros sobre los cuales se deben trabajar, propios del modelo multiplicativo binomial son u, d, p, relacionándolos con el comportamiento de la varianza de la variable aleatoria. Las relaciones fueron establecidas por Cox, Ross y Rubinstein (1979).

El rendimiento de la acción es la tasa libre de riesgo, r la cuál para pequeños intervalos (dt) de tiempo queda expresada como ℓ^{rst}, tal que los parámetros p, u y d deben representar la media y varianza del precio de la acción durante el intervalo de tiempo dt.

Si S es el precio de la acción en $t=0$, para obtener el precio en St se sigue,

$$S\ell^{rst} = pSu + (1-p)Sd \qquad Ec\ 71$$

El rendimiento esperado de la acción es igual a,

$$\ell^{rst} = pu + (1-p)d \qquad Ec\ 72$$

El desvío estándar correspondiente al cambio en el precio de la acción para intervalos de tiempo igual a dt es igual a $s\sqrt{dt}$, la varianza es igual a $s^2 dt$, tal que la expresión queda planteada como

$$s^2 dt = pu^2 + (1-p)d^2 - \left[pu + (1-p)d\right]^2 \qquad Ec\ 73$$

La tercera condición utilizada para aproximar el comportamiento discreto del modelo binomial al continuo del modelo de Black y Scholes es que $u=1/d$. Para pequeños intervalos las tres condiciones implican,

$$p = \frac{\ell^{rst} - d}{u-d}$$

$$u = \ell^{s\sqrt{h}}$$

$$d = \ell^{-s\sqrt{h}}$$

Las igualdades indicadas en tienen el propósito de transformar una variable de comportamiento continuo como el desvío estándar de la acción en variables de movimiento discreto como lo son u y d. Siendo, T el tiempo al vencimiento, n es el numero de intervalos, $h \equiv T/n$ es la amplitud del intervalo en el cual *'se negocian'* las carteras réplicas del activo sin riesgo en el proceso binomial. Cox, Ross y Rubinstein (1979) demuestran que en la medida que $n \to \infty$, entonces la distribución de probabilidad del título se transforma de binomial a normal: $\Phi[.] \to N(.)$

A partir de estos conceptos la formula de valuación binomial converge en la fórmula de valuación continua de Black & Scholes. Siguiendo con el ejemplo, los valores para u y d son $u = \ell^{0.355\sqrt{(10/365)/2}} = 1{,}04242487$, $d = \ell^{-0.0355\sqrt{(10/365)/2}} = 0.95930175$

La probabilidad objetiva se obtiene aplicando la ecuación[34] $p = \frac{(1+r)-d}{u-d}$

$$p = \frac{(1+0.0068)-0,9593}{1,04242-0,9593} = 0,5714 \qquad \text{y} \qquad 1-p = 0,4285$$

En la ilustración 21 se presenta el recorrido del subyacente, en la ilustración 22 se expone el valor de la opción de compra al vencimiento para cada estado de la naturaleza.

Ilustración 21. Recorrido de la acción ACIN para n=2, T=10 días

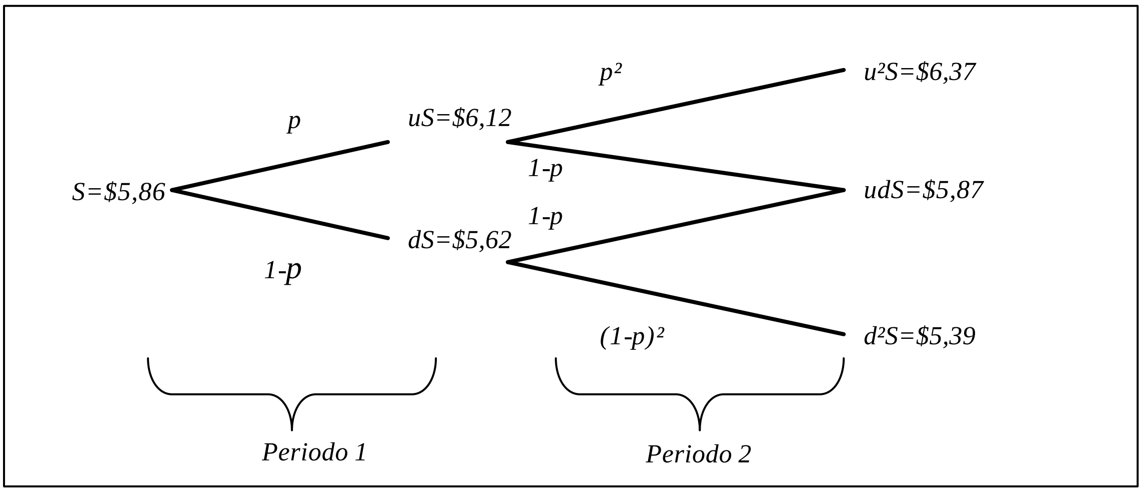
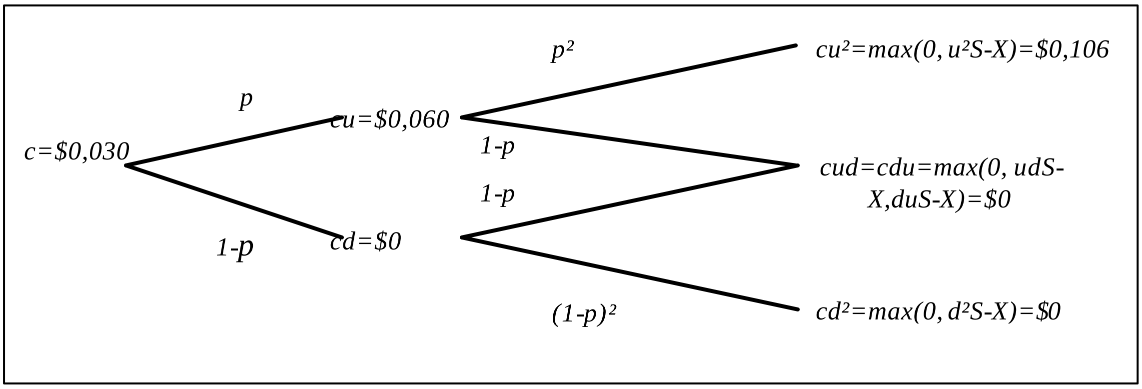


Ilustración 22. Valoración de la opción de compra ACIN para n=2, T=10 días mediante el Modelo Binomial



La ecuación vista en el punto 5 es la utilizada en el presente ejemplo

$$c_u = \left[pc_{uu} + (1-p)c_{ud}\right] \div (1+r) \quad ; \; c_u = \left[0.5714(\$0,106) + (0.4285)(\$0,00)\right] \div (1+0.0068)$$

En el caso que se quiera calcular el estado de baja, el valor de la opción de compra será

$$c_d = \left[pc_{du} + (1-p)c_{dd}\right] \div (1+r)\,; \; c_d = \left[0.5714(\$0,00) + 0.4285(\$0,00)\right] \div (1+0.0068)$$

El valor de la opción de compra en $t=0$ está dado por $c = \left[pc_u + (1-p)c_d\right] \div (1+r)$

$$c = \left[0.5714(\$0,0607) + (0.4285)(\$0,00)\right] \div (1+0.0068)\,; \; c = \$0,030097$$

Para dos periodos la aproximación del modelo binomial al resultados generado por el modelo continuo es satisfactoria, ya que el valor de la opción de compra aplicando el modelo multi-

[34] La tasa debe proporcionarse al periodo de medición, en el ejemplo se tomo un tipo del 5% anual, lo que equivale al 0,14% para el intervalo de diez días, el cual en el modelo binomial se divide en dos periodos por lo que la tasa a utilizar es del 0,068%.

plicativo binomial es de $0,030097 y utilizando el modelo de Black & Scholes es de $0,0279. En la medida que el número de horizontes se incremente los resultados entre ambos modelos tenderán ser equivalentes, hasta el punto en el cual $n \to \infty$, situación en que ambas distribuciones convergen entre sí.

6.7 Valoración de opciones de venta europeas

La valoración de una opción de venta no difiere de su par. Uno de los caminos que se puede utilizar para valorar opciones de venta es utilizar directamente la propiedad 13 indicada en el punto 3 conocida como principio de paridad entre una opción de compra y una opción de venta.

La ecuación a utilizar para el caso de operar con variables discretas $c - p = \frac{(1+r)S - E}{1+r}$ como en el Modelo Binomial o la tradicional ecuación, $c - p = S - E\ell^{-rT}$ en donde despejando en función de la opción de venta se tiene la siguiente expresión

$$p = c + E\ell^{-rt} - S \qquad Ec\ 74$$

Tomando el valor de la opción de compra del ejemplo precedente y aplicando la ecuación 45 se obtiene el siguiente valor de opción de venta, $p = \$0,027 + \$6,231 - \$5,86$, siendo *p=$0,398.*

Otra alternativa es adecuar la ecuación de valoración de Black & Scholes de manera que se obtenga la siguiente expresión

$$p(S,t,E) = S\left[N(d_1) - 1\right] - E_{\ell}^{-rt}\left[N(d_2) - 1\right] \qquad Ec\ 75$$

El razonamiento que subyace en la ecuación 75 implica considerar a $N(d1) - 1$ como el complemento del ratio de tenencia para la opción de compra, ya que en el caso de la opción de venta indica una posición corta en acciones y $N(d2) - 1$ la cantidad invertida en activo sin riesgo. Recuérdese que una opción de venta es igual a una combinación entre una posición corta en el activo subyacente y compra de activo sin riesgo conforme se expuso en el punto 1.

P= (Vender N acciones + Colocar fondos al tipo r), P = - NS + B

Sustituyendo en la ecuación 75 se tiene como valor de la opción de venta utilizando el modelo de Black & Scholes: $p(\$5{,}86, 10d, \$6{,}24) = \$5{,}86[-0.845323] - \$6{,}23[-0.8588907] = \$0{,}399$

7. OPCIONES AMERICANAS: VALORACIÓN DE OPCIONES DE COMPRA Y DE VENTA

Las opciones de americanas se caracterizan por brindar la posibilidad a su tenedor de ejercicio antes del vencimiento, a diferencia de su par europeo. Esta característica hace que el valor de la prima sea superior al de la opción europea, dada la flexibilidad del instrumento en relación a la oportunidad de ejercicio del derecho de vender o comprar el subyacente. Ahora bien, el hecho del ejercicio anticipado en principio tiene impacto en la valoración del instrumento y diferente solución según se hable de una opción de compra o de venta.

7.1 Opciones americanas de compra sobre títulos que no pagan dividendos

Conforme fue explicado en el punto 3 la propiedad 10 sostiene que una opción de compra americana que no paga dividendos no debe ser ejercida antes de su expiración siendo su valor equivalente al de una opción de compra Europea. La igualdad mencionada queda expresada como $C(S,t,E) = c(S,t,E)$

Como fue indicado en el punto 3 antes del vencimiento el valor del apalancamiento de la cartera réplica es igual a $B(t) < 1$ para $r,t > 0$ por lo que se verifica la siguiente equivalencia entre opciones europeas y americanas:

$$C(S,t,E) \geq c(S,t,E) \geq \max(S - B(t)E, 0) > \max(S - E, 0)$$

El conjunto de igualdades indica que el tipo libre de riesgo y el horizonte temporal tiene similar efecto sobre los dos tipos de opciones. En materia de valuación la igualdad indicada implica que en el caso de opciones americanas sobre activos que no pagan dividendos durante la vida del derivado se pueden aplicar los mismos modelos utilizados para valorar opciones de compra europeas.

Como conclusión una opción de compra americana sobre un título que no paga dividendos vale más si se mantiene viva en vez de ser ejercida en forma temprana, careciendo de valor la flexibilidad que este instrumento tiene sobre su par europeo. El ejercicio anticipado para esta clase de opciones no es óptimo, situación derivada del valor tiempo del dinero sobre el precio de ejercicio y el apalancar al comprar con un bono a descuento cuyo valor nominal sea igual a E según se desarrolló en el punto 3 propiedad 10.

7.2 Opciones americanas de compra sobre títulos que pagan dividendos

En el caso de que el título pague dividendos durante la vida de la opción la flexibilidad derivada del ejercicio anticipado en una opción de compra es valorada por el mercado lo que implica que el precio de la prima sea mayor, en este caso que la prima de una opción europea. Conforme fue explicado en el punto 3 propiedad 11, dependiendo del valor del tipo libre de riesgo y de los dividendos que pague el subyacente, se puede tener la siguiente desigualdad. $(E + D)\ell^{-rt} > S$, derivando en la siguiente desigualdad

$$C(S,t,E,D) > c(S,t,E,D) \qquad \textit{Ec 76}$$

Los modelos tradicionales para valuar opciones europeas sobre títulos que pagan dividendos, en el caso de las opciones americanas, son empleados introduciendo adecuaciones vinculadas al pago del dividendo y la flexibilidad vinculada el ejercicio del instrumento. El ajuste de la valuación de opciones debido al pago de dividendos será tratado en la próxima sección.

7.3 Opciones americanas de venta

Partiendo de la aplicación de la ecuación de paridad entra opciones de compra y venta, conforme fue expuesto en el punto 3 propiedad 13, de una opción de compra europea se puede obtener el valor de la opción de venta. En el caso de las opciones de venta americanas, dada la flexibilidad contenida en el ejercicio del derivado, no puede ser empleada directamente la ecuación de paridad mencionada para su valuación. Esta situación obedece al hecho de que existe una probabilidad favorable en el ejercicio antes del vencimiento, por lo que la flexibilidad del *put* americano a diferencia de su par europeo tiene valor. Por ejemplo si el precio del título cayera a cero, $S = 0$ seguramente la opción de venta sería ejercida por su tenedor implicando que una opción Americana de venta tendrá siempre un mayor valor que su par europeo, $P(S,t,E) \geq p(S,t,E)$

Las soluciones provenientes de modelos diseñados para valuar opciones americanas de venta requieren métodos de simulación. En esta área de investigación se puede citar los trabajos de Brennan y Schwartz (1977) y Cox, Ross y Rubinstein (1979) y más recientemente a Longstaff y Schwartz (2000). Los últimos, utilizando la simulación y el enfoque de mínimos cuadrados, valoran opciones de venta americanas donde la complejidad está dada entre continuar con la opción o ejercerla. De hecho el enfoque de mínimos cuadrados propuestos por los autores determina la mejor relación entre los flujos de caja derivados de mantener viva la opción y el valor de las variables que intervienen en la formación del precio de la opción si se ejerce en forma anticipada. De hecho el ejemplo utilizado por Longstaff y Schwartz tiene momentos de ejercicios anticipados definidos de manera discreta, utilizando la siguiente ecuación

$$V = \sum_{i=1}^{n} \left(Vi - a - bS_i - cS_i^2 \right)^2 \qquad \text{Ec 77}$$

donde S es el precio de la acción en cada momento de ejercicio y V representa al valor de mantener viva la opción descontado en forma continua hasta el momento en el cual se evalúa el ejercicio o no de la opción.

La mecánica de resolución es de atrás hacia delante para lo cual se proyectan distintos valores que puede adoptar el subyacente en cada punto de medición. Aplicando la ecuación 77 se obtiene el valor para el cual el ejercicio temprano es posible en cada momento de medición. El valor de la opción se determina descontando al tipo libre de riesgo cada uno de los valores determinados para los diferentes ejercicio tempranos, así el valor de una opción americana es

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_{i_t} \ell^{-rt} \qquad \text{Ec 78}$$

donde P_{i_t} es el valor de ejercicio estimado en cada punto de la opción de venta.

Si el valor obtenido de descontar los futuros flujos de pagos derivados del ejercicio temprano es superior al valor de mercado, la ecuación indica que no es conveniente el ejercicio prematuro de la opción.

La ventaja del método es que puede ser adaptado a diversas circunstancias, por ejemplo, si las posibilidades de ejercicio anticipadas son numerosas se puede extender el número de puntos de ejercicios, asimilando el comportamiento a un árbol binomial.

8. OPCIONES Y DIVIDENDOS

En la medida que el activo subyacente no pague dividendos el ejercicio anticipado de una opción de compra americana nunca es óptimo y su valor es el mismo que el de una opción de compra europea conforme fue explicado precedentemente. Si el título paga dividendos durante la vida de la opción, el valor del subyacente puede descender luego de la liquidación de los dividendos. El ejercicio anticipado de la opción de compra americana es eficiente ya que el titular puede tomar la propiedad del título y percibir los correspondientes frutos, situación la cual hace que el mercado asigne valor a la flexibilidad contenida en las opciones americanas y por ende los modelos de valuación convencionales empleados deben sufrir adecuaciones.

El tratamiento de los dividendos, en materia de valuación, se diferencia en debido al comportamiento de estos en función a si la frecuencia de los accesorios es discreta o la percepción de los mismos es continua a lo largo de la vida de la opción.

8.1 Dividendos discretos

Si el número de dividendos discretos es conocido durante el intervalo de tiempo entonces es posible ajustar el valor del activo subyacente en función a estos. El procedimiento implica que del valor de mercado del título se sustrae la corriente futura de dividendos esperados actualizados estos al tipo *r*.

Opciones de compra europeas. Sea D_j el dividendo esperado donde $j = 1,2....n$, la ecuación por la cual se ajusta el valor del título es igual a

$$S^* = S - \sum_{j=1}^{n} D_j \ell^{-rt} \qquad Ec\ 79$$

El nuevo precio del título S^* es utilizado en la fórmula de Black y Scholes para obtener el valor aproximado de la opción de compra europea. Si la opción no es ejercida en forma anticipada al pago de los dividendos, el futuro titular de la acción perderá los dividendos por lo que debe deducir del precio del titulo el valor actual de la corriente futura de dividendos.

Opciones de compra americanas. La explicación anterior sirve de base para la valoración de las opciones de compra americanas que pagan dividendos, ya que potencialmente pueden ser ejercidas de manera anticipada en la fecha previa a la liquidación del dividendo, con el fin de que el titular pueda capturar el fruto de la acción.

El procedimiento consiste en calcular su valor antes de la fecha de liquidación del dividendo aplicando la ecuación 48. Al pagarse dividendos en varias fechas hasta el vencimiento se deben calcular los valores de S^* para las distintas corrientes de flujos y seleccionar el valor resultante más alto de la opción de compra americana[35], el procedimiento descrito es conocido como *Pseudo American Option* y tiene como objetivo trazar un límite inferior de valor en la situación de que el ejercicio anticipado tenga valor.

Modelo binomial y los dividendos. Al emplear el método multiplicativo binomial se debe crear un árbol paralelo al del título, donde el valor inicial de la acción es S^*, en lugar de S en $t=0$. El valor es ajustado añadiendo el valor actual de los dividendos D_j para cada nodo del árbol en el momento j de liquidación. De esta manera el precio del título se ajusta de la siguiente manera,

$$S_j^* = S^* + D_j \ell^{-rt} \qquad Ec\ 80$$

Una vez construido el árbol se aplica el método binomial de valuación explicado en el punto 5 y en el caso de las opciones americanas se emplea el procedimiento desarrollado precedentemente.

8.2 Dividendos continuos

Si el título paga dividendos en forma continua, los cuales representan una pérdida para el tenedor de la opción, la solución de la ecuación de Black y Scholes para valuar una opción de compra que no paga dividendos puede ser modificada introduciendo el ajuste por liquidación de dividendos, donde S es reemplazado por el valor ajustado $S\ell^{-rt}$.

$S\ell^{-rt}$ representa el valor del subyacente menos el valor actual de la corriente futura de dividendos durante la vida de la opción y la '*ganancia de capital*' del valor de la opción.
Merton (1973) derivó la siguiente ecuación a partir de la ecuación de Black y Scholes para una opción de compra Europea que paga dividendos continuos D,

$$c(S,t,E,D) = S\ell^{-rt} N\left(d'_1\right) - E\ell^{-rt} N\left(d'_2\right) \qquad Ec\ 81$$

donde

$$d'_1 = \frac{\ln(S/E) + \left[(r-D) + \left(s^2/2\right)\right]t}{s\sqrt{t}}$$

$$d'_2 = d'_1 - s\sqrt{t}$$

[35] Para el cálculo del valor de la opción en el supuesto de ejercicios intermedios, el valor del precio de ejercicio debe ser ajustado por el valor actual de la corriente de dividendos que va desde el momento del ejercicio hasta el vencimiento de la opción.

Para opciones de compra americanas, el ajuste provisto por la ecuación 81 proporciona una aproximación al límite inferior de valor a tomar por la opción. Una vez más la técnica de la seudo opción Americana (*Pseudo-American Option*) debe ser utilizada con el fin de aproximar el precio de la prima, para un número limitado de fechas previas al pago de dividendos.

Muchos activos pagan dividendos continuos *D*, como el caso de las opciones sobre divisas y *commodities*. En el caso de las divisas *D* está representado por el tipo sin riesgo del país de origen de la moneda. Para el caso de los commodities *D*[36] está representado por los costos de almacenamiento (en este caso se supone que los activos no generan rendimiento y el dividendo es negativo).

9. OPCIONES EXÓTICAS

Las opciones hasta aquí estudiadas son los modelos tradicionales ya sea las opciones europeas como americanas también conocidas como *plain vanilla products*. Estos instrumentos tienen propiedades como el ejercicio, duración y subyacente que se encuentran estandarizados en los modelos contractuales que contienen a los derivados.

No obstante uno de los aspectos salientes de los derivados financieros es que a partir de los productos clásicos nace una familia de derivados que, por razones de cobertura, tributarias, legales o regulatorias, adoptan formas exóticas en el mercado de capitales. Los derivados tradicionales se emiten sin pensar en el perfil ni necesidades de la contraparte mientras que las opciones exóticas se emiten de acuerdo a los perfiles de riesgo y necesidades de las partes que integran la transacción[37]. En el trabajo se presentaran las opciones exóticas siguiendo la metodología propuesta por John Hull[38] (2004) quien replica una serie de artículos escritos por Reiner y Rubinstein[39] en 1991.

Bermudan Options. En este tipo de instrumento el ejercicio se encuentra acotado a un momento de tiempo determinado, ya sea una fecha específica o durante intervalos de tiempo durante la vida de la opción. Se conocen bajo el nombre de Opciones Bermudas en alusión al Triangulo de las Bermudas, el cual se ubica entre América del Norte y Europa, en virtud a que el instrumento se encuentra a medio camino entre la inflexibilidad del momento de ejercicio de una opción europea y la flexibilidad total de su par americana.

Forward Start Options. Son opciones donde la condición contractual es que su vida comienza a partir de un momento determinado en el futuro, por lo general el comienzo opera en el momento que la opción se encuentra en dinero (*on the money*). Siguiendo a Hull, para valorar la opción se parte de la ecuación tradicional para opciones europeas; si la opción comienza en el momento t_1 y expira en t_2 y el precio del activo en el momento cero es igual a S_0 y al comienzo de la opción es igual a S_1, aplicando el modelo de valoración se sabe que el precio de una opción de compra es proporcional al precio del título subyacente tal que al momento 1 el valor es igual a $c\left(S_1/S_0\right)$ donde *c* es el valor en el momento cero de una opción de compra en el dinero. Aplicando valuación neutral se tiene que el valor de una opción de compra al momento cero es igual a

---

[36] Si los *commodities* generan rendimientos, entonces el dividendo está compuesto por la diferencia entre el rendimiento y los costos de almacenamiento $D = Y - C$.

[37] Se dicen que se realizan '*over the counter*', ya que las partes arman la transacción.

[38] Un resumen del tema también puede encontrarse en Luemberger (1998) Chp 13.

[39] Rubinstein Mark, One for another, *Risk* July-August 1991, Option for the Undecider, *Risk* April 1991, Pay now choose later, *Risk* February 1991, Somewhere over the rainbow, *Risk* November 1991, Two in one, *Risk* May 1991. Con Eric Reiner, Breaking down the barriers, *Risk* September 1991, Unscrambing the binary code, *Risk* October 1991

$$c_f = \ell^{-rt} c \left(\frac{S_0 \ell^{(r-q)t_1}}{S_0} \right) \qquad Ec\ 82$$

c_f es el valor de la opción de compra.

El equivalente a certeza de S_1 es igual a $S_0 \ell^{(r-q)t_1}$ para una opción que paga dividendos *q*. Al ser un dato directamente observable del mercado el valor actual del subyacente S_0 y el precio de la opción en el momento cero *c* la ecuación 75 puede resumirse a la siguiente expresión,

$$c_f = c\ell^{-qt_1} \qquad Ec\ 83$$

Si *q=0* entonces el valor en el momento cero para la opción es igual al valor que tendría una opción europea común con igual duración (vida) al momento que comienza la opción futura (desde el momento uno al momento dos)

Compound options (Opciones Compuestas). Las opciones compuestas son opciones sobre opciones. Existe una matriz de dos por dos, con cuatro combinaciones de opciones compuestas a partir de las posiciones clásicas a saber: call sobre un call, put sobre un call, call sobre un put y un put sobre un put.

Las opciones compuestas se caracterizan por tener dos precios de ejercicio y dos fechas de ejercicio. En el caso de un call sobre un call, el primer ejercicio está en la fecha t_1, donde el tomador debe abonar el precio de ejercicio E_1 recibiendo la próxima opción de compra, con precio de ejercicio E_2 en la fecha t_2. En realidad el acceso a la segunda opción se encuentra condicionada a que la primera este en el dinero a fecha de ejercicio.

Geske (1979) desarrolló un modelo de valoración bajo el supuesto de que el subyacente sigue un proceso estocástico del tipo Browniano. El valor en el momento cero de una opción de compra europea sobre una opción de compra de igual características es

$$S_0 \ell^{qt_2} M\left(a_{1,} b_{1,} \sqrt{t_1 / t_2}\right) - E_2 \ell^{-rt_2} M\left(a_{2,} b_{2,} \sqrt{t_1 / t_2} - \ell^{-rt_1} E_1 N a_2\right) \qquad Ec\ 84$$

donde *M* es la función de probabilidad normal acumulativa bivariable y *N* la distribución de probabilidad normal acumulativa. Los parámetros son:

$$a_1 = \frac{Ln(S_0 / S^*) - \left(r - q + s^{\,2} / 2\right) t_1}{s\sqrt{t_1}}$$

$$b_1 = \frac{Ln(S_0 / E_2) - \left(r - q + s^{\,2} / 2\right) t_2}{s\sqrt{t_2}}$$

$$a_2 = a_1 - s\sqrt{t_1}$$

$$b_2 = b_1 - s\sqrt{t_2}$$

Si el precio actual S^* en t_1 esta por encima del primer precio de ejercicio la opción se ejerce y se activa la segunda de lo contrario el instrumento expira.

Para un put europeo sobre un call se tiene

$$E_2 \ell^{-rt_2} M\left(-a_{2,} b_{2,} \sqrt{t_1 / t_2}\right) - S_0 \ell^{qt_2} M\left(-a_{1,} b_{1,} \sqrt{t_1 / t_2} + \ell^{-rt_1} E_1 N - a_2\right) \qquad Ec\ 85$$

Para un call europeo sobre un put se tiene

$$E_2 \ell^{-rt_2} M\left(-a_{2,} -b_{2,} \sqrt{t_1 / t_2}\right) - S_0 \ell^{qt_2} M\left(-a_{1,} -b_{1,} \sqrt{t_1 / t_2} - \ell^{-rt_1} E_1 N - a_2\right) \qquad Ec\ 86$$

La opción compuesta de un put sobre un put es igual a

$$S_0 \ell^{qt_2} M\left(a_{1,} -b_{1,} -\sqrt{t_1 / t_2}\right) - E_2 \ell^{-rt_2} M\left(a_{2,} -b_{2,} -\sqrt{t_1 / t_2} + \ell^{-rt_1} E_1 N a_2\right)$$

Chooser Options (As you like it option). Este tipo de instrumento tiene la particularidad de que el titular, luego de transcurrido un determinado periodo de tiempo puede seleccionar en convertir el mismo en una opción de compra o de venta. Si la elección se realiza en t entonces el valor de la opción es max (c, p) donde c es el valor del call que subyace en la opción y p es el valor del put subyacente. En la medida que las opciones subyacentes en la *Chooser Option* tengan igual precio de ejercicio, sean sobre el mismo subyacente y similar fecha de ejercicio aplicando el principio de paridad entre una opción de compra y de venta se obtiene la siguiente formulación

Suponiendo que el precio del subyacente es S_1 en t_1, el ejercicio se hace a un precio E en fecha t_2 y r el tipo sin riesgo, de aplicar la teoría de la paridad entre put-call se expone la siguiente ecuación,

$$\max(c,p)=\max(c,c+E\ell^{-r(t_2-t_1)}-S_1\ell^{-q(t_2-t_1)}) \qquad Ec\ 87$$

Desarrollada queda expuesta como

$$\max(c,p)=c+\ell^{-q(t_2-t_1)}\max(0,-E\ell^{-(r-q)(t_2-t_1)}-S_1) \qquad Ec\ 88$$

Esta opción exótica es un armado[40] de:

1) Una opción de compra con precio de ejercicio E al vencimiento t_2
2) Una opción de venta con precio de ejercicio $E\ell^{-(r-q)(t_2-t_1)}$ y vencimiento t_1

Los modelos son de mayor complejidad cuando los perfiles de las opciones subyacentes de compra y venta tienen diferentes perfiles, tal que para algunas combinaciones se aplica el modelo de valoración indicado para las opciones compuestas.

Barrier Options. Este tipo de opciones tiene como característica que sus resultados van a estar vinculados al hecho de que el activo subyacente alcance determinada meta o barrera en su precio. Se tranzan varios tipos de estas opciones las cuales se tornan atractivas para los tenedores ya que son menos costosas que las opciones tradicionales. Estas pueden clasificarse en dos grupos, *Knock-out options* y *Knock-in options*.

Las opciones *Knock-out options* dejan de tener valor cuando el activo subyacente llega a determinado valor el caso inverso se aplica para las *Knock-in options* las cuales comienzan a tener valor cuando se alcanza el nivel pactado en el instrumento.

Una especie conocida de este tipo de instrumentos son las *down-and-in* y *down-and-out calls.* Dado un precio objetivo o barrera H un *down-and-out* deja de existir cuando el subyacente alcanza el precio H por lo que seria una especia de *Knock-out options* mientras que un *down-and-in* comienza su vigencia superada la barrera H por lo que estamos frente a un *call* con la modalidad *Knock-in options.* Para un *down-and-in call*, si $H < E$ se tiene:

$$Cdi=S_0\ell^{-qt}(H/S_0)\,N(g)-E\ell^{-rt}(H/S_0)^{2l-2}N(g-s\sqrt{t}) \qquad Ec\ 89$$

donde

$$l=\frac{r-q+s^2/2}{s^2} \text{ y } g=\frac{\ln\left[H^2/(S_0E)\right]}{s\sqrt{t}}+l\,s\sqrt{t}\,.$$

Sabiendo que estas opciones tiene un menor valor que un call común se obtiene la siguiente paridad para despejar el valor de *down-and-out,*

$$Cdo=C-Cdi \qquad Ec\ 90$$

Si $H > E$ entonces la que tiene valor es la forma *down-and-out,*

[40] En las publicaciones específicas se conoce a estas combinaciones bajo la denominación de *package*.

$$Cdo = S_0 N(x_1)\ell^{-qt} - E\ell^{-rt} N(x_1 - s\sqrt{t}) - S_0\ell^{-qt}(H/S_0)^{2l} N(g_1) + E\ell^{-rt}(H/S_0)^{2l-2} N(g_1 - s\sqrt{t}) \qquad Ec\ 91$$

donde

$$x_1 = \frac{\ln\left[\left(S_0/H\right)\right]}{s\sqrt{t}} + l\,s\sqrt{t} \text{ y } g_1 = \frac{\ln\left[\left(H/S_0\right)\right]}{s\sqrt{t}} + l\,s\sqrt{t}$$

$$Cdi = C - Cdo \qquad Ec\ 92$$

También surgen combinaciones como:

a) *Up-and-out call:* Una opción de compra tradicional que deja de existir en la medida que el activo subyacente alcance un determinado precio *H* el cual se lo pacta contractualmente superior al precio corriente del activo.
b) *Up-and-in call:* A la inversa que el caso anterior la existencia de la opción depende de que el precio del subyacente rebase la barrera *H* en el momento especificado.
c) Las opciones de venta son definidas de manera similar a las opciones de compra tal que
d) *Up-and-out put:* Es una opción de venta que cesa en su existencia cuando la barrera *H* que es superior al precio corriente del activo subyacente es superada por este.
e) *Up-and-in put:* El derivado toma valor en la medida que en el momento pactado el precio del subyacente supere la barrera *H*.
f) *Down-and-out put:* Es una opción que deja de existir si el precio del subyacente alcanza la barrera *H*, la cual es menor al precio corriente del activo.
g) *Down-and-in put:* Toma valor solamente cuando la barrera es alcanzada.

Un excelente desarrollo de las ecuaciones involucradas en la valoración de este tipo de opciones se puede encontrar en la serie de artículos de Rubinstein (1991-1992) y en Hull (2004).

Lookback options[41]**.** Se caracterizan en virtud a que el precio de ejercicio es el máximo o mínimo valor que alcanza la acción durante la duración del instrumento. Los flujos de fondos asociados a una opción europea de compra del estilo que se está tratando es la diferencia entre el precio final del subyacente menos el valor mínimo de este durante la vida de la opción. En el caso de una opción europea de venta del estilo lookback es la diferencia entre el máximo valor adquirido por el subyacente menos el precio resultante al momento del ejercicio.

Siguiendo a Hull (2004) un lookback call es la manera que el tenedor del instrumento puede comprar el precio del subyacente al valor más bajo mientras que un lookback put es la manera que el tenedor pueda realizar el subyacente al precio más alto. En este caso estamos frente a lo que se conocen como lookback flotantes en donde una opción de compra tendría el siguiente perfil

$$c = \max(0, S - S_{\min}) \qquad Ec\ 93$$

Y una opción de venta sería

$$p = \max(0, S_{\max} - S) \qquad Ec\ 94$$

Son opciones que por lo general son ejercidas. Estas opciones por lo general se concretan sobre *commodities*. Una variante son las lookback fijas en donde el precio de ejercicio se establece al momento de lanzar el instrumento, el beneficio es la diferencia entre el precio óptimo y el precio de ejercicio tal que los perfiles quedan planteados de la siguiente manera para un call

$$c = \max(0, S_{\max} - E) \qquad Ec\ 95$$

[41] Un completo trabajo de valuación de loockback options mediante la utilización del método binomial se puede encontrar en Neuman y Zanor (2005).

Para una opción de venta sería

$$p = \max(0, E - S_{\max}) \qquad \textit{Ec 96}$$

Para un lookback call la ecuación analítica es

$$S_0^{-qt} N(a_1) - S_0^{qt} \frac{s^2}{2(r-q)} N(-a_1) - S_{\min}^{-rt} \left[N(a_2) - \frac{s^2}{2(r-q)} \ell^{y_1} N(-a_3) \right] \qquad \textit{Ec 97}$$

$S_{\min}$ es el mínimo precio del subyacente a la fecha de valuación, si la opción se lanza al momento de valoración $S_{\min} = S_0$. Los parámetros son:

$$a_1 = \frac{\ln(S_0 / S_{\min}) - (r - q - s^2/2)t}{s\sqrt{t}}$$

$$a_2 = a_1 - s\sqrt{t}$$

$$a_3 = \frac{\ln(S_0 / S_{\min}) + (-r + q + s^2/2)t}{s\sqrt{t}}$$

$$y_1 = \frac{\ln(S_0 / S_{\min}) 2(-r + q + s^2/2)}{s^2}$$

Para el caso de una opción de venta

$$S_{\max}^{-rt} \left(N(b_1) - \frac{s^2}{2(r-q)} \ell^{y_2} N(-b_3) \right) + S_0 \ell^{-qt} \frac{s^2}{2(r-q)} N(-b_2) - S_0^{-qt} \qquad \textit{Ec 98}$$

donde $S_{\max}$ es el máximo valor que alcanza el subyacente hasta la fecha de valoración. Si la opción se lanza en el momento de valuación entonces $S_{\max} = S_0$. Los parámetros son,

$$b_1 = \frac{\ln(S_{\max} / S_0) + (-r + q + s^2/2)t}{s\sqrt{t}}$$

$$b_2 = b_1 - s\sqrt{t}$$

$$b_3 = \frac{\ln(S_{\max} / S_0) + (r - q.s^2/2)t}{s\sqrt{t}}$$

$$y_1 = \frac{\ln(S_{\max} / S_0) 2(r - q - s^2/2)}{s^2}$$

Siguiendo a Neuman (2005) estas ecuaciones son útiles en la medida que se puede conocer o estimar los valores de frontera máximos y mínimos para este tipo de opciones. Los métodos que se aplican son los denominados dependientes del camino (*path-dependence*) donde se toma el promedio del valor de la acción subyacente a lo largo del recorrido pudiendo suponerse el comportamiento de la variable aleatoria continuo, discreto o mixto.

Si se utiliza un método binomial o trinomial en el caso de opciones europeas al vencimiento se conoce el precio de la opción lookback por lo que se comienza el recorrido hacia atrás para determinar el valor del call o put. En el caso de opciones americanas dependientes del camino la complejidad aumenta debido a que en cada nodo de evaluarse la posibilidad de ejercicio temprano del subyacente, es decir si este último es mejor que valuar hacia atrás (que es lo mismo que mantener viva la opción durante su vida). La complejidad reside en que tiene que recorrer todas las ramas que surgen del árbol. Aquí de manera intuitiva se deben excluir los casos que no pueden darse con el fin de morigerar la complejidad del árbol.

Binary options. Son opciones que se caracterizan por tener un flujo de pagos discontinuo. Por ejemplo una típica opción binaria son las conocidas como *cash-or nothing call*, en donde la opción se extingue si a fecha de ejercicio el valor del subyacente está por debajo del precio de ejercicio y una suma fija si termina por encima.

La probabilidad de que el activo al vencimiento se encuentre por debajo del precio de ejercicio se puede notar como $N(d_2)$. Si el monto fijo a pagar es igual a K entonces el valor de la opción es igual a

$$K\ell^{rt}N(d2) \qquad \textit{Ec 99}$$

Una opción de venta de este estilo (*cash-or nothing put*) es análoga a la opción de compra, adquiriendo valor cuando el subyacente está por debajo del precio de ejercicio y carece de valor cuando supera el ejercicio. La ecuación de una opción binaria de venta es

$$K\ell^{rt}N(-d2) \qquad \textit{Ec 100}$$

Otro tipo de opción binaria es la conocida como *asset-or-nothing asset*. Tienen similar comportamiento que las opciones binarias anteriores pero en este caso en lugar de pagar una suma fija paga la totalidad del valor del subyacente si este supera el ejercicio o nada si se encuentra por debajo. Por lo tanto la ecuación es

$$S_0\ell^{-qt}N(d1) \qquad \textit{Ec 101}$$

Una opción de venta de este estilo paga el monto total del activo si este, al vencimiento, no supera el precio de ejercicio. De la ecuación precedente se desprende el valor del *put*

$$S_0\ell^{-qt}N(-d1) \qquad \textit{Ec 102}$$

Una opción de compra europea es la réplica de una posición larga en una opción binaria del tipo *asset-or-nothing call* y una posición corta en un *cash-or-nothing call* donde la suma fija de esta última es similar al precio de ejercicio de la opción de venta. Similarmente una opción de venta europea es la réplica de una posición larga en una opción binaria *cash-or-nothing put* igual al precio de ejercicio y una posición corta en un *asset-or-nothing put.*

Shout options. Son opciones europeas donde el titular puede ejercerlas (gritar) al lanzador por única vez durante su existencia. Al vencimiento el tenedor recibe el beneficio de una opción europea tradicional o el pago del valor intrínseco al momento del ejercicio voluntario, el mayor de los dos. Utilizando modelos continuos se puede valuar esta opción mediante la siguiente relación,

$$\max(0, S_t - S_s) + (S_s - E) \qquad \textit{Ec 103}$$

donde E es el precio de ejercicio, S_t es al valor del subyacente al vencimiento de la opción y S_s es el precio del subyacente al momento del ejercicio voluntario.

Por lo general se usan árboles de decisión binomiales o trinomianles para la valuación, donde en cada nodo se determina el valor intrínseco a los efectos de determinar la conveniencia o no del ejercicio voluntario.

Asian options. Son opciones, al igual que las *lookback options*, dependientes del camino del subyacente (*path-dependence*) ya que los flujos de fondos dependen del precio promedio del activo subyacente durante la vida o fracción de la duración de la opción. El perfil del beneficio de una opción de compra es igual a,

$$\max(0, S_{\bar{x}} - E) \qquad \textit{Ec 104}$$

donde $S_{\bar{x}}$ es el precio promedio del subyacente. Para el caso de una opción de venta se tiene,

$$\max(0, E - S_{\bar{x}}) \qquad \textit{Ec 105}$$

Otro tipo de opciones asiáticas son aquellas que toman como precio de ejercicio el precio promedio del activo subyacente, así para el caso de una opción de compra el perfil de beneficios está dado por

$$\max(0, S_t - S_{\bar{x}}) \qquad \textit{Ec 106}$$

Para el caso de una opción de venta se tiene

$$\max(0, S_{\bar{x}} - S_t) \qquad \textit{Ec 107}$$

Existen modelos analíticos para valuar las opciones asiáticas ya sea aplicando modelos continuos donde se supone que el subyacente *S* se encuentra distribuido lognormalmente y $S_{\bar{x}}$ es un promedio geométrico de *S*. También se utilizan modelos binomiales y trinomiales para valuar opciones dependientes del camino como las tratadas en el presente apartado.

Options to exchange one asset for another (Opciones de intercambio un activo por otro). Estas opciones se dan en transacciones donde se intercambian activos, por ejemplo una opción donde el activo a entregar sea de un valor *U* y el activo que se recibe se denota con la letra *V*, el perfil de beneficios se puede describir como,

$$\max(V_t - U_t, 0) \qquad \textit{Ec 108}$$

El desarrollo del modelo de valuación de este tipo de opciones fue desarrollado por Margrabe (1978) , si los activos de la ecuación anterior siguen un proceso estocástico del tio movmiento geométrico browniano, suponiendo volatilidades s_v y s_u con un coeficiente de correlación r_{vu} entre *U* y *V* en donde ambos activos generan rendimientos q_v y q_u la ecuación de valoración de una opción de compra es

$$V_t \ell^{-q_u} N(d_1) - U_t \ell^{q_u} N(d_2) \qquad \textit{Ec 109}$$

Siendo los parámetros

$$d_1 = \frac{\ln(V_0 / U_0) + \left(q_u + q_v + \overline{s} / 2\right)t}{\overline{s}\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \overline{s}\sqrt{t}$$

$$\overline{s} = \sqrt{s_u^2 + s_v^2 - 2 r_{vu} s_v s_u}$$

La variable $\overline{s}$ es la volatilidad de *V/U* . En esta ecuación no se incorpora el tipo libre de riesgo *r* ya que las variaciones en dicha tasa tiene el mismo efecto sobre las tasas de crecimientos para ambos activos tanto el subyacente propiamente dicho como el activo que actúa como precio de ejercicio. En el caso de opciones de cambio americanas Rubinstein (1999) desarrolla el modelo correspondiente donde la valuación se realiza mediante la utilización del método binomial.

10. EXTENSIONES Y DERIVACIONES EN LOS MODELOS DE VALORACIÓN

El clásico modelo de Black y Scholes parte de las premisas que los movimientos de la acción son explicados por un proceso estocástico continuo donde el comportamiento de la varianza del precio es constante en el tiempo y una estructura determinada en lo que respecta a la figura contractual para la opción. Si se alteran los supuestos vinculados al comportamiento del subyacente como de las condiciones del instrumento, por ejemplo pactar precios de ejercicios variables, el tradicional modelo de valuación estudiado debe corregirse con el fin de captar las situaciones mencionadas. A continuación se presentará una breve reseña de algunos de los avances más importantes en esta materia vinculados al proceso estocástico seguido por el subyacente.

10.2 Modelo de difusión por salto (*Jump Diffusion Model*, o *Merton Model*)

El modelo de valuación de Black y Scholes supone que los precios del subyacente son generados por un proceso estocástico continuo del tipo Movimiento Browniano conforme fue visto en las secciones anteriores. No obstante se puede suponer que la acción siguen procesos estocásticos distintos al mencionado los cuales pueden tener un comportamiento del tipo *jump process*.

Según se explicó, el proceso estocástico denominado *jump process* es aquel donde la variable aleatoria realiza movimientos infrecuentes de carácter discretos o saltos (*jumps*). Se puede citar a modo de ejemplo los movimientos que siguen algunos *commodities* como el caso del petróleo, el cual puede ser visto como un proceso mixto de Movimiento Browniano y *jump process*, ya que durante tiempos normales los movimientos en el precio del subyacente son continuos, pero ante determinadas situaciones derivadas del contexto el precio puede dar saltos ascendentes o descendentes de significativa amplitud semejándose a un comportamiento discreto.

En realidad nos encontramos frente a procesos mixtos donde el comportamiento que sigue la variable aleatoria se explica por un Movimiento Browniano y de Poisson. Para el último proceso la variable aleatoria tiene saltos o variaciones significativas que siguen una distribución de probabilidad de Poisson.

Los saltos son denominados eventos y la tasa media de generación de eventos es denotada con el símbolo l, durante un intervalo temporal dt. La probabilidad de que un evento ocurra está dada por $l\,dt$ y la probabilidad de que un evento no ocurra está explicada por el complemento 1- $l\,dt$. El evento tiene una amplitud de salto del tamaño k. Si p denota un proceso de Poisson, entonces se tiene que

$$\mathrm{d}p = \begin{cases} 0 \text{ con probabilidad } 1- l \text{ dt} \\ \text{k con probabilidad } l \text{ dt} \end{cases}$$

Merton (1976) propone un modelo de valoración donde se conjugan ambos procesos estocásticos. Si se define a u como el rendimiento del subyacente neto de dividendos, aplicando el método de transformación de ecuaciones diferenciales de Îto se plantea una ecuación para explicar la variación en el precio del título de manera que;

$$\frac{dS}{S} = (u - lk)dt + s\ dz + dp \qquad Ec\ 110$$

donde p indica el proceso continuo de Poisson, $(u - lk)dt$ la pendiente del movimiento, k la amplitud del salto y $s\,dz$ el proceso de Wiener. Existe una probabilidad $l\ dt$ que se produzca una variación del tamaño k o una probabilidad 1- $l\ dt$ que no haya variación.

Uno de los supuestos principales del modelo está en que los saltos no representan riesgo sistemático, es decir no son tomados en cuenta por los inversores para valorar el instrumento. Este supuesto es consistente con el hecho de que una cartera de cobertura armada bajo el criterio de valoración clásico elimina la incertidumbre sistemática generando como rendimiento el tipo sin riesgo, pero no elimina la incertidumbre respecto de los saltos, los cuales generan un rendimiento en exceso por el tipo sin riesgo.

10.2 Modelo de elasticidad constante de la varianza (*Constant elasticiy of variance model* o CEV)

El modelo fue desarrollado por Cox and Rubinstein (1976) donde la principal idea reside en vincular los movimientos del activo subyacente con el grado de riesgo operativo y financiero de la firma a la cual pertenece la acción. Así la ecuación diferencial queda planteada como

$$\frac{dS}{S} = mSdt + s\, S^{a}\, dz \qquad \textit{Ec 111}$$

donde la expresión es similar el Movimiento Browniano Geométrico de Black y Scholes con la diferencia de que se incorpora un factor de elasticidad, como exponencial del precio de la acción, a con valores positivos.

La volatilidad del subyacente es $s\, S^{a-1}$.Si a =1 entonces la elasticidad constante de la varianza se reduce al modelo de Black y Scholes, si a < 1 la desviación estándar de los rendimientos el subyacente se mueve inversamente que el precio de la acción, es decir crece a medida que el precio del activo decrece[42].

El argumento que sostiene al presente modelo reside en el hecho de que toda firma tiene un nivel de costos fijos, tanto operativos como financieros, los cuales son ineludibles independientemente del nivel de ingresos brutos operativos. Una reducción de los ingresos tiene como efecto una reducción en el valor de la firma y un incremento en su riesgo a consecuencia del apalancamiento financiero y operativo. Estas ideas sirven en este modelo para explicar la relación inversa entre precio de la acción y riesgo.

El valor de una opción europea bajo el modelo CVE es

Para $0 < a < 1$

$$c = S_0 \ell^{-qt}\left[1 - c^2(a, b+2, c)\right] - E\ell^{-rt} c^2(a,b,c) \qquad \textit{Ec 112}$$

$$p = E\ell^{-rt}\left[1 - c^2(a,b,c)\right] - S_0 \ell^{-qt} c^2(a, b+2, c) \qquad \textit{Ec 113}$$

Para $a > 1$

$$c = S_0 \ell^{-qt}\left[1 - c^2(c, -b, a)\right] - E\ell^{-rt} c^2(a, 2-b, c) \qquad \textit{Ec 114}$$

$$p = E\ell^{-rt}\left[1 - c^2(a, 2-b, c)\right] - S_0 \ell^{-qt} c^2(c-b, a) \qquad \textit{Ec 115}$$

donde

$$a = \frac{E^{2(1-a)}}{(1-a)^2 s^2 t}, \quad b = \frac{1}{1-a}, \quad c = \frac{(S\ell^{(r-q)t})^{2(1-a)}}{(1-a)^2 s^2 t}$$

La distribución de probabilidad $c^2(a,b,c)$ es una distribución de probabilidad sesgada con un parámetro central e.

10.3 Modelo compuesto de Geske (1979)

Es un modelo para valuar opciones compuestas o también conocidas como opciones de opciones ya que considera al patrimonio de una firma apalancada como una opción de compra sobre la inversión total de la empresa Para explicar entender el capital propio de la firma como una

---

[42] Esto hace que la distribución de probabilidad del precio del activo se encuentre sesgada a la izquierda suponiendo que a menor precio más volátil el activo.

opción de compra sobre el valor total de la empresa, se supone que existen dos fuentes de fondos: acciones y deuda con riesgo. La deuda se compone por bonos a descuento con valor nominal D y duración T . Los bonos se encuentran respaldados por el total de activos de la firma y los propietarios de los títulos de deuda no pueden solicitar la quiebra de la firma hasta el vencimiento de los bonos y la empresa no paga dividendos.

Para una opción financiera, el activo subyacente de una opción de compra sobre acciones de una firma son las mismas especies *S.* Las acciones de una empresa apalancada pueden ser analizadas como una opción de compra sobre el valor de la empresa. Tomando los conceptos provenientes de la Teoría de Opciones, al vencimiento de la deuda, si el valor de la firma V excede el valor de la deuda D los accionistas ejercen su opción de compra pagando el valor nominal de la deuda y quedándose con el excedente de riqueza. Por el contrario, si el valor de la firma al vencimiento es inferior al valor de los bonos, *no ejercen* su opción de compra comenzando el proceso de quiebra y liquidación de los activos de la empresa destinados a cancelar el pasivo exigible. Así al vencimiento la riqueza de los accionistas se puede escribir como,

$$S = \max\left(V - D, 0\right) \qquad Ec\ 116$$

Una cartera riesgosa se puede construir de la siguiente relación,

$$S + P = B + C \qquad Ec\ 117$$

donde S es el activo subyacente, B es el valor de un bono a descuento, C y P es el valor de una opción de compra y de venta sobre el activo subyacente.

Si en la ecuación 2 se sustituye S por V que representa al valor de la firma y a C por S que representa a las acciones sobre la firma se tiene la siguiente igualdad

$$V = (B - P) + S \qquad Ec\ 118$$

La ecuación 118 indica que el valor de una empresa apalancada[43] se descompone en dos partes:

1) La posición de los accionistas *S*, la cual es equivalente a una opción de compra.
2) La posición de los acreedores *(B-P)* la cual es igual al valor actual de bono a descuento libre de riesgo menos el valor de una opción de venta europea. Al vencimiento los acreedores reciben,

$$B - P = MIN\left[V, D\right] \qquad Ec\ 119$$

En el cuadro 7 se expone cómo el valor de los pagos realizados a las acciones y a la deuda riesgosa son iguales al valor de la firma independientemente del escenario que acontezca. Se parte del supuesto de un mercado sin tributos, costos de transacción y costos de bancarrota y reorganización[44].

Cuadro 7: Flujo de fondos al vencimiento de la deuda de los accionistas y acreedores.

Conceptos	*Si V < D*	*Si V > D*
Posición de los accionistas: Opción de compra *S*	0	*(V-D)*
Posición de los acreedores: Bono libre de riesgo	*D*	*D*
Opción de venta *P*	-*(D-V)*	0
Riqueza total acreedores: Posiciones accionistas y acreedores:	*V* 0+*V*=*V*	*D* *V-D*+*D*=*V*

[43] En este caso el activo riesgoso o subyacente.

[44] Se entiende todas las transferencias de riqueza a terceras partes, en la práctica los terceros que actúan en los procesos de reorganización y disolución de organizaciones.

Al vencimiento de la deuda el valor total de la firma es distribuido entre los accionistas y los acreedores de la empresa. Si la organización tuvo una satisfactoria generación de fondos, entonces el valor de la empresa es mayor al de la deuda, $V > D$. A consecuencia de ello se paga la deuda y la opción de venta europea *P* no se encuentra en zona de beneficios por lo que expira sin ser ejercida. Por el contrario si el valor de la firma es inferior al valor de la deuda, los acreedores solicitarían la quiebra y realización de los activos para cobrar sus acreencias más una opción de venta ha sido ejercida contra ellos ya que estos pierden la diferencia entre el valor nominal de la deuda *D* y el valor de mercado de la empresa *V*. Si bien en teoría ganan un valor de *D*, tienen que soportar una pérdida igual a *(D-V)*. No obstante su posición neta es siempre el valor de mercado de la empresa *V*.

En el modelo de Geske una opción de compra es realmente una opción compuesta ya que esta depende de siete variables en vez de las características cinco. Los elementos que se añaden en esta formulación son *D/V* el ratio entre deuda y valor de mercado de la firma y *tb* el plazo de vencimiento de la deuda, tal que la ecuación queda planteada de la siguiente manera,

$$c = f\left(S, X, r_f, T, s, D/V, t_b\right) \qquad Ec\ 120$$

10.4 Modelo de difusión sustituida (*Displaced diffusion model*)

Desarrollado por Rubinstein (1983) también bajo la inteligencia de considerar a una opción de compra como una opción sobre opciones, se concentra en los activos de la firma y los divide en carteras de activos riesgosos y sin riesgo incorporando dos parámetros como la volatilidad instantánea de la tasa de rendimiento de los activos riesgosos y la proporción que estos representan en la inversión total de la firma.

10.5 Modelo de función de volatilidad implícita (*Implied Volatility Function, IVF*)

Es un modelo desarrollado por Derman, Kari, Dupire and Rubinstein (1994) que se utiliza para determinar el precio de las opciones europeas independientemente de la forma que adopte la volatilidad del subyacente. El equivalente a certeza en este modelo se plantea de la siguiente manera,

$$dS = \left[r(t) - q(t)\right]Sdt + s\ (S,t)Sdz \qquad Ec\ 121$$

donde *r(t)* es el tipo de interés a futuro con vencimiento en *t* y *q* es la tasa de pago de dividendos en función del tiempo. La volatilidad $s\ (S,t)$ es una función tanto del precio del activo como del tiempo, los autores brindan una ecuación de cálculo para la volatilidad,

$$\left[s\ (E,t)\right]^2 = 2\frac{\partial cm/\partial t + q(t)cm + E\left[r(t) - q(t)\right]\partial cm/\partial E}{E^2(\partial^2 cm/\partial E^2)} \qquad Ec\ 122$$

$cm(E,t)$ es el valor de mercado de una opción de compra europea con precio *E* y vencimiento en *t* s existen un número importante de opciones de compra europeas utilizando la ecuación precedente se puede estimar la volatilidad del instrumento.

Otra metodología propuesta por los autores son los árboles implícitos *(implied tree)*. Implica construir árboles del precio del activo que sean consistentes con el precio de la opción en el mercado. De hecho es un árbol binomial donde mediante un proceso de inducción de adelante hacia atrás se determina los precios en cada nodo y la probabilidad involucrada.

10.6 Modelos que son dependientes del camino (*Path-dependent derivatives*)

Estos modelos se caracterizan porque el precio de la opción depende del recorrido pasado del precio del subyacente y no de su valor final. Las opciones asiáticas y las lookback son ejemplos ya que las primeras dependen del precio promedio del activo subyacente y las segundas dependen del precio máximo o mínimo.

Cuando no existe solución analítica disponible, una alternativa es la utilización de la simulación mediante el método Montecarlo. Así se obtiene un valor muestral del derivado, mediante la simulación del recorrido aleatorio de precio del subyacente en un mundo neutral al riesgo, descontando los pagos al tipo libre de riesgo. No obstante el método de simulación tiene sus limitaciones (Trigeorgis, 1996) y debe sustituirse mediante la construcción de árboles de decisiones. Un desarrollo de los árboles de decisiones para valuar opciones del tipo lookback y asiáticas puede encontrase en Neuman y Zanor (2005), Hull (2004) y Num (2004).

10.7 Otros desarrollos

El modelo estocástico de Hull and White (1987) asigna un proceso estocástico similar al de Black y Scholes con reversión a determinado nivel de tasa de rendimiento no estocástica. Demuestran que si el proceso estocástico no se correlaciona con el precio del activo el modelo es similar al clásico modelo de valoración mencionado, incorporando la distribución de probabilidad de la varianza promedio durante la vida de la opción.

Rubinstein (1994) ha sugerido un modelo donde la volatilidad es una función determinística del precio del título y del tiempo. Con este enfoque se obtiene la probabilidad implícita equivalente a cierto de los títulos derivada de un análisis de regresión de los precios observados de las opciones. Esta probabilidad equivalente a certeza es utilizada para determinar los movimientos *p* y *1-p* de la distribución multiplicativa binomial con el fin de construir el árbol que permita derivar la secuencia de comportamiento de la variable aleatoria.

Uno de los puntos a tener en cuenta es que el número de los potenciales resultados que se pueden obtener son significativos en virtud a las variables que se sujeten a procesos estocásticos. De hecho los modelos parten de un conjunto de supuestos relacionados al comportamiento de los procesos que sigan el activo subyacente, el tipo de interés y el precio del riesgo en el mercado de los factores de riesgo.

Distintas combinaciones e interacciones de dichos factores dan lugar a un importante número de modelos de valuación de opciones. Estos modelos exceden las pretensiones de este trabajo; sólo como enumeración se pueden citar los trabajos de Merton (1973) donde los variables aleatorias son el título y el tipo libre de riesgo, Stein (1991) y Heston (1993), que utilizan un proceso estocástico de Fourier y proponen incorporar un conjunto específicos de riesgo derivados de los títulos que actúan como subyacentes.

Y los recientes trabajos de Bakshi, Cao and Chen (1997) y Bates (2000), que trabajan sobre modelos que incorporan procesos estocásticos para la volatilidad (que no se supone constante como en el modelo de Black & Scholes), proceso estocástico para el tipo de interés y para los movimientos (ascendentes y descendentes) del activos subyacente. El modelo es conocido como *SVSI-J model*. La estructura de valuación de una opción de compra es similar a la clásica ecuación de Black y Scholes conforme surge de la ecuación,[45]

$$c = S(p_1) - E_{\ell}^{-rt} N(p_2) \qquad \text{Ec 123}$$

donde p_1 y p_2 son probabilidades equivalentes a certeza.

[45] Para mayor detalle ver Bakshi, Cao and Chen (1997).

En este modelo el precio de una opción de compra es una función de un conjunto de variables adicionales a las del clásico modelo de Black y Scholes como la correlación entre el precio del activo y el proceso estocástico que sigue la volatilidad de este, la frecuencia de los saltos (ascendentes y descendentes), la media y dispersión de los saltos del precio del título, la tasas de velocidad de ajuste del precio, la media de largo plazo y el coeficiente de variación del precio del activo subyacente.

11. CONCLUSIONES

Los modelos de valuación de opciones son desarrollos recientes y su potencial en la resolución de problemas financieros es significativo desde el momento que la mayoría de éstos implican flujos inciertos. El precio de una opción es función de cinco parámetros: el valor del título subyacente, el tipo libre de riesgo, la varianza, el tiempo a la expiración y el precio de ejercicio. Se debe tener en cuenta que una de las cinco variables mencionadas no es observable directamente del mercado como el caso de la varianza del activo subyacente, el talón de Aquiles de todo modelo de valoración.

No obstante, el atractivo de la teoría de las opciones reside en que el precio del instrumento no depende de las preferencias frente al riesgo del inversor ni de la tasa de rendimiento esperada del activo subyacente, a diferencia de los modelos de equilibrio como el CAPM y APM. Esto es así debido a que el precio de las opciones es determinado a partir de condiciones de arbitraje que permiten al inversor construir carteras de cobertura que replican perfectamente el valor de un *call* o *put*.

Las pruebas destinadas para evaluar el funcionamiento de los modelos de valoración todavía tienen un amplio camino que recorrer. Los resultados obtenidos son mixtos ya que varios trabajos han reportado que algunos modelos que incorporan factores de riesgo adicionales no tienen mejor capacidad de predicción que el clásico modelo de Black-Scholes-Merton. Por otro lado varias pruebas indican que se deben incorporar modificaciones al tradicional modelo de valoración, como el caso de suponer que la varianza del título sigue un proceso estocástico o que el proceso estocástico del subyacente está sujeto a saltos aleatorios (*random jumps*).

La teoría de las opciones también tiene implicancia en las decisiones estratégicas y tácticas vinculadas con la estructura de capital, el presupuesto de inversión, fusiones y adquisiciones y valuación de proyectos de inversión mediante el amplio campo que presenta para el futuro la teoría de las opciones reales.

REFERENCIAS

Amram, M. and Kulatilaka, N., *Real Options*, Harvard Business School Press, Boston, 1998

Bakshi, Cao and Chen, Empirical performance of alternative option pricing models, *Journal of Finance*, 1997

Black, F. and Scholes, M., The valuating of options contracts and a test of market efficiency, *Journal of Finance*, 1972

Black, F. and Scholes, M., The pricing of options and corporative liabilities, *Journal of Political Economics*, 1973

Black, F., How we came up with the option formula, *Journal of Portfolio Management*, 1989 (en español, en *Cuadernos de Finanzas 34* de SADAF)

Blank, S., Carter, C.A. and Scheimesing, Brian H., *Futures and Options Markets: Trading in Financials and Commodities*, Prentice-Hall, 1990

Bouchad, J P and Potters M,, *Theory of Financial Risk*, Cambridge, 2000

Brennan, M and Trigeorgis, L., *Project flexibility, agency and competition: new developments in the theory and application of real options*. Oxford University Press, 2000

Chicago Board Options Exchange, *Options: essential concepts and trading strategies*, 3rd Ed., McGraw-Hill, 1999

Chriss, N A., *Black-Scholes and Beyond: Option Pricing Models*. McGraw-Hill, 1997

Copeland, T. and Antikov, V., *Real Options: A Practitioner's Guide*, Texere, 2001

Copeland, T.E., Weston, J. F. and Shastri K., *Financial Theory and Corporate Policy*, 4th Ed., Addison-Wesley, 2004

Diez de Castro, Luis: *Ingeniería financiera. La gestión de los mercados financieros internacionales*, McGraw-Hill, 1991

Chong, Y., *Investment Risk Management*, Wiley, 2004

Dixit Avinash and Pindick Robert, *Investment Under uncertainty*, Princeton University Press, 1994

Fama, E. and Miller, M., *The Theory of Finance*, Dryden Press, 1972

Fama, E. and French K., Multifactor explanations of asset pricing anomalies, *Journal of Finance*, 1996

Fama, E. and French K., Size and Book-to Market Factors in Earnings and Returns, *Journal of Finance*, 1995

Geske, R., The valuation of compound options, *Journal of Financial Economics*, 1979

Hull, J. C., *Introduction to Futures and Options Markets*, 2nd Ed., Prentice-Hall, 1995

Hull, J. C., *Options, Futures and Other Derivatives*, 5th Ed., Prentice Hall, 2004

Hunt, P. J. & Kennedy, J. E., *Financial Derivatives in Theory and Practice*, Wiley, 2000

Jorion, P., *Financial Risk Manager Handbook*, 2nd Ed., Wiley, 2003

Kolb, R., *Futures, Options and Swaps*, 3rd Ed., Blackwell, 1999

Longstaff, F. and Schwartz, E., Valuing American options by simulation: A simple least square approach, *Review of Financial Studios*, 2001

Luemberger D., *Investment Science*, Oxford University Press, 1998

Martinez Abascal, E: *Futuros y Opciones*. McGraw-Hill, Madrid, 1993

Mascareñas Perez Iñigo, J., *Innovación financiera*, McGraw-Hill, 1999

Margabre W., The value of an option to exchange one asset for another, *Journal of Finance*, 1978

Merton, R., Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 1973

Merton, R., Future possibilities in finance theory and finance practice, *Working Paper*, Harvard Business School, 2000

Merton, R., Troughts on the future: Theory and practice of investment management, *Financial Analyst Journal*, 2003

Mun, J., *Real Options Analysis*, Wiley, 2nd Ed, 2004

Mun, J., *Real Options Analysis Course*, Wiley, 2003

Neuman C y Zanor M., Métodos binomial, trinomial y de derivadas parciales en la valuación de derivados dependientes del camino, *Disertaciones XXV Jornadas Nacionales de Administración Financiera*, 2005

Rubinstein, M., *Rubinstein on derivatives*, Risk Book, 1999

Sarsa Lopez, D., *Manual de derivados financieros para las PyME*, Vicens Vives, 1994

Trigeorgis, L., *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, 2nd Ed., MIT Press, 1997

Trigeorgis, L., *Real Options in Capital Investments: Models, Strategies and Applications*, Praeger, 1995

Verchik, A., *Mercado de capitales*. Volumen 1 y 2, Macchi, 1993

Verchik, A., *Derivados financieros y de productos*, Macchi, 2000

Vince, R., *The Mathematics of Money Management*, Wiley, 1992

Ward, R., *Options & Options Trading*, McGraw Hill, 2004

Wilmott, P., *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge, 1996

www.puc-rio.br/marco.ind/main.html. *Stochastic Process with Focus in Petroleum Applications*