MÉTODOS DE PROGRAMACIÓN DE INVERSIONES CON ANÁLISIS DE RIESGO

Alejandro Grosso Grazioli
Aldo Vicario
Orlando Orellana

Universidad de Buenos Aires

SUMARIO: 1.Introducción; 2. La función de utilidad; 3. Evaluación de proyectos en condiciones de riesgo; 4. Racionamiento de capital en un ambiente de riesgo; 5. Conclusiones.

Para comentarios: aggrazioli@ciudad.com.ar
aldovicario@yahoo.com.ar
orellanao@yahoo.com.ar

1. INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se incorpora el riesgo en el análisis y evaluación de los proyectos de inversión. Se aplica el método de la 'Media Varianza'. Para justificar su utilización es estudiada la función de utilidad del decisor suponiendo , como la Teoría de la Cartera, que tiene aversión al riesgo.

Es una continuación del trabajo presentado en las Vigésimas Cuartas Jornadas Nacionales de Administración Financiera (SADAF) del año 2004 donde fue abordado el tema de la Programación de Inversiones en condiciones de certeza (Vicario, Grosso Grazioli, Orellana, 2004)

En primer término es analizado un único proyecto de inversión con flujos de fondos aleatorios mediante distintos métodos relacionando la obtención de algunos parámetros con la recta de mercado de valores (*SML Security Market Line*). Adicionalmente se complementa esta sección con un ejemplo de aplicación mediante el uso del software *Excel* ® (Microsoft).

Luego, se aborda el estudio de varios proyectos con valores actuales netos (VAN) probabilísticos mediante la programación matemática con variables binarias con el uso del software *Solver* ® (Microsoft).

Se incluyen seis (6) anexos, cuatro de ellos analíticos y dos con la resolución de los ejercicios. Los anexos analíticos son: Análisis de concavidad y convexidad de las funciones de utilidad; propiedades estadísticas de los operadores esperanza, varianza y covarianza; dependencia lineal de flujos de fondos entre proyectos y; recta del mercado de valores en relación con los métodos de equivalente a certeza y prima de riesgo.

2. LA FUNCIÓN DE UTILIDAD

2.1 Revisión del Marco Teórico:

Para resolver problemas de elección bajo incertidumbre un individuo debe evaluar qué satisfacción obtiene de un conjunto disponible de alternativas antes de que se resuelva la incertidumbre, y debería disponer también de algún criterio para ordenar las alternativas y poder tomar una decisión.

En un primer enfoque el individuo tratará de maximizar el valor esperado de los diferentes alternativas que pueda elegir. Este criterio es insuficiente porque no tiene en cuenta ninguna característica personal del individuo, sólo considera la magnitud de las posibles consecuencias. Desde una perspectiva histórica, el ejemplo que puso de manifiesto los defectos del principio del valor esperado fue lo que se denomina la 'paradoja de San Peterburgo'[1]. Daniel Bernoulli y Gabriel Cramer en el siglo XVIII se dieron cuenta de que la magnitud de las consecuencias no es lo único que importa, que al ordenar las alternativas también influye la utilidad que proporcionan esas consecuencias y, que la utilidad que se puede obtener de una cantidad de riqueza varía mucho con la actitud de cada sujeto ante el riesgo.

El concepto de utilidad en el sentido de von Neumann y Morgenstern tiene por finalidad resolver problemas de elección bajo incertidumbre superando las limitaciones del enfoque del valor esperado. En su libro -en la segunda edición de 1947- *The Theory of Games and Economic Behavior*, John von Neumann y Oscar Morgenstern desarrollaron modelos matemáticos para examinar la conducta económica de los individuos en condiciones de incertidumbre. La novedad no consiste en el propio principio de la utilidad esperada sino en su fundamentación axiomática. Para comprender estas interacciones, fue necesario investigar primero los motivos de los que participan en esos 'juegos'. Dado que la hipótesis podía derivarse de axiomas más básicos de la conducta 'racional'. Los axiomas representan un intento de los autores de generalizar algunos de los fundamentos de la teoría de la elección individual para incluir las situaciones inciertas.

Se define comportamiento racional como aquella conducta que se ajusta a los siguientes tres axiomas:

> Axioma de Ordenación: las preferencias del individuo deben ser reflexivas, completas y transitivas sobre el universo de todas las mezclas probabilísticas posibles.
> Axioma de Continuidad de la función de utilidad.
> Axioma de Independencia: asume la ausencia de cualquier tipo de complementariedad (o sustituibilidad) entre los objetos cuyas utilidades se están combinando.

La aportación de von Neumann y Morgenstern consistió en demostrar que existe una función de utilidad tal que si el individuo se comporta de acuerdo con los axiomas mencionados, al elegir en contextos estocásticos, lo hará como si maximizara el valor esperado de esa función de utilidad. Esta función es 'cardinal' en el sentido de que preserva la ordenación de preferencias hasta una transformación lineal, es decir, que si U (xi) es función de utilidad cardinal entonces W (xi) = a + b U (xi) representa las mismas preferencias (a y b son números reales, y b > 0).

Aunque la mayoría parecen eminentemente razonables a primera vista, han surgido muchas e importantes cuestiones sobre su validez. En especial el axioma de la independencia tiende a ser violado de manera sistemático (ver trabajo de Daniel Kahneman y Amos Tversky de 1979 que relata la 'paradoja de Allais'). No obstante para el presente trabajo seguiremos los aportes de Von Neumann y Morgenstern que llegaron a la conclusión de que la maximización de la utilidad esperada parecía un objetivo razonable en las situaciones inciertas.

---

[1] Ver Sánchez Molinero; Hernando, 1998. Utilidad y Bienestar: una historia de las ideas sobre utilidad y bienestar social, cáp. 8, pág. 122 y siguientes

Al respecto Tobin, J. (1958: 190-191) afirma que "una justificación del empleo de curvas de indiferencia referidas a la esperanza y el desvío estándar m_R y s_R podría ser la consideración de que el inversor valora el futuro de los consolidados sólo en términos de una familia de dos parámetros de distribuciones de probabilidad de g". Siendo g la ganancia o pérdida de capital, g = (r / re) - 1; re tasa esperada de los consolidados al final del período, cierta e independiente; r tipo actual de interés.

"Puede pensar, por ejemplo, en términos de un rango de pérdidas o ganancias semejante a y centrado en cero, o en términos de valores a los que se puede aproximar una distribución normal. Cualquiera que sea la familia de dos parámetros que se suponga –uniforme, normal o algún otro tipo- toda la distribución de probabilidad queda determinada una vez se especifican la media y el desviación estándar. De este modo puede analizarse mediante curvas de indiferencia m_R-s_R la elección del inversor entre distribuciones de probabilidad; cualquier otro par de parámetros independientes podría cumplir el mismo papel."

Si se supone que las distribuciones de probabilidad del inversor pertenecen a una familia de dos parámetros, podemos inferir la forma de sus curvas de indiferencia a partir de su función de utilidad del rendimiento. Podemos suponer que esta función relaciona la utilidad con R, incremento porcentual del saldo para inversión al final del período. Esa formulación de la función de utilidad hace que el mapa de indiferencia del inversor, y por lo tanto su elección de proporciones de caja y consolidados, sea independiente de la cuantía absoluta de su saldo inicial.

Bajo ciertos postulados, puede demostrarse que la elección de un individuo entre distribuciones de probabilidad puede describirse como maximización del valor esperado de la función de utilidad J. Tobin (1958: pág. 190).[2]

De acuerdo con Marín y Rubio (2001: pág. 774 y siguientes) se supone que el agente decisor tiene una determinada función de utilidad sobre su consumo U(C). Se supone asimismo que el individuo conoce la probabilidad de conseguir determinados niveles de consumo y que elegirá entre distintas alternativas maximizando la utilidad esperada de su consumo.

Si denotamos con p_i la probabilidad que el agente asigna a un determinado nivel de consumo C_i la utilidad esperada sería

$$E[U(C)] = \sum_{i=1}^{n} p_i . U(C_i)$$

La incertidumbre asociada al consumo es una variable distinta a la utilidad del consumo. Por ejemplo para, en el caso de 2 posibles niveles de consumo C1 con probabilidad 'p' y C2 con probabilidad '1-p', el consumo esperado $E(C)$, la varianza del consumo $V(C)$ y la utilidad esperada del consumo $E[U(C)]$ vienen dados por:

$$E(C) = p.C_1 + (1-p).C_2 \quad \text{Consumo esperado}$$
$$V(C) = [C_1 - E(C)]^2 . p + [C_2 - E(C)]^2 .(1-p) \quad \text{Varianza del consumo}$$
$$E[U(C)] = U(C_1).p + U(C_2).(1-p) \quad \text{valor esperado de la utilidad}$$

El riesgo o variabilidad del consumo se puede medir a través de la varianza del consumo y la actitud del agente frente al riesgo viene exclusivamente definido por su función de utilidad. Es decir es menester separar el riesgo de la actitud frente al riesgo. Mientras el riesgo depende es-

[2] J. TOBIN, 1958 en la pág. 190 incluye la siguiente nota bibliográfica "Véase Von Neumann, J. y Morgenstern, O., Theory of Games and Economic Behavior, tercera edición (Princeton: Princeton University Press, 1953), pp. 15-30, pp. 617-632; Herstein, I. N. y Milnor, J., An Axiomatic Approach to Measurable Utility, Econometrica, vol. 23 (abril 1953), pp. 291-297; Marschack, J., Rational Behavior, Uncertain Prospects, and Measurable Utility, Econometrica, vol. 18 (abril 1950), pp. 111-141; Friedman, M. y Savage, L. J., The Utility Analysis of Choices Involving Risk, Journal of Political Economy, vol. 56 (agosto 1948), pp. 279-304, y The Expected Utility Hypothesis and the Measurability of Utility, Journal of Political Economy, vol. 60 (diciembre 1952), pp. 463-474. En el libro de Savage, L., *The Foundations of Statistics* (New York: Wiley, 1954) se encuentra un tratamiento que propo9rciona una base axiomática para las estimaciones de probabilidad subjetivas que aquí hemos supuesto".

pecíficamente del activo financiero que se considera, la actitud frente al riesgo va a depender del individuo en sí, y por lo tanto va a ser distinta para los distintos agentes.

De hecho dependiendo de la forma de la función de utilidad, se puede distinguir tres tipos de actitudes frente al riesgo: aversión al riesgo, neutralidad y propensión al riesgo.

Se supone que la actitud más frecuente ante el riesgo es la de aversión. Los autores von Neumann y Morgenstern han demostrado que aversión al riesgo implica una función de utilidad cóncava: cuanto más cóncava es dicha función, mayor es el grado de aversión. A partir de esta idea, J. W. Pratt y Kenneth J. Arrow independientemente en 1964 propusieron un 'Índice de aversión al riesgo'. No se trata de un índice general al riesgo sino que depende del nivel inicial de la riqueza del sujeto, en este sentido este índice de aversión es puramente 'local'.

Medidas de aversión al riesgo de U(W)

Coeficiente de Aversión Absoluta al Riesgo de Arrow-Pratt. Es una medida absoluta que indica el porcentaje de variación en la utilidad marginal frente a un cambio unitario en W.

$$A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

donde:
W: riqueza inicial.
U (W) Función de Utilidad de la riqueza
U´ (W) y U´´ (W) son las derivadas primera y segunda de la función de Utilidad

Averso al riesgo $A(W) \rangle 0$
Neutral al riesgo $A(W) = 0$
Propenso al riesgo $A(W) \langle 0$

Coeficiente de Aversión Relativa al Riesgo de Arrow-Pratt. Es una medida relativa ya que es el opuesto de la elasticidad de la utilidad marginal con respecto a la riqueza

$$R(W) = -W.\frac{U''(W)}{U'(W)} = W.A(W)$$

- aversión creciente al riesgo, cuanto mayor riqueza tanto mayor es su aversión al riesgo: $\frac{d(AW)}{dW} \rangle 0$
- aversión decreciente al riesgo, la aversión al riesgo disminuye conforme aumenta su riqueza: $\frac{d(AW)}{dW} \rangle 0$
- aversión creciente al riesgo (invierte una proporción menor de riqueza en riesgo cuando dicha riqueza aumenta): $\frac{d\,\mathrm{R}(W)}{dW} \rangle 0$
- aversión decreciente al riesgo (invierte una proporción mayor de riqueza en riesgo cuando dicha riqueza aumenta): $\frac{d\,\mathrm{R}(W)}{dW} \langle 0$

Las últimas dos medidas son en términos relativos.

Un análisis gráfico más sencillo está basado en la convexidad (o concavidad) de las funciones que representan la Utilidad en relación con la Riqueza (Fernández-Pol, Jorge E. 1984 y Berneson y Levine 1979).

- Una función estrictamente cóncava de Utilidad muestra un aumento rápido en la utilidad para las cantidades crecientes de dinero. Es el evitador de riesgos.
- Una función estrictamente convexa de Utilidad representa al buscador de riesgos. La utilidad se vuelve mayor para crecientes sumas de dinero.
- Una función líneal de Utilidad representa el enfoque del valor esperado del neutro al riesgo. Para esta curva, cada peso adicional de ganancia tiene el mismo valor que el peso previo.

Se observa que la concavidad y convexidad están relacionadas inmediatamente con las derivadas segundas (Ver Anexo 0)

2.2 Función de Utilidad Cuadrática aplicada al Valor Actual Neto (VAN)

Un caso particular de función de utilidad que satisface los axiomas de von Neumann y Morgenstern es la función de Utilidad Cuadrática.

Sea la función de Utilidad Cuadrática,

$$U(W) = a\,W - b\,W^2 \qquad b > 0$$

$$U'(W) = a - 2\,b\,W = 0 \qquad \Rightarrow \qquad W = a/2\,b$$

$U''\left(\frac{a}{2.b}\right) = -2.b < 0 \quad \Rightarrow \frac{a}{2.b}$ valor de riqueza cuando la función de utilidad toma el máximo.

Es decir que hasta $W < \frac{a}{2.b}$ la utilidad es creciente con la riqueza y la utilidad es decreciente con la riqueza con $W > \frac{a}{2.b}$

Con las siguientes propiedades:

$$U'(W) = a - 2bW$$

$$U''(W) = -2b < 0 \quad para \quad 0 < W < \frac{a}{2b}$$

$$\frac{d(AW)}{dW} = \frac{4b^2}{(a-2bW)^2} > 0 \quad \text{creciente}$$

$$\boxed{R(W) = -W.\frac{U''(W)}{U'(W)} = W.\frac{2b}{a-2bW}}\ ,$$

$$\boxed{\frac{dR(W)}{dW} = \frac{2ab}{(a-2bW)^2} > 0 \quad creciente}\ ,$$

Entonces, la función de utilidad cuadrática presenta aversión absoluta al riesgo creciente, que en general no parece reflejar el comportamiento natural de los inversores, que cuando más riqueza se tiene se invierte más cantidad de dinero en activos riesgosos aunque en términos relativos el aumento de riqueza invertida en activos riesgosos sea menor que el aumento de riqueza.

Sin embargo, bajo esta función de utilidad el análisis de la media-varianza es consistente con el criterio de maximización de la utilidad esperada, resultado imprescindible para obtener el Modelo de Valuación de Activos de Capital (CAPM) sin necesidad de suponer la normalidad de los rendimientos de los activos, como se presentará para el caso de una función de utilidad no cuadrática aproximándola por el desarrollo de Taylor (ver *infra*)

En el caso del Valor Actual Neto (VAN) que es el objeto del presente trabajo, la función de utilidad es:

$$U(VAN) = a.\ VAN - b.\ VAN^2$$

$$E[U(VAN)] = a.\ E(VAN) - b.\ E(VAN^2) \qquad (I)$$

Es decir que la esperanza matemática de la utilidad depende de los dos primeros momentos de la variable aleatoria VAN y teniendo en cuenta que

$$V(VAN) = E(VAN^2) - [E(VAN)]^2$$

$$E(VAN2) = V(VAN) + [E(VAN)]^2 \qquad (II)$$

reemplazando (II) en (I)

$$E[U(VAN)] = a.\ E(VAN) - b.\{\ V(VAN) + [E(VAN)]^2\ \}$$

La utilidad esperada del VAN depende únicamente de la media y la varianza. El parámetro b está relacionado con la aversión al riesgo del que tiene que tomar la decisión y el parámetro a con la satisfacción que le produce obtener el VAN.

No obstante, las limitaciones que puede tener la función de utilidad cuadrática, puede ser utilizada como aproximación a otras funciones de utilidad más complejas.

Sea por ejemplo la función de utilidad no cuadrática U(VAN) y efectuando una aproximación de la función a través de un desarrollo de Taylor en torno de E(VAN) con

$$\overline{VAN} = E(VAN) + ?VAN$$

$$U(\overline{VAN}) = U[E(VAN)] + \frac{dU(VAN)}{dVAN}[E(VAN)].[\overline{VAN} - E(VAN)] +$$

$$+\frac{1}{2!}.\frac{d^2U(VAN)}{dVAN^2}[E(VAN)].[\overline{VAN} - E(VAN)]^2 + \ldots$$

$$U(\overline{VAN}) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\frac{d^jU(VAN)}{dVAN^j}[E(VAN)].[\overline{VAN} - E(VAN)]^j$$

Hallando la E[U(VAN)]

$$E[U(VAN)] = E\{U[E(VAN)]\} + \frac{dU(VAN)}{dVAN}[E(VAN)].[E(VAN) - E(VAN)] +$$

$$+\frac{1}{2!}.\frac{d^2U(VAN)}{dVAN^2}[E(VAN)].E[VAN - E(VAN)]^2 + \ldots$$

$$E[U(VAN)] = U[E(VAN)] + \frac{dU(VAN)}{dVAN}[E(VAN)].0 + \frac{1}{2!}.\frac{d^2U(VAN)}{dVAN^2}[E(VAN)].\ s^2[VAN] + \ldots$$

Si la serie es convergente y los valores VAN se distribuyen siguiendo una normal, de modo que para j> 2 los términos son infinitesimales.

$$E[U(VAN)] \cong U[E(VAN)] + \frac{1}{2}\frac{d^2U(VAN)}{dVAN^2}[E(VAN)].s^2(VAN)$$

2.3 Conclusión Parcial

Por lo tanto, el valor esperado de utilidad viene exclusivamente determinado por dos momentos poblacionales de la variable aleatoria VAN, a saber: media E(VAN) y varianza $s^2(VAN)$.

Para el caso de una función de utilidad cóncava (supuesto de aversión al riesgo) y creciente, entonces se verifica que:

$$\frac{dU[E(VAN)]}{dVAN} \rangle\ 0$$

$$\frac{d^2U[E(VAN)]}{dVAN^2} \langle\ 0$$

Siendo ésta la situación sobre la que se desarrolla el este trabajo.

3. EVALUACION DE PROYECTOS EN CONDICIONES DE RIESGO

3.1 Método de la Media Varianza:

Analizando un proyecto de inversión simple e independiente en el marco de análisis media-varianza considerando el supuesto que la tasa de costo de capital (k0) se conoce con certeza y que el valor que toman los flujos netos del proyecto (Fj) es una variable aleatoria el Valor Actual Neto (VAN) se puede plantear de la siguiente manera siendo el horizonte de duración 'n'.

$$VAN = -F_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{F_j}{(1+k_0)^j}$$

donde F_0 es la inversión inicial.

Valor Esperado del Valor Actual Neto:

$$E(VAN) = E\left[-F_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{F_j}{(1+k_0)^j}\right]$$

$$E(VAN) = -E(F_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{E(F_j)}{(1+k_0)^j}$$

Varianza del Valor Actual Neto:

$$V(VAN) = V\left[-F_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{F_j}{(1+k_0)^j}\right]$$

$$V(VAN) = V(-F_0) + V\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{E(F_j)}{(1+k_0)^j}\right]$$

Como la inversión inicial F0 si se conoce con certeza es una constante y V(F0)=0.

$$V(VAN) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+k_0)^i} \cdot \frac{1}{(1+k_0)^j} . V(F_iF_j) \qquad (III)$$

$$\text{Donde: } \begin{cases} V(F_iF_j) = V(F_i) & \text{si } i = j \\ V(F_iF_j) = Cov(F_iF_j) & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Se pueden presentar los siguientes casos:

- Que los flujos de fondos sean intertemporalmente independientes, en cuyo caso:

  $Cov(F_iF_j) = 0$

  con lo cual (III) se convierte en:

$$V(VAN) = \sum_{i=1}^{n} \frac{V(F_i)}{(1+k_0)^{2.i}}$$

- Que los flujos estén perfecta y linealmente correlacionados en forma directa o inversa (ver Anexo II).

  En cuyo caso

  $$l_{ij} = \frac{Cov(F_i F_j)}{s(F_i).s(F_j)}$$

  siendo:

  l_{ij} el Coeficiente de Correlación Lineal del flujo ‘i’ con el flujo ‘j’.

  $s(F_i) = \sqrt{V(F_i)}$ desvío estándar de Fi

  $$\text{Donde: } \begin{cases} l_{ij} = -1 \Rightarrow \textit{correlación lineal perfecta inversa} \\ l_{ij} = 1 \Rightarrow \textit{correlación lineal perfecta directa} \end{cases}$$

  Entonces:

  $$\begin{cases} Cov(F_i F_j) = -s(F_i).s(F_j) \text{ para el caso de una } \textit{correlación lineal perfecta inversa} \\ Cov(F_i F_j) = s(F_i).s(F_j) \text{ para el caso de una } \textit{correlación lineal perfecta directa} \end{cases}$$

  Con lo cual (III) se convierte en el caso $l_{ij} = 1$

  $$V(VAN) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+k_0)^i} . \frac{1}{(1+k_0)^j} . s(F_i).s(F_j)$$

  $$V(VAN) = \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{s(F_i)}{(1+k_0)^i} \right]^2$$

3.2 Otros Métodos de Evaluación:

a) Método de Equivalente a Certeza

Consiste en determinar qué flujos de caja ciertos equivaldrán a la corriente de flujos de caja arriesgados generados por el proyecto.

El valor incierto del flujo de caja del período ‘j’ se multiplica por a_j ε?(0 ; 1) donde

$$a_j = \frac{\overline{F}_j}{F_j} \quad \Rightarrow \quad \overline{F}_j = a_j . F_j$$

siendo:

$\overline{F}$ el flujo de caja cierto en el período ‘j’.

F_j el flujo de caja incierto en el período ‘j’.

a_j se determina considerando el grado de riesgo inherente al flujo de caja de ese período, y se calculará de tal forma que a quien toma la decisión le sea indiferente percibir $a_j . F_j$ en condiciones de certeza que recibir F_j en condiciones de riesgo (ver ANEXO III).

En consecuencia,

$$VAN = -F_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{F_j}{(1+k_0)^j}$$

b) Método de Ajuste de la tasa de costo de capital

La tasa de descuento se ajusta según el nivel de riesgo y de ahí que cuanto mayor sea el riesgo a soportar por la empresa, mayor será la tasa de descuento.

Si se denomina:

k_0: costo de capital libre de riesgo.

p: prima de riesgo.

$\overline{k}_0$: tasa de descuento ajustada por el riesgo.

Se tendrá:

$$\overline{k}_0 = k_0 + p$$

En consecuencia:

$$VAN = -F_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{F_j}{(1+\overline{k}_0)^j}$$

c) Comparación entre los Métodos de Evaluación a y b

En el período 'j' para que los flujos ajustados por ambos procedimientos sean iguales se debe satisfacer:

$$\frac{a_j.F_j}{(1+k_0)^j} = \frac{F_j}{(1+\overline{k}_0)^j} \quad \Rightarrow \quad a_j = \frac{(1+k_0)^j}{(1+\overline{k}_0)^j}$$

Como $\overline{k}_0 > k_0 > 0$ será $a_j < 1 \ \forall$ t con lo que al aumentar 'j' si permanecen constantes $\overline{k}_0$ y k_0 el valor de a_j disminuye, es decir $a_{j+1} \leq a_j \quad \forall j$ con ello se está asumiendo de forma implícita que los flujos de caja más alejados en el tiempo son más arriesgados. Es decir que si se pretendiese lograr que $a_j = \overline{a}$ sea constante se deberá considerar una prima de riesgo distinta en cada período.

$$p_j = \frac{1+k_0 - \sqrt[j]{\overline{a}}.(1+k_0)}{\sqrt[j]{\overline{a}}}$$

3.3 Métodos de Valor Actual Neto Equivalente Cierto (VANEC)

Este método combina el método de la media varianza y el equivalente cierto. (ver Messuti, Alvarez y Graffi, 1992).

Considerando que la función de utilidad del individuo está en función de la media-varianza y asumiendo el supuesto que a_j y k_0 se conocen con certeza se puede calcular la esperanza y la varianza del Valor Actual Neto Equivalente Cierto (VANEC).

$$E(VANEC) = E\left[-F_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j.F_j}{(1+k_0)^j}\right]$$

$$E(VANEC) = -E(F_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j.E(F_j)}{(1+k_0)^j}$$

$$V(VANEC) = V\left[-F_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j.F_j}{(1+k_0)^j}\right]$$

$$V(VANEC) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \frac{a_i}{(1+k_0)^i}.\frac{a_j}{(1+k_0)^j}.V(F_iF_j) \quad (\text{III}')$$

Si los flujos de fondos son independientes intertemporalmente

$$V(VANEC) = \sum_{i=0}^{n} a_i^{\,2}.\frac{V(F_i)}{(1+k_0)^{2.i}}$$

Si los flujos de fondos tienen correlación intertemporal positiva perfecta:

$$V(VANEC) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \frac{a_i}{(1+k_0)^i}.\frac{a_j}{(1+k_0)^j}.s(F_i).s(F_j)$$

$$V(VANEC) = \left[\sum_{i=0}^{n} a_i . \frac{s(F_i)}{(1+k_0)^i}\right]^2$$

3.4 Análisis Inferencial de la variable aleatoria VAN

Si los flujos de fondos son independientes y teniendo en cuenta el Teorema del Límite Central en la versión de Liapunoff: 'Sean X1, X2, …, Xn variables aleatorias independientes entre sí, cada una con su propia función de distribución, y tal que ninguna de ellas sea preponderante, es decir, que ninguna condiciona al resultado del experimento entonces si se define la variable aleatoria

$$X = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - \sum_{j=1}^{n} u_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} s_j^{\,2}}} \qquad u_j \quad \text{la media de la variable} \quad X_j$$

tiene una función de distribución H(X)

Entonces,

$$\lim_{n \to \infty} H(X) = \text{Distribución Normal } (0 , 1)$$

En el caso que nos ocupa los flujos de fondos serían las variables aleatorias y la suma de variables aleatorias es el VAN, la suma de los valores medios, la E(VAN), y la suma de las varianzas, la V(VAN) por lo que

$$VAN \Rightarrow \text{Variable aleatoria normal } \left[E(VAN); \sqrt{V(VAN)}\right]$$

dependiendo la convergencia del número de flujos de fondos (ver Suárez Suárez, cap. 12, que considera que $n \geq 10$).

A su vez se puede obtener la distribución de probabilidad del tanto interno de un proyecto simple. El procedimiento para obtener la función de distribución de la Tasa Interna de Retorno (TIR -i-) se apoya en el conocimiento de la función de distribución del VAN. En efecto si $P[VAN(k_0) \leq T_0] = P(i_0 \geq k_0)$ con $T \geq 0$

Es decir que la TIR se distribuye de manera idéntica al VAN, aunque sea distinta el valor de la media y de la varianza. Por lo tanto se puede repetir el cálculo para deducir la distribución de la TIR: se calcula el VAN para distintos valores de k_j (j = 0, 1, …, n) y se obtiene

$P\left[VAN(k_J) \leq T_j\right] = P\left(i_j \geq k_j\right)$ con lo que se obtiene la función de distribución de la TIR pudiendo calcularse su media y su varianza.

Si surgen dificultades para especificar las probabilidades de los posibles flujos de caja, así como la cuantía de estos en cada uno de los sucesivos períodos de tiempo, pueden utilizarse distribuciones de probabilidades como la distribución beta, triangular o la uniforme, que si se ajustan a la situación que se está analizando, los parámetros pueden ser obtenidos con mayor facilidad según las circunstancias (ver Suárez Suárez, 1991).

Si se desconoce la distribución de probabilidades se puede utilizar el Teorema de Tchevicheff, que da acotaciones que facilitan cierta información sobre la dispersión de los valores de la variable aleatoria (en nuestro caso el VAN).

Si la varianza existe y es finita, se verifica para k > 0

$$P\left[|X - m| \geq k.s\right] = P\{X \notin \left]m - k.s\,;\, m + k.s\right[\ \} \leq \frac{1}{k^2} \text{”}$$

que puede escribirse del siguiente modo equivalente:

$$P\left[|X - m| \langle\ k.s\right] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

En nuestro caso

$$P\left[|VAN - E(VAN)| \langle\ k.s\,(VAN)\right] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$P\left[E(VAN) - k.s\,(VAN) \langle\ VAN \ \langle\ E(VAN) + K.s\,(VAN)\right] \geq 1 - \frac{1}{k^2} \qquad (\ IV\ )$$

Para que:

$$E(VAN) - K.s\,(VAN) = 0$$

$$k = \frac{E(VAN)}{s\,(VAN)} \qquad sujeto\ a\ E(VAN)\,\rangle\, s\,(VAN)$$

reemplazando en (IV), sujeto a la condición que k > 1 para que la probabilidad no sea negativa

$$P\left[E(VAN) - \frac{E(VAN)}{s\,(VAN)}.s\,(VAN) \langle\ VAN \ \langle\ E(VAN) + \frac{E(VAN)}{s\,(VAN)}.s\,(VAN)\right] \geq 1 - \frac{1}{\frac{E(VAN)^2}{V(VAN)}}$$

$$P\left[0 \ \langle\ VAN \ \langle\ 2.E(VAN)\right] \geq 1 - \frac{V(VAN)}{E(VAN)^2}$$

3.5 Ejercicio de Aplicación

Una empresa pretende evaluar una futura inversión según los siguientes datos:

Inversión	FF1	Probabilidad	FF2	Probabilidad	FF3	Probabilidad
	100	0,5	150	0,5	250	0,5
400	120	0,2	180	0,2	290	0,2
	130	0,3	195	0,3	270	0,3

FFj: Flujos Netos de Fondos después de impuestos del período j.
Costo de capital k_0= 0,104 (tasa efectiva periódica)
ESPERANZAS de los Flujos Netos de Fondos

$$E(FF_i)=\sum_{t=1}^{3} FF_{it}.p_t \quad \text{para } i=1,2 \text{ y } 3$$
$$E(FF_1)=100x0{,}50+120x0{,}20+130x0{,}30=113$$
$$E(FF_2)=150x0{,}50+180x0{,}20+195x0{,}30=169{,}5$$
$$E(FF_3)=250x0{,}50+290x0{,}20+270x0{,}30=264$$

MATRIZ DE VARIANZAS Y COVARIANZAS
(Anexo IV: Resolución por Excel®)

	FF1	FF2	FF3
FF1	181		
FF2	271.5	407.25	
FF3	158	237	244

$$E(VAN)=-FF_0+\frac{E(FF_1)}{(1+k_0)}+\frac{E(FF_2)}{(1+k_0)^2}+\frac{E(FF_3)}{(1+k_0)^3}$$
$$E(VAN)=-400+\frac{113}{1{,}104}+\frac{169{,}5}{(1{,}104)^2}+\frac{264}{(1{,}104)^3}=37{,}6234$$

$$V(VAN)=\frac{V(FF_1)}{(1+k_0)^2}+\frac{V(FF_2)}{(1+k_0)^4}+\frac{V(FF_3)}{(1+k_0)^6}+2.\frac{Cov(FF_1FF_2)}{(1+k_0)^3}+2.\frac{Cov(FF_1FF_3)}{(1+k_0)^4}+2.\frac{Cov(FF_2FF_3)}{(1+k_0)^5}$$
$$V(VAN)=\frac{181}{(1{,}104)^2}+\frac{407}{(1{,}104)^4}+\frac{244}{(1{,}104)^6}+2.\frac{271{,}5}{(1{,}104)^3}+2.\frac{158}{(1{,}104)^4}+2.\frac{237}{(1{,}104)^5}$$

$$V(VAN)=1462{,}54 \qquad s\ (VAN)=\sqrt{1462{,}54}=38{,}2431$$

Aplicando el Teorema de Tchevicheff :

$$P\{0\le VAN\le 2.E(VAN)\}\ge 1-\frac{V(VAN)}{E(VAN)^2} \qquad P\{0\le VAN\le 2.52{,}49\}\ge 1-\frac{1462{,}54}{(37{,}62)^2}$$

$$P\{0\le VAN\le 104{,}97\}\ge 1-\frac{1462{,}54}{1415{,}52} \qquad P\{0\le VAN\le 104{,}97\}\ge \textit{No Existe}\,\%$$

Si k = 2, k^2 = 4

$$P\{-38{,}8628\le VAN\le 114{,}1096\}\ge 1-\frac{1}{4}=0{,}75$$

4. RACIONAMIENTO DE CAPITAL EN UN AMBIENTE DE RIESGO

4.1 Modelo de Weingartner de Programación de Inversiones:

El problema que se planteará es el de elegir las inversiones que maximizan el Valor Actual Neto en un ambiente de riesgo y recursos financieros ilimitados (en un trabajo de los autores anterior el tema fue abordado en condiciones de certidumbre), siguiendo el modelo Weingartner[3]. Se utilizará el método de equivalente cierto.

El equivalente a cierto para el inversor del proyecto Pj viene dado por

E(VANj) – ? V(VANj)

siendo ? la medida de aversión al riesgo -(relación de sustitución entre una reducción en la E(VAN) y una reducción en la varianza)- (para una medida de ? proporcionada por el CAPM ver Anexo III). Si ? = 0 el inversor es indiferente al riesgo por lo cual el resultado es idéntico al que se obtendría en condiciones de certidumbre.

Se supone que existen n proyectos [Pj j=1,2,…,n] de los cuales se conocen su E(VANj) y su matriz de correlación. Se supone que son proyectos independientes limitados sólo por cuestiones financieras, o de otra índole, simples y no fraccionables.

El objetivo es maximizar el equivalente cierto de la suma de los VAN de los proyectos a disposición del inversor para lo cual es necesario elegir de entre los n, la combinación de proyectos que maximicen la función objetivo y respeten las restricciones. Se trata en consecuencia de un problema de optimización no lineal (función objetivo, suma de una función lineal con una función cuadrática) donde las variables de decisión son binarias.

En consecuencia se debe resolver el siguiente modelo:

$$\text{Max.Z} = \sum_{j=1}^{n} E\left(\text{VAN}_j\right) Y_J - l . \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Y_i . Y_j . \text{Cov}\left(\text{VAN}_i ; \text{VAN}_j\right)$$

Yi, Yj (i, j = 1, …, n) variable binarias

Sujeto a: Restricciones para considerar las limitaciones de recursos:

$$\sum_{j=1}^{n} C_{jt} . Y_j \leq C_t \quad t = 1,2,...,k$$

donde:

Cjt: Erogaciones esperadas exigidas por el proyecto Pj en el período t.

Ct: La totalidad de recursos financieros disponibles en el período t-ésimo.

k: Período hasta el cual existen restricciones.

Pudiendo agregarse más restricciones para lo cual se remite al trabajo presentado por los autores en las Jornadas Nacionales de Tecnología Aplicada a la Educación Matemática Universitaria del año anterior (2004).

4.2 Ejercicio de Aplicación

Una empresa está encarando la realización de 5 proyectos simples no fraccionables e independientes que no guardan ninguna relación con la actividad actual de la empresa y que tienen por objeto la producción de los productos A y B. Y cuyos VAN están reflejados en la tabla siguiente, en función de cuál sea la situación económica que se presente, entre las 3 posibles, cuyas probabilidades también se detallan:

		VALOR ACTUAL NETO				
Estado de la Naturaleza (ENi)	P(ENi)	Proyecto 1	Proyecto 2	Proyecto 3	Proyecto 4	Proyecto 5
Próspera	0,2	10	12	8	6	14
Estable	0,5	15	10	12	8	13
Recesiva	0,3	17	10	13	7	8

[3] Citado por Mao James C.T. 1969 en su Análisis Financiero. Weingartner Martin H, Capital Budgeting of Interrelated Proyects. Survey and Synthesis, Management Science 12 (marzo 1966) pag. 500

La empresa está limitada en sus erogaciones del primer año a 25 um (unidades monetarias) y del segundo a 18 um. En el siguiente cuadro se señalan los desembolsos esperados exigidos para el primer y segundo año:

	EROGACIONES				
Año	Proyecto 1	Proyecto 2	Proyecto 3	Proyecto 4	Proyecto 5
1	5	10	8	3	2
2	4	7	3	2	4

Los proyectos 1, 2, y 3 producen el producto A, y los proyectos 4 y 5 producen el producto B según el siguiente detalle:

Producción artículo A	
Proyecto 1	200 unidades
Proyecto 2	500 unidades
Proyecto 3	650 unidades
Producción artículo B	
Proyecto 4	250 unidades
Proyecto 5	350 unidades

Por política de mercado de la empresa se deben producir no menos de 700 unidades del producto A o no menos de 250 unidades del producto B. Ni más de 850 unidades del producto A o no más de 400 unidades del producto B. Se considera ?= 0,30.

Planteo:

Matriz de Varianza - Covarianza

$$MAX.Z = \begin{bmatrix} 14,6 \\ 10,4 \\ 11,5 \\ 7,3 \\ 11,7 \end{bmatrix}^t . \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix} - 0,30. \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix}^t . \begin{bmatrix} 5,88511376 & -1,78349148 & 4,28017549 & 1,07029895 & -4,4577084 \\ -1,78349148 & 0,62034486 & -1,35700439 & -0,5040302 & 0,89174574 \\ 4,28017549 & -1,35700439 & 3,15784104 & 0,91317213 & -2,8976635 \\ 1,07029895 & -0,5040302 & 0,91317213 & 0,59891848 & 0,22242628 \\ -4,4577084 & 0,89174574 & -2,8976635 & 0,22242628 & 6,01673299 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix}$$

Sujeto a:

Limitaciones de recursos:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}^t . \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix} \leq 25 \qquad \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}^t . \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix} \leq 18$$

Exigencias de producción:

$$\begin{bmatrix} 200 \\ 500 \\ 650 \end{bmatrix}^t . \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} \geq 700 . Y_6 \qquad \begin{bmatrix} 250 \\ 350 \end{bmatrix}^t . \begin{bmatrix} Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix} \geq 250 . (1 - Y_6)$$

$$\begin{bmatrix}200\\500\\650\end{bmatrix}^t . \begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\Y_3\end{bmatrix} \leq 850 . Y_7 + 1350 . (1 - Y_7) \qquad \begin{bmatrix}250\\350\end{bmatrix}^t . \begin{bmatrix}Y_4\\Y_5\end{bmatrix} \leq 400 . Y_8 + 600 . (1 - Y_8)$$

$$Y_7 + Y_8 = 1$$

Yi: Variables binarias (i = 1,…,8)

Nota Técnica:

Si es necesario satisfacer k de las m restricciones: gi(X1,…,Xn) $\leq$ bi i = 1,…,m.
Se plantean las siguientes inecuaciones: gi(X1,…,Xn) $\leq$ bi +U(1-Yi) i = 1,…,m.
Con:

Yi : Variable binaria.

U: Un número suficientemente grande de manera que gi(X1,…,Xn) $\leq$ U se satisfaga $\forall$ Xi para cualquier subconjunto de las (m-k) desigualdades tomadas de entre las m mencionadas.

$$\sum_{i=1}^{k} Y_i = k$$

Entonces habrá gi(X1,…,Xn) $\leq$ bi i = 1,…,k
gj(X1,…,Xn) $\leq$ U j = k+1,…,m (restricciones relajadas)

Resolución utilizando la herramienta Solver de Excel ® (Anexo V). La solución es elegir los proyectos: 1, 2, 3 y 5. Siendo el valor de la función objetivo 46,69035

5. CONCLUSIONES

En 2004 en estas mismas Jornadas Nacionales de Administración Financiera habíamos presentado un trabajo sobre el racionamiento de capital en condiciones de certeza quedando en el compromiso de completar ese estudio con el análisis en situación de riesgo.

En este trabajo hemos incorporado el riesgo en los modelos de evaluación de proyectos de inversiones superando el enfoque tradicional de considerar la esperanza y la varianza de los flujos de fondos por considerarlos insuficientes desde el punto de vista teórico. Por el contrario, siguiendo al enfoque de J. von Neumann y O. Morgenstern (1947) utilizamos el concepto de la esperanza y la varianza de la utilidad tal como lo hiciera J. Tobin (1958). Como medida absoluta y relativa del riesgo fueron introducidas los índices de aversión al riesgo de J. Pratt y de K. Arrow (1964) que no son generales sino que dependen de la riqueza inicial del sujeto. La función de Utilidad Cuadrática fue la escogida para representar el comportamiento de la utilidad de los Valores Actuales Netos (VAN).

En el punto 3 se fundamentan los diferentes métodos de evaluación de proyectos en condiciones de riesgo: método de la media varianza, método de equivalente a certeza, método de ajuste de la tasa de costo de capital, método de valor actual neto equivalente cierto. A partir de Suárez Suárez (1991) se realiza el análisis de inferencia estadística de la variable aleatoria VAN. Se culmina con una aplicación para un único proyecto de inversión utilizando el Excel®.

En el punto 4 se aborda la compleja tarea del racionamiento del capital en condiciones de riesgo utilizando el modelo de M. Weingartner (1966) de programación de inversiones siguiendo nuestro trabajo presentado el año anterior pero considerando el riesgo para un individuo racional con aversión al riego. También en esta sección se presenta un caso de aplicación resuelto utilizando el Solver de Excel®.

Se incluyen cuatro anexos teóricos y dos prácticos.

En todo el trabajo se ha puesto especial atención en la justificación de los modelos teóricos y en las referencias bibliográficas completas a fin que el lector interesado pueda recuperar las fuentes originales.

REFERENCIAS

Berenson, M.; Levine, D. (1979). *Estadística para Administración y Economía*. México, Mc Graw-Hill, 1998.720 pág. Cap. 11 Toma de Decisiones Bayesianas.

Eppen, G. D.; Gould, F. J.; Schmidt, C. P.; Moore, J. H.; Weatherford, L. R. (1998). *Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa: construcción de modelos para la toma de decisiones con hojas de cálculo electrónicas*. 5ª edición. México, Pearson, 2000. 702 pág.

Fernández Pol, Jorge E. (1984). *Utilidad en el sentido von Neumann Morgenstern*. Buenos Aires, Tesis, 1984. 96 pág.

Gil, María Teresa; Florit, Cecilia Inés (1994). *Probabilidad y Estadística*. Buenos Aires, Nueva Librería, 1994. 203 pág.

Grosso Grazioli, Alejandro; Vicario, Aldo; Orellana, Orlando (2004). Modelo de programación de inversiones con racionamiento de capital y costo financiero creciente. *Disertaciones XXIV Jornadas Nacionales de Administración Financiera*. SADAF. 2004.

López de Prado, Marcos Mailoc; ILLERA, Carlos Rodrigo (2004). *Invertir en Hedge Funds: análisis de su estructura, estrategias y eficiencia*. Madrid, Diaz de Santos, 2004. 513 pág.

Mao, James C. T. (1969). *Análisis Financiero*. Buenos Aires, El Ateneo, 1974. 558 pág.

Marín, José M.; Rubio, Gonzalo (2001). *Economía Financiera*. Barcelona, Antonio Bosch, 2001. 984 pág.

Markowitz, H. (1952). Selección de Carteras. pág. 471 a 486. En: Weston, J. F.; Woods, D. H. (1970). *Teoría de la Financiación de la Empresa*. Barcelona, Gustavo Gili, 1970. 605 pág.

Messuti, Jorge Domingo; Alvarez, Víctor Adrián; Graffi, Hugo Romano (1992). *Selección de Inversiones, introducción a la teoría de la cartera, portfolio theory*. 2ª edición. Buenos Aires, Macchi, 1992. 550 pág.

Pérez López, César (2002). *Estadística aplicada a través de Excel*. 2ª edición. Madrid, Pearson, 2002. 596 pág.

Pisón Fernández, Irene (2001). *Dirección y gestión financiera de la empresa*. Madrid, Pirámide, 2001. 706 pág.

Prieto Pérez, E. (1973). *Teoría de la Inversión: decisiones de inversión en ambiente de certidumbre, riesgo e incertidumbre*. Madrid, ICE, 1973. 272 pág. .

Sánchez Molinero, José Miguel; Hernando, Rafael de Santiago (1998). *Utilidad y Bienestar: una historia de las ideas sobre utilidad y bienestar social*. Madrid, Síntesis, 1998. 287 pág.

Sharpe, W. F. (1964). Los precios de los bienes de capital: una teoría del equilibrio de Mercado bajo condiciones de riesgo. pág. 487 a 509. En: Weston, J. F.; Woods, D. H. (1970). *Teoría de la Financiación de la Empresa*. Barcelona, Gustavo Gili, 1970. 605 pág.

Soldevilla García, Emilio (1984). *Decisiones empresariales con riego e incertidumbre*. Barcelona, Hispano Europea, 198. 473 pág.

Suárez Suárez, Andrés S. (1991). *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa*. 8ª edición. Madrid, Pirámide, 1991. 847 pág.

Tobin, J. (1958). La preferencia por la liquidez como comportamiento frente al riesgo. pág. 181 a 200. En: Mueller, M. G. (1966). *Lecturas de Macroeconomía*. Barcelona, Continental, 1971. 421 pág.

Winston, Wayne L. (2004). *Investigación de Operaciones, aplicaciones y algoritmos*. 4ª edición. México, Thomson, 2005. 1.418 pág.

ANEXO 0

ANÁLISIS DE CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD de las Funciones Continuas f (x)

Función estrictamente CÓNCAVA

Sea la función real de la variable real z = f (x), definida sobre el intervalo abierto I. Se dice que la función f (x) es estrictamente cóncava sobre I si dados dos números cualesquiera x_1, x_2 ε I (distintos entre sí) se verifica:

$f [q\, x_1 + (1 - q)\, x_2] > q\, f (x_1) + (1 - q)\, f (x_2)$ para todo q tal que: $0 < q < 1$.

Existe otra definición alternativa de carácter geométrico cuyo significado se capta fácilmente, a saber: la función f (x) es estrictamente cóncava sobre I si dados dos puntos cualesquiera A, B pertenecientes a la curva en estudio, el segmento de recta que los une cae siempre debajo de dicha curva.

Un criterio práctico para detectar funciones estrictamente cóncavas es que la variación del valor marginal de la función es siempre negativa, entonces f (x) es estrictamente cóncava. Con mayor rigor, si

$d^2 U / d x^2 = f''(x) < 0$ para todo x e I, entonces f (x) es estrictamente cóncava.

Función estrictamente CONVEXA

Sea la función real de la variable real z = f (x), definida sobre el intervalo abierto I. Se dice que la función f (x) es estrictamente convexa sobre I si dados dos números cualesquiera x_1, x_2 ε I (distintos entre sí) se verifica:

$f [q\, x_1 + (1 - q)\, x_2] < q\, f (x_1) + (1 - q)\, f (x_2)$ para todo q tal que: $0 < q < 1$.

Existe otra definición alternativa de carácter geométrico cuyo significado se capta fácilmente, a saber: la función f (x) es estrictamente convexa sobre I si dados dos puntos cualesquiera A, B pertenecientes a la curva en estudio, el segmento de recta que los une cae siempre por encima de dicha curva.

Un criterio práctico para detectar funciones estrictamente convexas es que la variación del valor marginal de la función es siempre positivo, entonces f (x) es estrictamente convexa. Con mayor rigor, si

$d^2 U / d x^2 = f''(x) > 0$ para todo x e I, entonces f (x) es estrictamente convexa.

Para mayor detalle ver Fernández-Pol, 1984: 93-95.

ANEXO I

PROPIEDADES DE LA ESPERANZA, VARIANZA Y COVARIANZA de Variables Aleatorias Discretas

Variable aleatoria individual

Esperanza

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i . p_i$$

$$E(a + b.X) = a + b.E(X)$$

con a y b como constantes

Varianza $$V(X)=\sum_{i=1}^{n}[X_i-E(X)]^2.p_i=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$V(a+b.X)=b^2.V(X)$$ con a y b como constantes

Desvío $$\sigma_x=\sqrt{V(X)}$$

Covarianza $$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)].[Y-E(Y)]\}=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$Cov(a_0+b_0.X,a_1+b_1.Y)=b_0.b_1.Cov(X,Y)$$

siendo ai, bi i(0,1) constantes

Coeficiente de correlación

$$\rho_{ij}=\frac{\sum_{i=1}^{n}[X_i-E(X)].[Y_i-E(Y)]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[X_i-E(X)]^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[Y_i-E(Y)]^2}}=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x.\sigma_Y}$$

Suma de variables aleatorias

Esperanza de una suma de variables aleatorias

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

y en general:

$$E\left(\sum_{j=1}^{n}a_j.X_j\right)=\sum_{j=1}^{n}a_j.E(X_j)$$

siendo Xj variables aleatorias y aj constantes. Sean estas independientes o no

Varianza de la suma de variables aleatorias

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2.Cov(X,Y)$$

$$V\left(\sum_{j=1}^{n}a_j.X_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j01}^{n}a_i.a_j.\sigma_{ij}$$

siendo las Xj variables aleatorias y ai,aj i, j =1,…,n constantes

$$V\left(\sum_{j=1}^{n}a_j.X_j\right)=[a_1 \quad \dots \quad a_n].\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sigma_{i1} & \sigma_{i2} & \dots & \sigma_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \dots\\ \dots\\ a_n\end{bmatrix}$$

siendo: $$\begin{cases}\sigma_{ij}=Cov(X_iX_j)\\ \sigma_{ii}=V(X_i)\end{cases}$$

que es una forma cuadrática cuya matriz asociada en el trabajo se indica como matriz de covarianzas.

En Excel para su obtención aparece con este nombre en herramientas-análisis de datos-covarianza (Ver Anexo IV).

ANEXO II

PROYECTOS PERFECTAMENTE CORRELACIONADOS LINEALMENTE

Cuando dos variables aleatorias X e Y están perfectamente correlacionadas linealmente una se puede expresar como función lineal de la otra.

Por tanto si: Y = a + b X con a, b ? /R

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(X, a + b\,X) = b\,\mathrm{Cov}(XX) = b\,V(X) = b.s_x s_x \quad \text{(ver Anexo I)}$$

Por otra parte

$$V(Y) = V(a + b\,X) = b2\,V(X) = b2\,s_x^2$$

$$s_Y = b.s_x$$

y teniendo en cuenta que

$$l_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{s_x s_Y} = \frac{b s_x s_x}{s_x b s_x} = 1$$

con lo cual Cov(X, Y) = $s_Y . s_x$

o sea que ß la pendiente de la ecuación de regresión lineal se puede expresar:

$$ß = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{V(X)} = \frac{s_x s_Y}{s_x^2} = \frac{s_Y}{s_x}$$

luego,

$$X_s = \frac{s_{xs}}{s_{xj}}.X_j + b$$

$$X_j = \frac{s_{xj}}{s_{xs}}.X_s + b'$$

donde b y b´ son constantes

$$b = \overline{X}_s - \frac{s_{xs}}{s_{xj}}.\overline{X}_j \quad y \quad b' = \overline{X}_j - \frac{s_{xj}}{s_{xs}}.\overline{X}_s$$

La correlación perfecta significa, que las Xs (en nuestro caso los flujos de fondos) s = 1, 2, …, n son función lineal de los Xj de otro cualquiera j (s $\neq$j) j = 1, 2, …, n.En consecuencia es posible calcular la secuencia completa de las Xs una vez conocido el valor $\overline{X}_j + l\,s_{xj}$ correspondiente a Xj sin más que sustituir este valor en la ecuación:

$$X_s = \frac{s_{xs}}{s_{xj}}.X_j + b'$$

quedando

$$X_s = \frac{s_{xs}}{s_{xj}}.\left(\overline{X}_j + l.s_{xj}\right) + b$$

$$X_s = \frac{s_{xs}}{s_{xj}}.\overline{X}_j + l.s_{xs} + b = \left(\frac{s_{xs}}{s_{xj}}.\overline{X}_j + b\right) + l.s_{xs} = \overline{X}_s + l.s_{xs}$$

Es decir que si los factores aleatorios provocan en Xj una desviación aleatoria del valor esperado de l desvíos típicos, también presentarán, como efecto de tales factores, tal desviación el resto de las variables Xs (s $\neq$j) s = 1, 2, …, n con lo que aumentará el grado de riesgo.

Es necesario tener en cuenta que si Xs y Xj son variables aleatoria independientes, entonces Cov(XsXj) = 0. Pero la Cov(XsXj) = 0 puede presentarse aún cuando Xs y Xj no sean variables aleatorias independientes como puede observarse en el siguiente ejemplo: (ver Winston, W. L., 2004).

Sea la variable aleatoria discreta siguiente.

$$P(X=-1)=P(X=0)=P(X=1)=\frac{1}{3}$$. Sea Y = X2.

En consecuencia

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\left[\left(X-\overline{X}\right)\left(Y-\overline{Y}\right)\right]=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$E(X,Y)=\frac{1}{3}.[(-1)(1)+0.0+1.1]=0$$

$$E(X)=\frac{1}{3}.[-1+0+1]=0$$

$$E(Y)=\frac{1}{3}.[1+0+1]=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Cov}(X,Y)=0-0.\frac{2}{3}=0$$

y las variables X e Y no son independientes.

ANEXO III

EL CAPM Y EL RIESGO EN LA EVALUACIÓN DE PROYECTOS

Partiendo de la SLM (*Security Market Line*) línea de mercado de valores:

$$E(R_i)=R_f+\frac{E(RM)-R_f}{V(RM)}.\mathrm{Cov}(R_iRM) \quad (\text{Ecuación A})$$

$E(R_i)$: valor esperado del rendimiento del activo i.
R_f: rendimiento del activo sin riesgo.
E(RM): valor esperado del rendimiento de mercado.
V(RM) varianza del rendimiento del mercado.
$\mathrm{Cov}(R_iRM)$ covarianza entre el rendimiento del activo i y el rendimiento del mercado.

En el método de equivalente de certeza al analizar el riesgo en la evaluación de proyectos resulta necesario obtener el coeficiente a_j. Se calculará de tal forma que a quien toma la decisión le sea indiferente percibir $a_j.F_j$ en condiciones de certeza que recibir F_j en condiciones de riesgo.

Se puede deducir el valor de a_j de la siguiente manera,

Sea:

Vi: el valor actual del activo i.
Yi: el valor al final del activo i (variable aleatoria).
Ri: tasa de rendimiento del activo I en el período (variable aleatoria).

$$\text{De } V_i=\frac{Y_i}{1+R_i} \quad \Rightarrow \quad R_i=\frac{Y_i}{V_i}-1 \quad \Rightarrow \quad E(R_i)=\frac{E(Y_i)}{V_i}-1$$

$$\mathrm{Cov}(R_iRM)=\mathrm{Cov}\left(\frac{Y_i}{V_i}-1,RM\right)=\frac{1}{V_i}\mathrm{Cov}(Y_i,RM)$$

Ver Anexo I (Propiedades de la Covarianza)
en consecuencia la ecuación A queda

$$\frac{E(Y_i)}{V_i} - 1 = R_f + \frac{E(RM) - R_f}{V(RM)} \frac{1}{V_i}.Cov(Y_i, RM)$$

despejando Vi

$$V_i = \frac{E(Y_i) - \frac{E(RM) - R_f}{V(RM)}.Cov(Y_i, RM)}{1 + R_f}$$

que proporciona el valor actual del activo i cuando el mercado se halla en equilibrio por un por un período.

El numerador constituye el equivalente cierto de la variable aleatoria Yi (Flujo de Fondos). Es decir que

$$a_j = \frac{E(Y_i) - \frac{E(RM) - R_f}{V(RM)}.Cov(Y_i, R_i)}{E(Y_i)}$$

o alternativamente:

$$\frac{E(RM) - R_f}{V(RM)}.Cov(Y_i, R_i) \qquad \text{PRIMA DE RIESGO}$$

se puede considerar como la prima de riesgo en el método de ajuste de la tasa de capital.

ANEXO IV

RESOLUCIÓN de la MATRIZ DE VARIANZAS Y COVARIANZAS por EXCEL

Probabilidad	FF1	FF2	FF3
0,5	100	150	250
0,5	100	150	250
0,5	100	150	250
0,5	100	150	250
0,5	100	150	250
0,2	120	180	290
0,2	120	180	290
0,3	130	195	270
0,3	130	195	270
0,3	130	195	270

	Columna 1	Columna 2	Columna 3
Columna 1	181		
Columna 2	271,5	407,25	
Columna 3	158	237	244

ANEXO V

RESOLUCIÓN DE LA APLICACIÓN DE PROGRAMACIÓN DE INVERSIONES

FUNCION OBJETIVO:	46,69035			Solución 1				
VARIABLES ENDOGENAS	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Y8
	1	1	0,99999923	0	1	0	0	1
ESPERANZAS (VANi)	14,6	10,4	11,5	7,3	11,7			

?=0,30

MATRIZ DE VAR-COV	VAN1	VAN2	VAN3	VAN4	VAN5
VAN1	5,88511376	-1,78349148	4,28017549	1,07029895	-4,4577084
VAN2	-1,78349148	0,62034486	-1,35700439	-0,5040302	0,89174574
VAN3	4,28017549	-1,35700439	3,15784104	0,91317213	-2,8976635
VAN4	1,07029895	-0,5040302	0,91317213	0,59891848	0,22242628
VAN5	-4,4577084	0,89174574	-2,8976635	0,22242628	6,01673299
VARIANZAS	5,88511376	0,62034486	3,15784104	0,59891848	6,01673299
0,3 X VARIANZAS	1,76553413	0,18610346	0,94735231	0,17967554	1,8050199
COV(VAN1;VANj)		-1,78349148	4,28017549	1,07029895	-4,4577084
2 x 0,3 x COV(VAN1;VANj)		-1,07009489	2,5681053	0,64217937	-2,67462504
COV(VAN1;VANj)			-1,35700439	-0,5040302	0,89174574
2 x 0,3 x COV(VAN1;VANj)			-0,81420263	-0,30241812	0,53504744
COV(VAN1;VANj)				0,91317213	-2,8976635
2 x 0,3 x COV(VAN1;VANj)				0,54790328	-1,7385981
COV(VAN1;VANj)					0,22242628
2 x 0,3 x COV(VAN1;VANj)					0,13345577

RESTRICCIONES

EROGACIONES	Proyecto 1	Proyecto 2	Proyecto 3	Proyecto 4	Proyecto 5					
	5	10	8	3	2	24,9999938	<=	25		
	4	7	3	2	4	17,9999977	<=	18		
PRODUCCIÓN	200	500	650			1349,9995	>=	0	700	
				250	350	350	>=	250	250	
	200	500	650			1350	<=	1350	850	1350
				250	350	550	<=	600	400	600
				1	1	1,000001	=	1		