Aplicación de la Metodología de Nelson y Siegel en la Estimación de la Estructura a Plazos de Tasas de Interés Utilizando Excel

Diego Alexander Restrepo Tobón[1]
Grupo de Investigación en Ingeniería Financiera
Universidad de Medellín
Junio de 2006

Resumen

En este trabajo se presenta una revisión teórica de las metodologías utilizadas para la construcción de la estructura a plazos de tasas de interés. Se realiza una aplicación al caso colombiano utilizando la metodología de Nelson y Siegel (1987) utilizando excel.[2] De igual forma, se presenta detenidamente cómo realizar la implementación utilizando datos de mercado y se realizan comparaciones con las curvas construidas por la Bolsa de Valores de Colombia. Las diferencias encontradas no son relevantes tratándose de un ejercicio teórico y, sobre todo, con fines de divulgación para el apoyo de la enseñanza de las finanzas. Se pretende que este trabajo contribuya al entendimiento de los principios, teorías y conceptos subyacentes a la construcción de estructuras a plazos de tasas de interés e incentive la investigación y la docencia en este campo en las Universidades Colombianas.[3]

Palabras claves: Curva Cero Cupón, Estructura a Plazos de Tasas de Interés, Renta Fija, Métodos Paramétricos, Bonos Cero Cupón, tasas spot, tasas forward, Nelson y Siegel.

---

[1] Administrador de Empresas de la Universidad de Antioquia, Especialista en Finanzas y Estudiante en la Maestría en Finanzas con énfasis en Ingeniería Financiera de la Universidad EAFIT. Actualmente se desempeña como docente de tiempo completo en la Universidad de Medellín.
Agradezco al profesor Kart Hess de la Escuela de Administración de la Universidad de Waikato en Nueva Zelanda por permitir realizar las modificaciones al progra

[2] Agradecemos al profesor Kart Hess de la Escuela de Administración de la Universidad de Waikato en Nueva Zelanda por permitir realizar las modificaciones al programa en Visual Basic con el objetivo de adaptar su modelo de estimación de la Curva Cero Cupón al caso Colombiano.

[3] El trabajo se acompaña de una aplicación en excel. Ha sido preparado especialmente para presentarse en el Tercer Simposio de Docentes de Finanzas 2006. En las memorias podría incluirse dicho aplicativo el cual estamos mejorando para su presentación.

Abstract

This work shows a theoretical survey about the method for estimating the term structure of interest rate. It makes an easy application with the Nelson and Siegel Model using excel. It shows the details for implementing this model in excel using market data. The differences between the yield curve estimated using excel and those of the Colombian Stock Exchange are not relevant for academic and theoretical purposes. This exercise makes a contribution to the understanding of the concepts underlying the construction of yield curves in order to advance in researching and teaching in this field at the colombian universities.

Palabras claves: Zero Coupon Curve, Term Structure of interest Rate, Fixed Income, TES, spot rates, forward rates, Nelson and Siegel.

1. INTRODUCCIÓN

Al inicio de la década de los noventa Colombia emprendió una serie de acciones tendientes a desarrollar su incipiente mercado de capitales. La estrategia principal para lograrlo fue la financiación directa del Estado a través del mercado público de valores. El resultado más evidente fue el desarrollo de un mercado de capitales con una alta concentración de deuda, dominado principalmente por los títulos de deuda pública. Es así como el mercado de deuda pública representa cerca del 90% de las transacciones que se realizan en el mercado de capitales colombiano[4]. El mercado de deuda privada o corporativa quedó relegado a un segundo plano y lejos de lograr una consolidación verdadera (Cárdenas et al., 2006).

El precario desarrollo del mercado de deuda privada en Colombia ha encontrado explicaciones descriptivas por diversos autores, esencialmente desde el punto de vista macroeconómico y microeconómico. Desde la primera perspectiva, la hipótesis principal sobre el actual desarrollo del mercado de deuda privada en Colombia se asocia a la fuerte presencia del Estado como usuario del mercado público de valores, lo cual ha provocado un claro desplazamiento de la inversión privada hacia la financiación del déficit y el gasto público. Así mismo, se presentan falencias a nivel del desarrollo institucional para el fomento de la participación de agentes privados en la colocación de títulos en dicho mercado. Desde la perspectiva microeconómica, la explicación del fenómeno en referencia se apoya en el análisis de variables a nivel de las empresas. Por un lado se analizan los incentivos de éstas para obtener financiación a través de este mecanismo, y por otro se estudia el nivel de la demanda de títulos de deuda privada en el mercado.

A nivel internacional Eichengreen y Luengnaruemitchai (2004) encontraron que características estructurales de los países y las políticas macroeconómicas y financieras explican un alto porcentaje de las diferencias entre el desarrollo del mercado de bonos entre Asia y el resto del mundo. Zervos (2004) documenta el

[4] Los otros mercados son: accionario, de derivados y deuda privada.

efecto que tienen variables como los costos de emisión, la regulación, los impuestos y gastos en publicidad y mercadeo que implica la financiación en el mercado de capitales por parte de las empresas. Su trabajo encuentra que existen algunos factores asociados a la oferta y la demanda de títulos que hacen costosa la financiación a través de este mecanismo. Beck y Levine (2002) estudiaron si un mercado basado en el sistema no intermediado[5] desempeña un mejor papel en la transferencia del ahorro a la inversión que el sistema intermediado.[6] No obstante, no encuentra evidencia contundente y esta característica parece no importar. Faulkender y Petersen (2003) analizan como las firmas toman decisiones sobre su estructura de capital combinando las teorías sobre estructura óptima y restricciones de crédito. Encuentran que las firmas cuya estructura de capital y restricciones de crédito son favorables a la financiación en el mercado de bonos tienen cerca de un 40% más de deuda.

Como señala Cárdenas et al (2006), el caso particular de Colombia no encuentra explicaciones sino a nivel del desarrollo del mercado en general. Fedesarrollo (1996) investiga los obstáculos del desarrollo del mercado de capitales señalando entre sus principales recomendaciones la necesidad de cambiar el marco regulatorio y fortalecer las instituciones. En 2004, Anif y Fedesarrollo estudiaron la estructura de capital de las empresas colombianas con el objetivo de establecer el por qué de su reticencia a participar como usuarios del mercado de deuda privada en Colombia. El estudio determinó que el mercado presentaba una alta concentración en instrumentos de corto plazo y que las empresas más grandes eran las más activas en este mercado. Las conclusiones del estudio no fueron significativamente diferentes a las obtenidas ocho años atrás por la *Misión de Estudios del Mercado de Capitales.*

En el contexto anterior, se pretende hacer una primera aproximación a la construcción de una curva de rendimientos para los bonos corporativos en

[5] Mercado de Capitales.
[6] Sistema bancario

Colombia. Esta tarea se justifica por dos razones fundamentales: La primera es que el desarrollo del mercado de bonos corporativos requiere de un apoyo institucional y metodológico para la valoración de estos títulos que ofrezca una mayor transparencia en la fijación del precio justo de los mismos. Esto sin duda, es un requisito fundamental para que los agentes participen de este mercado con elementos de análisis confiables. Además, contar con una estructura a plazos de tasas de interés para el mercado de deuda privada, permitirá tomar decisiones en cuanto a la utilización de estos instrumentos como mecanismos de financiación de las empresas, dado que las tasas de emisión del mercado primario deben guardar una estrecha relación con las negociadas en el mercado secundario. La segunda razón se asocia a la necesidad de los agentes que utilizan los instrumentos de deuda como instrumentos de ahorro, es decir, los demandantes de dichos títulos, de contar con una curva que refleje a lo largo del posible horizonte de inversión, un completo conjunto de información sobre la situación del mercado y las expectativas de corto, mediano y largo plazo.

Las curvas de rendimientos se utilizan frecuentemente para tomar decisiones de compra y venta de títulos. En este sentido, una rigurosa construcción de la misma hace posible que las transacciones en el mercado se presenten con una mayor regularidad, lo cual tiene un efecto positivo en la liquidez del mercado y en la eficiencia del mismo para canalizar los recursos del ahorro a la inversión de manera efectiva. Algunas de las aplicaciones más importantes de la curva de rendimientos son las siguientes: Valoración de créditos, toma de decisiones sobre posiciones activas y pasivas en el mercado, construcción de curvas de inversión para diferentes horizontes, estructuración de planes de pensión, valoración del riesgo de mercado, extracción de información sobre variables no observables como aversión al riesgo, expectativas de inflación, expectativas de crecimiento económico, efectividad de políticas monetarias, cobertura de riesgos, entre otras.

En este trabajo, además de ilustrarse la teoría y los métodos subyacentes a la construcción de la estructura a plazos de tasas de interés dada su importancia académica y práctica, se pretende mostrar como con herramientas fáciles de implementar y entender permiten la aplicación del modelo de Nelson y Siegel (1987). El análisis de este modelo en particular reviste gran importancia para Colombia pues es el que utiliza la Bolsa de Valores de Colombia para la estimación de la Curva Cero Cupón de los títulos de renta fija colombianos. No se pretende con esto llegar a estimaciones precisas, el objetivo principal es poner al alcance de la comunidad académica y profesional una herramienta que por su flexibilidad puede adaptarse a múltiples casos donde la construcción de curvas de rendimientos sea necesaria.

El trabajo se estructura de la siguiente manera: La primera parte de este trabajo es esta introducción. En la segunda representa una revisión bibliográfica sobre la estructura a plazos de tasas de interés. La tercera ilustra los métodos de estimación. En la cuarta se realiza la aplicación de la metodología de Nelson y Siegel utilizando Excel. La quinta y última parte presenta las conlusiones generales.

2. ESTRUCTURA A PLAZOS DE TASAS DE INTERÉS

La estructura a plazos de tasas de interés representa la relación entre las tasas de interés cero cupón y diferentes periodos de maduración. Generalmente, se pretende tener una medición de la relación entre las tasas de rendimiento de títulos sin riesgo de impago que difieren sólo en su plazo de maduración. Esta estructura da como resultado diferentes tasas de interés para plazos diferentes, con lo cual es posible lograr aproximaciones a la anticipación de eventos futuros en el mercado. Cuando se realiza una buena construcción de dicha estructura, es posible predecir como algunos cambios de las variables subyacentes impactan el nivel, la pendiente y la curvatura de la curva.[7]

Desde el punto de vista histórico, el primer intento empírico de obtener curvas de tipos de interés lo llevó a cabo H. Guthmann en 1929. Sin embargo, el trabajo posterior de Durand (1942) es más conocido por su extensión. Recoge tipos de interés para un período de 40 años y utiliza métodos gráficos para obtener curvas de títulos de empresas. En estos trabajos previos no se incorporan los cupones, sólo se tienen en cuenta los valores al vencimiento de los títulos. A partir de la década de los 60 se encuentran trabajos relevantes relacionados con el tema. Cohen, Kramer y Waugh (1966) y Fisher (1966) son los primeros en utilizar mínimos cuadrados ordinarios para ajustar tipos de interés. En estos trabajos se ajusta la curva mediante una regresión entre los rendimientos de los bonos y sus vencimientos. Cohen, Kramer y Waugh (1996) especifican el tipo de interés al contado como una función del tiempo y el cuadrado del logaritmo del mismo. Meiselman (1962) y Nelson (1972) utilizan tipos de interés implícitos, sin embargo no tienen en cuenta los cupones.

[7] Antes de adelantar la ilustración sobre la estructura a plazos, será conveniente remitirse al apéndice 1 para recordar algunos conceptos básicos sobre tasas de interés y bonos cero cupón.

Fue necesario esperar hasta Fisher y Weil (1971) para incorporar la temporalidad de los cupones en los tipos *forward.* El trabajo de McCulloch (1971, 1975), inició una nueva etapa y se considera el trabajo básico dentro de este campo. Desde entonces han aparecido métodos que se pueden dividir en dos grupos: los que buscan caracterizar la curva de tasas de interés con un conjunto de parámetros reducido generando curvas parsimoniosas, llamados métodos paramétricos; y los métodos que buscan un mayor ajuste utilizando polinomios por intervalos, llamados métodos no paramétricos o de *splines*. Ambos tipos de métodos se centran en el objetivo de obtener una función continua de descuento, de tasas al contado o de tasas a plazo para un conjunto de datos específicos.

La representación de la estructura a plazos de tasas de interés se aproxima a través de una función de tasas spot o al contado, forward o a plazos o de una función de factores de descuento. Partiendo de cualquiera de ellas es posible llegar a las demás de acuerdo a los supuestos subyacentes a cada uno de los modelos de construcción de la curva. La forma que empíricamente muestra la estructura a plazos de tasas de interés ha sido estudiada ampliamente. A continuación se realiza una ilustración sobre las teorías que intentan explicar el la relación que existe entre tasas al contado y a plazo y que dan forma a la estructura a plazos.

Los trabajos más importantes relacionados con la estimación de estas funciones se resumen en la siguiente tabla:

Función de descuento	McCulloch (1971, 1975) *Splines* polinomicos
	Schaefer (1981) Polinomios de Bernstein
	Vasicek y Fong (1982) *Splines* exponenciales
	Steeley (1991) B-*Splines*
Tipos de interés a plazo	Coleman, Fisher y Ibbotson (1992) *Splines*
	Nelson y Siegel (1987) Función parsimoniosa

	Svenson (1994) Función parsimoniosa
	Wiseman (1994) Modelo exponencial
Tipos de interés al contado	Langetief y Smoot (1989) *Splines* cúbicos
	Mastronicola (1991) *Splines* cúbicos
	Fisher, Nychka y Zervos (1995) *Smoothing splines*
	Gourieroux y Scalliet (1994) *Smoothing splines*

Los principales criterios que se deberán evaluar en cada método de modelación, siguiendo a Anderson y Sleath (2001), son:

Estabilidad: Una estructura de tasas real no tendrá variaciones importantes al eliminar datos y tampoco mayor variabilidad en el largo plazo.

Suavidad: Un factor importante es la consistencia de las curvas con las teorías tradicionales de la estructura de tasas de interés. Curvas más parsimoniosas tendrán mayor credibilidad en el largo plazo.

Ajuste: Dependiendo del uso que se le de a la curva generada se deberá decidir qué nivel de ajuste es el que se requiere. Para el caso de valorizar instrumentos se necesitan curvas que generen errores bajos, mientras que si se estiman curvas como indicadores de política monetaria se le da mayor importancia a la forma de la curva.

2.1 Teorías sobre la forma de la Estructura a Plazos de Tasas de Interés

La teoría clásica sobre la forma de las curvas de tasas de interés al contado o a plazo se fundamenta principalmente en tres hipótesis que dan tres razones diferentes por las cuales las curvas tienen una u otras formas:

2.1.1 Hipótesis de las expectativas

Esta hipótesis trata de explicar la forma de la curva a partir de la pendiente de la misma. En teoría, esta debería reflejar las expectativas del mercado sobre las tasas *spot* futuras, Fisher (1896), Hicks (1946). Si el mercado espera que las tasas de interés bajen, los inversionistas tienden a comprar bonos hoy para venderlos en el futuro por un valor superior. En este caso la pendiente es negativa. Si se espera un incremento en las tasas de interés, los inversionistas venderán hoy para comprar en el futuro. La pendiente en este caso será positiva. Existen cuatro versiones incompatibles sobre la hipótesis de las expectativas. La versión *insesgada de las expectativas* establece que las tasas *forward* actuales sonpredictores insesgados de las tasas *spot* futuras esperadas, es decir:

$$f(t,T,T+1) = f_t(T,T+1) = E_t\left[r(T)\right]$$

Donde $f_t(T,T+1)$ es la tasa *spot* en *t* para el periodo entre *T* y *T*+1. $E_t\left[r(T)\right]$ es la esperanza de la tasa *spot* que estará vigente en *T* para *T+1-T.*

La segunda versión es la hipótesis sobre los retornos hasta el vencimiento de un título, la cual establece que el rendimiento obtenido por tener un bono desde *t* hasta *T* debe igualar al retorno que se espera genere un bono que continuamente es reinvertido en intervalos de tiempo pequeños desde *t* hasta *T.* Formalmente para una inversión de 1 unidad moneatira en *t,* esto se expresa como:

$$\frac{1}{P(t,T)} = E_t\left[(1+r(t))(1+r(t+1))(1+r(t+2))...(1+r(T-1))\right]$$

Esta representación implica una condición de equilibrio, para la cual el retorno esperado para periodos de tiempo iguales debe ser el mismo. Cualquier diferencia en los retornos esperados para periodos iguales desaparecerá hasta reestablecerse el equilibrio, Jarrow (1996). No obstante, es posible que existan razones para mantener títulos con maduraciones cortas sin tener en cuenta su rendimiento. Esto hace que esta hipótesis sea inaplicable en algunas ocasiones.

La tercera versión es la de la hipótesis del rendimiento al vencimiento. Esta versión se plantea en términos de intereses y no de retornos[8]. Formalmente se expresa como:

$$\left[\frac{1}{P(t,T)}\right]^{\frac{1}{T-t}} = E_t\left[\left\{(1+r(t))(1+r(t+1))(1+r(t+2))...(1+r(T-1))\right\}^{\frac{1}{T-t}}\right]$$

Esta expresión establece que el rendimiento obtenido al tener sucesivamente bonos cero cupón con una maduración igual a subperiodos de *T-t,* debe igualar el rendimiento de tener un solo bono por un periodo *T-t.*

La cuarta hipótesis es la hipótesis de las expectativas locales. Establece que todos los bonos deberán generar la misma tasa de interés esperada si se tienen por un corto periodo de tiempo. Formalmente se expresa como:

$$\frac{E_t\left[P(t+1,T)\right]}{P(t,T)} = 1 + r(t)$$

2.1.2 Hipótesis de la preferencia por la liquidez o prima por liquidez

Esta teoría se expone en Hicks (1946) y se basa en el siguiente razonamiento: Los deudores requieren endeudarse por periodos de tiempo largos, mientras que los prestamistas prefieren prestar por periodos cortos. Establece que las tasas *forward* actuales difieren de las tasas *spot* futuras esperadas por una *prima de liquidez.* Esto se expresa de la siguiente manera:

[8] En la literatura inglesa se hace distinción entre return y yield. Esto crea confusiones en el idioma español, pues ambos se tratan indistintamente.

$$f_t(T,T+1) = E_t\left[r(T)\right] + \pi_t(T,T+1)$$

La *prima de liquidez* $\pi_t(T,T+1)$ es función del tiempo al vencimiento. Esta prima representa el conflicto entre las preferencias de los deudores y los prestamistas. Los especuladores y los *traders* tomarán posiciones largas a corto plazo y posiciones cortas a largo plazo en busca de obtener el valor de $\pi_t(T,T+1)$.

2.1.3 Hipótesis de la segmentación del mercado

Esta teoría descrita inicialmente por Culberston (1957) establece que en el mercado hay diferentes clases departicipantes, con diferentes necesidades e invirtiendo en tramos diferentes de la estructura a plazos de tasas de interés. Por ejemplo, instituciones como los fondos de pensiones requieren bonos de largo plazo para cumplir con las mesadas de sus futuros pensionados, mientras que otras instituciones financieras requieren bonos de corto plazo para atender las necesidades de sus ahorradores corto placistas. Existen otras causas que pueden hacer que las preferencias de los participantes sean diferentes. Por ejemplo, efectos regulatorios como exención de impuestos, niveles mínimos de inversión en algunos sectores, etc.

Una variante de esta teoría es la teoría del habitat preferido, Modigliani and Sutch (1967). Establece que aunque los inversionistas prefieran ciertos tramos de la curva, estarán dispuestos a ubicarse en otros si reciben una recompensa por hacerlo. Esa recompensa es la *prima por la liquidez.* Por ejemplo, un ahorrador de corto plazo puede aceptar no tener sus ahorros disponibles por cierto tiempo a cambio de una mejor remuneración por la utilización de su dinero. Esto explica los picos que algunas veces se presentan en la estructura a plazos, pues los que prefieren ciertos segmentos deprimen las tasas de ese tramo, haciendo que hayan picos. Para algunos, el segmento preferido es el corto plazo, pues es mejor tener el dinero disponible para cuando se requiera, mientras que las inversiones de largo plazo deben ofrecer un mayor retorno por no ofrecer liquidez en el corto plazo.

3. MODELOS PARA CONSTRUIR LA ESTRUCTURA A PLAZOS DE TASAS DE INTERÉS

Existen varias formas de caracterizar los modelos que pretenden representar la estructura a plazos de tasas de interés. Una caracterización general consiste en clasificarlos según utilicen métodos teóricos o métodos empíricos. Los modelos teóricos pretenden hacer una construcción rigurosa de acuerdo a algunas teorías particulares sobre la evolución, el comportamiento de las tasas de interés, formas explícitas sobre la estructura de los bonos con cupones y procesos de reversión a la media y comportamiento de la volatilidad de las tasas de interés. Estos modelos se basan en la identificación de elementos o factores que explican la dinámica de las tasas de interés. Estos factores son aleatorios o estocásticos, por tanto, sus niveles futuros son inciertos.

Los métodos teóricos se basan en el uso de la estadística para describir las propiedades de los factores estocásticos analizados. También se conocen como modelos de tasas de interés de corto plazo. Ejemplos de estos son los modelos de Vasicek (1977), Hull-White (1993), Cox-Ingersoll-Ross-CIR- (1985) y CIR extendido de Chen y Scott (1992), Brennan-Schwartz (1979), Heath-Jarrow-Morton –HJM- (1992) y HJM multifactor. Los modelos empíricos, son independientes de cualquier modelo o teoría sobre la estructura a plazos de tasas de interés. Los modelos teóricos tratan de explicar características típicas de la estructura a plazos tal como la forma en qué esta evoluciona a través del tiempo. En contraste, los modelos empíricos sólo tratan de encontrar una representación cercana de la estructura a plazos de tasas de interés, tal como esta se presenta según datos reales.

Entre los principales métodos empíricos se encuentran: *boostrapping* propuesto por Fama y Bliss (1987), aplicación de *splines* propuestos por McCulloch (1971), Shea (1985), Fisher et al. (1994), Wegman (1985) y Buse (1977); métodos *polinomiales* como en Nelson y Siegel (1987), Svenson (1994) y Buono et al (1992) y el método de *aproximación por máximo suavizamiento* de Adams y Van Deventer (1994). Los primeros trabajos sobre la construcción de los modelos teóricos trataron de explicar el comportamiento de la tasa de interés en el corto plazo. Esto es, para un periodo infinitesimalmente pequeño. Se asume que las tasas de corto plazo siguen un proceso estadístico y las demás tasas de interés son funciones de aquellas. Estos modelos se conocen como modelos de un factor, aunque existen de dos y más factores. A continuación se presentan los principales modelos teóricos y empíricos que se han utilizado para construir la estructura a plazos de tasas de interés.

3.1 Modelos teóricos para la representación de la Estructura a Plazos de Tasas de Interés

La modelación de la estructura a plazos de tasas de interés es uno de los campos de mayor actividad investigativa en la teoría financiera[9]. El propósito de esta sección es sentar las bases teóricas que soportan la construcción de la estructura a plazos de tasas de interés. Para esto se exponen a continuación los modelos de Vasicek (1977), Hull-White (1993), Cox-Ingersoll-Ross-CIR- (1985) y CIR extendido de Chen y Scott (1992), Brennan-Schwartz (1979), Heath-Jarrow-Morton –HJM- (1992) y HJM multifactor. No obstante, antes de avanzar en esta línea se plantean los elementos básicos para entender dichos modelos.

Los modelos que intentan obtener una representación cercana de la estructura y comportamiento de las curvas de rendimiento utilizan procesos estadísticos para describir las propiedades estocásticas y llegar a una representación ajustada y razonable del comportamiento de las tasas de interés. Los primeros trabajos

[9] Choudhry (2005)

intentaron modelar el comportamiento de las tasas *spot* de corto plazo. Los trabajos más recientes en este sentido se fundamentan en la modelación de las tasas forward, por ejemplo, el modelo HJM (1992) modela las tasas forward en vez de las tasas *spot.* En los modelos de un solo factor se asume que las tasas de interés de corto plazo son variables aleatorias, es decir, su nivel futuro no se puede determinar con certeza. Las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas.[10] Las variables discretas se mueven en intervalos discontinuos o con saltos. Las variables continuas se mueven sin saltos. Las tasas de interés se han tratado como variables continuas en la literatura, aunque en la práctica resultan ser discretas. Esto obedece a la facilidad en el tratamiento matemático de este tipo de variables.

Se asume que las tasas de interés de corto plazo siguen un proceso estocástico. En este sentido, a lo sumo es posible la estimación de un intervalo en el cual se encontrarán sus posibles estados futuros, más que en valores puntuales del mismo. Sin embargo, el proceso mediante el cual las tasas de interés evolucionan en el tiempo es posible de modelarse. Esto es precisamente lo que intentan hacer los modelos de un solo factor para tratar de capturar el comportamiento de dichas tasas de interés de corto plazo. En el siguiente apartado se sigue de cerca de Choudhry (2005).

El análisis de los procesos estocásticos usa herramientas utilizadas inicialmente el la física. El cambio instantáneo de un valor en un intervalo pequeño de tiempo se denota por *dx.* Generalmente se asume que los cambios en dichas variables son gaussianos. Las innovaciones o choques al proceso son aleatorios y se asumen que provienen de un proceso generalizado de Wiener o Movimiento Browniano Geométrico[11]. Una variable que siga un proceso de *Wiener* es una variable aleatoria que denotaremos por *x* o *z.* Esta variable se distribuye normal estándar.

[10] Vease, Fernandez (1994) para un excelente tratamiento sobre variables aleatorias.
[11] Para una mejor comprensión de estos procesos ver Ross (1996).

Consideremos por ejemplo la tasa de interés *r* de un bono cero cupón. El cambio en *r* denotado por *dr,* sigue un proceso generalizado de *Wiener,* formalmente:

$$dr = dz$$

Los cambios instántáneos de la tasa de interés son escalados por la volatilidad del proceso que denotaremos por σ, así:

$$dr = \sigma dz$$

El valor que asume σ debe ser estimado, pues la volatilidad es una variable no observable.

Se ha supuesto que la tasa de interés puede describirse mediante un proceso estocástico que sigue un movimiento browniano que varía sin una tendencia determinística. Sin embargo, esta definición es incompleta, pues asume que las tasas de interés crecen o caen indefinidamente. No obstante, la teoría económica aboga por la existencia de un equilibrio de las tasas de interés en el largo plazo (estado estacionario). Por lo tanto, se debe especificar un mejor modelo que tenga en cuenta esta característica de las tasas de interés. Es decir, que las tasas de interés se mueven en un ciclo, algunas veces al alza, otras a la baja. En este modelo se debe incluir un segundo término que capture el hecho de que las tasas de interés siguen un comportamiento en una dirección dada en el corto plazo.

Formalmente tenemos:

$$dr = adt + \sigma dz$$

Donde:

$dr =$ Cambio en la tasa de interés de corto plazo

$a =$ Expectativa de cambio o *drift*

$dt =$ El cambio incremental en un intervalo infinitesimal de tiempo

$\sigma =$ Desviación estándar de los movimientos de los precios

$dz =$ Proceso aleatorio, movimiento browniano o proceso de *Wiener.*

Esta ecuación es similar a la descrita en Vasicek (1977), Ho y Lee (1986), Hull y White (1991). En pocas palabras, la ecuación establece que el cambio en las tasas de interés tiene un componente determinista dado por adt y otro estocástico o aleatorio capturado por σdz. Dado que este proceso sigue un movimiento browniano, goza de dos propiedades importantes: 1. La tasas de cambio o *drift* es igual al cambio esperado en la tasa de interés de corto plazo, si el *drift* es cero, el cambio también será cero. 2. La varianza del cambio de las tasas de interés en el corto plazo es igual a *T,* y su desviación estándar igual a $\sqrt{T}$.

El modelo anteriormente expuesto puede mejorarse si además, se involucra un factor que haga que la tendencia en el cambio de las tasas de interés vuelva a su valor de equilibrio en el largo plazo. Esto generalmente se conoce en la literatura como procesos de reversión a la media. La especificación del modelo es la siguiente:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dz$$

Donde

$b =$ El nivel de equilibrio de la tasas de largo plazo.

$a =$ La velocidad de reversión a la media, conocida también como el *drift*

La anterior ecuación se conoce como proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Cuando *r* está por debajo o por encima de *b,* retornará a *b,* aunque choques aleatorios generados por *dz* perturbarán su evolución.

3.1.1 Modelos de Estructura a Plazos de un solo Factor

3.1.1.1 El modelo de Vasicek (1977)

Este modelo fue el primer modelo de estructura a plazos de tasas de interés descrito en la literatura. Es un proceso de un solo factor basado en el equilibrio de las tasas de interés que asume que las tasas de interés de corto plazo siguen un proceso *gaussiano* e incorpora la dinámica de reversión a la media. Este modelo goza de gran aceptación entre profesionales y académicos por su fácil tratamiento matemático y estadístico. Además, es fácilmente aplicable a la estimación de la estructura a plazos de tasas de interés. No obstante, el modelo no logra captar adecuadamente el no arbitraje de precios de los bonos que actualmente se negocian en el mercado. El modelo de Vasicek se expresa de la siguiente manera[12]:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dz$$

Donde:

$a =$ Es la velocidad de reversión a la media

$b =$ El nivel de reversión a la media de *r*

$z =$ Proceso estándar de *Wiener* con media cero y desviación estándar 1.

Según este modelo el precio en el momento *T* está dado por la siguiente ecuación:

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

Donde:

---

12 En la literatura es común encontrar notaciones diferentes para el modelo de Vasicek, por ejemplo: $dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dz$ o $dr = \alpha(\mu - r)dt + \sigma dZ$

$r(t) =$ Es la tasa de interés de corto plazo vigente en *t.*

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

Además, $A(t,T) = \exp\left[\frac{(B(t,T) - T + t)(a^2 b - \sigma^2 / 2)}{a^2} - \frac{\sigma^2 B(t,T)^2}{4a}\right]$

En el modelo de Vasicek, la tasa de interés *r* es normalmente distribuida, lo que hace que exista una probabilidad positiva de que la tasa de interés sea negativa, esto no tiene sentido efconómico. No obstante, esta situación se presenta dependiendo de los valores iniciales de *r* y los demás parámetros. Cuando estos son bajos, la probabilidad de que esto ocurra es alta. Esta posibilidad es incompatible con la teoría de no arbitraje, sin ebargo, el modelo es ampliamente utilizado dadas sus robustas estimaciones.

3.1.1.2 Modelo de Hull-White (1993)

Este modelo utiliza el modelo de Vasicek como punto de partida para ajustarlo a una curva de rendimientos observada en el mercado. Se conoce, en ocasiones, como una extensión del modelo de Vasicek con una tendencia en función del tiempo. El modelo es popular entre los profesionales debido a que con éste es posible estimar una curva teórica de rendimientos idéntica a la observada en el mercado que puede ser utilizada para valorar títulos, derivados y realizar coberturas.

El modelo se expresa de la siguiente manera:

$$dr = a\left(\frac{b(t)}{a} - r\right)dt + \sigma dz$$

Donde:

$a =$ Es la velocidad de reversión a la media

$\frac{b(t)}{a} =$ Es la reversión a la media en función del tiempo

Dado el modelo anterior el precio de un bono viene dado por:

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

Donde:

$r(t) =$ Tasa a corto plazo en el tiempo t

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

$$\ln A(t,T) = \ln\left[\frac{P(0,T)}{P(o,t)}\right] - B(t,T)\frac{\partial P(0,t)}{\partial t} - \frac{v(t,T)^2}{2} \text{ y}$$

$$v(t,T)^2 = \frac{1}{2a^3}\sigma^2(e^{-aT} - e^{-at})^2(e^{2at} - 1)$$

3.1.1.3 Modelo de Cox-Ingersoll-Ross, modelo –CIR- (1985)

Este modelo data de 1977, aunque fue publicado sólo hasta 1985. Es un modelo de un solo factor. Al igual que el modelo de Vasicek define los movimientos en las tasas de interés en función de la dinámica de las tasas de interés de corto plazo. Difiere de éste, en cuanto incorpora una característica adicional, que vincula la variación de las tasas de interés en función del nivel de las mismas. Esta característica hace que el modelo no genere tasas de interés negativas. Así mismo, es capaz de capturar el comportamiento de las tasas de interés en términos de la volatilidad de las mismas. Cuando las tasas de interés son altas (bajas), su volatilidad también lo es. El modelo CIR se expresa de la siguiente forma:

$$dr = k(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz$$

Donde:

$k =$ Velocidad de reversión de la media

El precio de un bono cero cupón de acuerdo al modelo viene dado por:

$$P(r,\tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r}$$

Donde:

$\tau =$ Plazo de maduración del bono, es decir: $(T - t)$

$$A(\tau) = \left[\frac{2\gamma e^{(\gamma+\lambda+k)\frac{\tau}{2}}}{g(\tau)}\right]^{\frac{2kb}{\sigma^2}}$$

$$B(\tau) = \frac{-2(1 - e^{-\gamma\tau})}{g(\tau)}$$

$$g(\tau) = 2\gamma + (k + \lambda + \gamma)(e^{\gamma\tau} - 1)$$

$$\gamma = \sqrt{(k + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$$

El parámetro λ debe ser preespecificado con el objetivo de ajustar el nivel de las tasas y vincular la prima de riesgo asociada con los bonos de más largo plazo. Sin embargo, esta determinación es una de las principales debilidades del modelo, pues no son fáciles de establecer. Van Deventer (1997) y Fleseker (1993) citados por Choudhry (2005) realizan una buena caracterización de este aspecto.

3.1.2. Modelos de la Estructura a Plazos de Tasas de Interés de dos Factores

Estos modelos de equilibrio proponen una especificación diferente para la construcción de la estructura a plazos. Como su nombre lo indican esta clase de modelos se fundamentan en dos factores. Uno de estos es la tasa de interés de corto plazo. Otros factores pueden ser: La tasa spot instantánea, la tasa de interés de largo plazo (por ejemplo a 10 años), el spread actual o el spread esperado entre las tasas de interés de corto y largo plazo (prima por liquidez), la tasa de inflación esperada, el spread actual o esperado entre los títulos con riesgo de impago y los títulos libres de riesgo, la inflación actual o el promedio esperado de largo plazo.[13] La elección del tipo de factores a modelar depende de los propósitos de la investigación. Algunos responden a las necesidades de valoración de títulos de renta fija, otros para establecer estrategias de arbitraje en los mercados de derivados.

3.1.2.1 Modelo de Brennan-Schwartz

Brennan y Schwartz (1979) desarrollaron un modelo donde el proceso seguido por la tasa de interés de corto plazo revierte al nivel de la tasa de interés de largo plazo. La tasa de interés de largo plazo se elige como aquella que corresponde a un bono emitido a perpetuidad que paga una unidad monetaria (1 u.m.) cada año. Así, el precio de este título es el recíproco de la tasa de interés. Esto hace que se

[13] Choudry (2005) op. Cit. p. 75.

pueda utilizar el lemma de Ito para modelar el proceso que sigue la tasa de interés a partir del proceso seguido por el precio.[14]

Este modelo usa la tasa de interés de corto plazo y la tasa de interés de largo plazo para modelar la estructura de tipos de interés. Se asume que ambas tasas siguen un proceso de Markov Gaussiano. Este tipo de procesos implica que los parámetros que son aleatorios siguen una distribución Normal. Un proceso de Markov implica que el comportamiento futuro de esos parámetros está condicionado sólo al valor presente y no a sus valores pasados. Longstaff y Schwartz (1992) demostraron que el modelo es útil en la valoración de bonos. En este modelo la dinámica del logaritmo natural de la tasa de interés de corto plazo viene definida por la siguiente ecuación:

$$d\left[\ln(r)\right] = a\left[\ln(l) - \ln(p) - \ln(r)\right]dt + \sigma_1 dz_1$$

Donde p representa la relación entre la tasa de interés de corto plazo, r, y la tasa de interés de largo plazo, l Esto implica que las tasas de interés de corto y largo plazo se mueven simultáneamente, en especial, que la tasa de corto plazo se mueve en función de la tasa de largo plazo, la cual sigue el proceso estocástico definido en la siguiente ecuación.

$$dl = l\left[l - r + \sigma_2^2 + \lambda_2\sigma_2\right]dt + l\sigma_2 dz_2$$

Donde λ es la prima de riesgo asociada a la tasa de interés de largo plazo.

3.1.2.2. Modelo extendido de Cox-Ingersoll-Ross

El modelo unifactorial de Cox-Ingersoll-Ross fue modificado por Chen y Scout(1992) para incluir dos factores. Sin embargo, a diferencia del modelo de

[14] Hull (2004). P. 543.

Brennan y Schwarz estos dos factores no están correlacionados y cada uno sigue un proceso estocástico. La especificación del modelo es la siguiente:

$$dy_i = k_i(\theta_i - y_i)dt + \sigma_i \sqrt{y_i} dz_i$$

Donde:

y_i Variables independientes y_1 y y_2.

k y θ: Parámetros que describen el drift y dz_i es el factor estocástico.

Según este modelo, el rpecio de un bono cero cupón puede ser calculado mediante la siguiente fórmula:

$$P(y_1, y_2, t, T) = A_1 A_2 e^{-B_1 y_1 - B_2 y_2}$$

Donde A y B se definen como en el modelo de Vacicek.

3.1.2.3 Modelo de Heath-Jarrow-Morton

Este modelo se aparta de la especificación que se hace en los demás respecto a la tasa de interés de corto plazo. En los modelos que le anteceden sólo esta se consideraba como variable de estado. En el modelo HJM toda la estructura se considera como variable de estado. El modelo unifactorial de HJM usa las tasas forward en vez de las tasas spot. Asume que estas están en función de la volatilidad, un drift y un proceso Browniano o proceso de Wiener el cual es responsable de los choques aleatorios que sufre la estructura a plazos.

Se supone que la estructura a plazos de tasas forward $f(t,T)$ es integrable de orden *T*. La dinámica de esta estructura puede ser descrita por una ecuación diferencial estocástica como la siguiente:

$$df(t,T) = a(t,T)dt + \sigma dz$$

Donde a es el drift y σ es el nivel constante de la volatilidad. Además dz es el Movimiento Browniano geométrico o proceso Wiener. Integrando esta ecuación resulta:

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t a(s,T)ds + \sigma dz$$

Donde *s* es un incremento futuro en el tiempo, así que: $0 \leq t \leq T$ y $t \leq s \leq T$

La ecuación anterior asume que las tasas forward se distribuyen de manera normal. Además, las tasas forward se presumen correlacionadas. El elemento aleatorio es el proceso Browniano Geométrico.

El modelo unifactorial HJM establece que dada una estrcutra inicial $f(t,T)$, la tasa forward para cada periodo de maduración T viene dada por la siguiente integral:

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t a(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)dz(s)$$

La cual es la integral de:

$$df(t,T) = a(t,T)dt + \sigma(t,T)dz$$

El modelo HJM multifactor asume que cada tasa forward para todos los plazos de maduración posible está afectada por su propio movimiento Browniano. Este modelo viene representado por la siguiente expresión:

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t a(s,T)ds + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \sigma_i(s,T)dz_i(s)$$

3.2 Modelos empíricos para la representación de la Estructura a Plazos de Tasas de Interés

Las curvas de rendimiento son una forma de visualizar la estructura a plazos de tasas de interés y son una importante herramienta para analizar loa factores que la determinan. La estimación de estas curvas mediante los métodos denominados empíricos involucra dos tareas: **bootstrapping** y ajuste de curvas las cuales pueden ser difíciles de lograr dadas las condiciones de algunos mercados, por ejemplo, la falta de datos, la iliquidez e infrecuencia de transacciones de algunos de los títulos. Estos métodos también son conocidos como métodos paramétricos. Entre estos los más importantes son el expuesto por Nelson y Siegel (1987), la extensión de Svensson (1994) y los métodos clásicos de splines de McCulloch(1971).

El principio subyacente de los métodos paramétricos, también llamados modelos basados en funciones, es la estimación una función definida para todo el intervalo de plazos de maduración de los títulos. Los diferentes métodos utilizados comprenden la estimación de diferentes funciones. No obstante, todos comparten el método de estimar los parámetros de la función a partir de la minimización de la suma del cuadrado de las desviaciones de los precios observados con los estimados utilizando la función propuesta.

3.2.1 Método de McCulloch (1971)

Específicamente ajustó un spline a la curva de descuento de bonos con cupones de la industria ferroviaria de EEUU. Las funciones son cuadráticas en la formulación de McCulloch (1971), lo que produce una curva de descuento con poca flexibilidad. Además genera curvas forward no muy suaves. McCulloch (1975) utiliza funciones cúbicas para mejorar tanto la flexibilidad de la curva como la forma de las curvas forward. Los splines cúbicos sirven como base para todos los métodos de splines encontrados en la literatura y que se utilizan para la estimación de la estructura a plazos de tasas de interés.

McCulloch modela la función de descuento mediante una combinación lineal de k funciones diferenciables $f_j(t)$:

$$d(t) = 1 + \sum_{j=1}^{k} a_j f_j(t)$$

donde *k* representa el grado del spline, los $f_j(t)$ son funciones de los nodos y los a_j son parámetros a estimar. Mediante esta formulación se estiman los parámetros a_j de la función usando regresión lineal lo que facilita la estimación. Se ajusta la curva utilizando los datos de los bonos con cupones mediante mínimos cuadrados ordinarios. El número de funciones a incorporar, *k*, se define arbitrariamente, aunque se obtiene un mejor ajuste si el número de funciones definidas es elevado. Sin embargo, este número ha de tener relación con el número de títulos disponibles en el mercado. McCulloch propone utilizar:

$$k = E\left[\sqrt{n}\right]$$

siendo *E* la parte entera más próxima al resultado y *n* el número de título utilizados en el ajuste.

3.2.2. B-Splines

La estimación por este método se realiza suponiendo que la función de descuento $d(t)$ es una combinación lineal de B-Splines Cúbicos.

$$d(t)=\sum_{i=1}^{k} a_i B_p^k(t)$$

En general, una función a plazo B-spline de *k*-ésimo grado se puede definir de la siguiente forma:

$$B_p^k(t)=\sum_{l=p}^{p+k+1}\left[\prod_{h=p,p\neq l}^{p+k+1}\frac{1}{(t_h-t_l)}\right](t-t_l)_+^k, \qquad -\infty<t<\infty$$

Donde *t ,* definido en los números reales, corresponde a cada periodo t_{ij} en que el bono recibe su respectivo cupón, *k* es el grado de a función B-Spline, *p* indica que la función $B_p^k(t)\neq 0$ cuando $t\in\left[t_p,t_{p+k+1}\right]$con $p=-k,...,n^*-1$ que corresponde al *p-ésimo* componente de la base, siendo n^* el numero de segmento en que se divide el espacio de aproximación, comprendido entre 0 y la fecha de maduración máxima observada entre todos los bonos. Los extremos comprendidos entre cada subsegmento comprendido entre 0 y n^*-1 se denominan nodos internos, denotados por t_p con $p=0,1,...,n^*-1$, en tanto que los nodos t_p con $p\in\left[-k,-k+1,...,0\right)$ se denominan nodos extras. El subíndice + indica que una función de potencia truncada $(t-t_l)_+^k$ es igual a $\max\left[0,(t-t_l)^k\right]$. A partir de lo anterior se puede definir el numero de funciones de aproximación B-spline que se utilizan en el proceso de estimación de los parámetros de la función de descuento como $L=n^*+k$.

Steeley señala que el cálculo de la función presentada es bastante complejo e inconveniente. Como alternativa se plantea el uso de la formula recursiva propuesta por Powell (1981) que conduce a los mismos resultados y facilita los cálculos. La redefinición de la función B-Spline de *k-ésimo* grado para todo número real $t \in \left[t_p, t_{p+1}\right]$ esta dada por:

$$B_p^k\left(t\right) = \frac{\left(t - t_p\right) B_p^{k-1}(t) + \left(t_{p+k+1} - t\right) B_{p+1}^{k-1}(t)}{\left(t_{p+k+1} - t_p\right)}$$

3.2.3. Smoothing splines

La estimación de la curva cero cupón por este método se realiza suponiendo que la tasa a plazo instantánea $f(t)$ es una combinación lineal de B-Splines Cúbicos.

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i B_p^k(t)$$

Al igual que en McCulloch (1971) el número de parámetros está definido por el número de nodos. Un mayor número de nodos entregará un ajuste más perfecto pero con el problema del aumento de la variabilidad en la forma de la curva. Un número reducido de nodos entrega un ajuste precario. Fisher, Nychka y Zervos (1994) proponen penalizar el exceso de variabilidad en la función estimada mediante la siguiente función:

$$\lambda \int_0^T f''(t)^2 dt$$

la cual corresponde a la integral sobre el dominio de plazos de la segunda derivada al cuadrado de la función por el parámetro de penalización λ .

El parámetro de penalización es estimado mediante un método general de validación cruzada que considera los errores de bonos dejados fuera de la estimación con respecto a los errores de los bonos usados en la estimación. Un error mayor fuera de muestra implica mayor variabilidad mientras que errores grandes en los bonos dentro de la muestra implica un peor ajuste a los datos. Waggoner (1997) propone utilizar λ variable por intervalos mejorando el ajuste para el corto plazo en el cual existe mayor variabilidad y aumentando la penalización en el largo plazo en donde existe mayor estabilidad. Anderson y Sleath (2001) propone una forma funcional continua $\lambda(t)$ también estimada mediante un método general de validación cruzada.

3.2.4. Splines exponenciales

Vasicek y Fong (1982) utilizan un *spline* cúbico para estimar la transformada de la función de descuento.

$$d(t) = a_0 + a_1 e^{-\alpha t} + a_2 e^{-2\alpha t} + a_3 e^{-3\alpha t}$$

Donde los a_j y α son parámetros a estimar. Lamentablemente los autores no reportan ningún resultado que permita confirmar sus hipótesis.

A pesar de la extensa literatura dedicada a este tema, no existe consenso a nivel académico ni profesional, sobre cuál es el modelo válido para establecer la curva de tipos de interés, si bien algunos modelos tienen más aceptación que otros. Como se mencionó anteriormente, las funciones $f_j(t)$ son cuadráticas en la formulación de McCulloch (1971), lo que produce una curva de descuento con poca flexibilidad. Además, esta formulación genera curvas forward no muy suaves. McCulloch (1975) utiliza funciones cúbicas para $f_j(t)$ mejorando tanto la flexibilidad de la curva como la forma de las curvas a plazo.

Una de las desventajas de los *splines* cúbicos estimados mediante regresión es que tienden a ser muy inestables lo que se traduce en estructuras de tasas de interés oscilantes las cuales son poco creíbles en la práctica. Respecto de las B-splines, se puede decir, que para obtener una curva de tipos a plazo suficientemente suave es necesario utilizar un *spline* de grado tres, como mínimo. Esta formulación también genera splines cúbicos, idénticos a los generados por el método de McCulloch (1975), pero a su vez permite resumir en menos parámetros la función en una formulación numéricamente estable. La ventaja de los B-splines es que están construidos de manera de incorporar condiciones de suavidad en los nodos de forma fácil y presentan una forma funcional que se traduce en sistemas lineales.

La estimación con funciones splines tiene la desventaja de producir curvas con demasiada fluctuación. Para solucionar este problema se propone utilizar smoothing splines, los cuales penalizan la función objetivo de la suma de la minimización de los errores cuadrados por medio de una medida de fluctuación calculada como la integral de la segunda derivada al cuadrado de la función de la tasa a plazo por un parámetro de penalizacion λ. Los precursores de los *splines* exponenciales defienden que el uso de la función exponencial, permite obtener una función de descuento acorde con su propia estructura y por lo tanto los tipos a plazo resultantes no presentan la dispersión que se obtiene en el modelo de McCulloch (1971, 1975).

3.2.5 El modelo de Nelson y Siegel (1987)

El modelo de Nelson y Siegel (1987) intenta representar la estructura a plazos de tasas de interés a partir de la utilización de la siguiente función de tasas forward:

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{(-m/\tau)} - \beta_2 \, m/\tau \, e^{(-m/\tau)}$$

Donde:

$f(m)$ es la tasa forward para el plazo en años *m*

$\Theta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1)$ es un conjunto de cuatro parámetros a estimar.

Al igual que en McCulloch (1971), la metodología planteada por Nelson y Siegel permite la estimación de una función de descuento para cada día de transacciones. Sin embargo, difiere en la forma funcional propuesta de la metodología de splines cúbicos propuesta por McCulloch pues ésta tiene la desventaja de estimar tasas forward inestables, especialmente en el largo plazo.[15] El modelo de Nelson y Siegel utiliza cuatro parámetros, de ahí que se diga que es un modelo parsimonioso. Tiene la ventaja de ser capaz de representar las formas de la estructura a plazos de tasas de interés que generalmente se describen en la literatura: monotonicidad, jorobas y formas en "S". La aplicación que hicieron Nelson y Siegel permitió establecer que alrededor del 96% de la variabilidad de las tasas de interés de los títulos que se utilizan para su estimación. Además, el movimiento de los parámetros a lo largo del tiempo provee información sobre políticas monetarias y actividad económica que se ilustrarán más adelante. La capacidad de ajustar bien los precios de los títulos es una de las características fundamentales que han hecho que esta metodología se aplique ampliamente por los bancos centrales alrededor del mundo como se muestra en el Anexo 2.

Dado que las tasas *spot* son un promedio de las tasas *forward* futuras esperadas, podemos utilizar la expresión siguiente para encontrar las tasas spot a partir de la especificación funcional de Nelson y Siegel para las tasas forward:

$$S(m) = \frac{1}{(m)} \int_0^m f(s) \partial(s)$$

[15] Shea (1984), citado por Svensson (1995), p. 17.

Integrando la función de tasas forward respecto a *m,* como lo indica la anterior expresión resulta:

$$S(m) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)\frac{1 - e^{(-m/\tau)}}{m/\tau} - \beta_2 e^{(-m/\tau)}$$

Cuando *m* tiende a infinito, las tasas spot y las tasas forward tienden a β_0, el cual debe ser positivo.

$$\lim_{m\to\infty} S(m) = \lim_{m\to\infty} f(m) = \beta_0$$

Así mismo, cuando *m* tiende a cero, la tasa spot será igual a $(\beta_0 + \beta_1)$.

$$\lim_{m\to 0} S(m) = \beta_0 + \beta_1.$$

Claramente, β_1 representa la desviación de las tasas de interés de su valor de equilibrio asintótico β_0. Adicionalmente, $(\beta_0 + \beta_1)$ debe ser un valor positivo, además puede interpretarse como el nivel de la estructura a plazos de tasas de interés. El parámetro β_2, es responsable de la pendiente de la curva. Valores negativos de β_2 llevan a que la curva tenga forma de U. Valore positivos indican curvas con forma de joroba. Finalmente, el parámetro τ muestra qué tan pronunciada es la curvatura de la curva. Cuando τ es alto, la curva es bastante cóncava. Cuando es bajo, la curva se aproxima a una línea recta, es decir se aplana.

El objetivo de la metodología de Nelson y Siegel es minimizar la suma de las desviaciones al cuadrado de los precios de los títulos que se utilizan para hacer el cálculo de los parámetros de la función propuesta. No obstante, La optimización se hace a partir de un proceso iterativo en donde se utilizan las tasas spot dadas por la función en la determinación de los precios estimados y luego se procede a realizar la minimización de la suma de los errores al cuadrado entre los precios estimados y los precios observados en el mercado.

Esto se representa formalmente de la siguiente forma:

$$\min\left(\sum_{i=1}^{N}(\varepsilon_i)^2\right)$$
$$\varepsilon_i = \hat{P}_i - P_i$$

3.2.6 El modelo de extendido de Nelson y Siegel, Svensson (1994).

Para mejorar la eficiencia de la función propuesta por Nelson y Siegel en cuanto a flexibilidad y ajuste, Svensson (1994) realiza una extensión de este modelo adicionando un término que permite estimar una segunda causa de curvas en forma de joroba. Esta precisión se logra perdiendo un poco de parsimonia en el modelo, pues es necesario estimar dos parámetros adicionales β_3 y τ_2. La función de las tasas forward se convierte en:

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{(-m/\tau)} - \beta_2 \, m/\tau_1 \; e^{(-m/\tau)} + \beta_3 \, m/\tau_2 \; e^{(-m/\tau_2)}$$

Donde β_3 y τ_2 cumplen las mismas funciones que β_2 y τ_1 explicada anteriormente. Así, para estimar las tasas spot se debe integrar respecto a *m* y utilizar $S(m) = \frac{1}{(m)}\int_0^m f(s)\partial(s)$.

Se llega a la siguiente función:

$$S(m) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1-e^{(-m/\tau_1)}}{m/\tau_1} + \beta_2\left(\frac{1-e^{(-m/\tau_1)}}{m/\tau_1} - e^{(-m/\tau_1)}\right) + \beta_3\left(\frac{1-e^{(-m/\tau_2)}}{m/\tau_2} - e^{(-m/\tau_2)}\right)$$

Se sigue el mismo procedimiento de optimización para llegar a la estimación de los seis parámetros. No obstante, la función a optimizar viene dada por:

$$\min\left(\sum_{i=1}^{N}\left(w_i\varepsilon_i\right)^2\right)$$

Donde: $w_i = \dfrac{1/D_i}{\sum_{j=1}^{N} 1/D_j}$ y $\varepsilon_i = \hat{P}_i - P_i$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} &0 \le r\left(m_{\min}\right) \\ &0 \le r\left(m = \infty\right) \\ &\exp\left(-r\left(m_k\right)m_k\right) \ge \exp\left(-r\left(m_{k+1}\right)m_{k+1}\right) \end{aligned}$$

Con lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} &S_m\left(m,\Theta\right) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1-e^{\left(-m/\tau_1\right)}}{m/\tau_1} + \beta_2\left(\frac{1-e^{\left(-m/\tau_1\right)}}{m/\tau_1} - e^{\left(-m/\tau_1\right)}\right) + \beta_3\left(\frac{1-e^{\left(-m/\tau_2\right)}}{m/\tau_2} - e^{\left(-m/\tau_2\right)}\right) + \varepsilon_{t,j} \\ &Con\ \ \varepsilon_{t,j} \sim N\left(0,\sigma^2\right) \\ &\Theta = \left(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\tau_1,\tau_2\right) \end{aligned}$$

La estimación se realiza por Máxima verosimilitud, Regresión No Lineal por Mínimos Cuadrados o por el Método Generalizado de los Momentos. En este trabajo se utiliza un simple procedimiento de optimización en Excel utilizando Solver, que como veremos presenta buenos resultados al menos para para fines académicos.

Alternativamente, la optimización se puede llevar a cabo minimizando los errores entre las tasas al vencimiento de los títulos estimadas y las observadas en el mercado. Así, $\varepsilon_i = \hat{y}_i - y_i$, donde y_i es el rendimiento al vencimiento del título *i* utilizado en la estimación. Según Svensson(1995), este procedimiento produce mejores resultados para la valoración de títulos para plazos cortos, debido a que al minimizar los precios se involucra la insensibilidad que éstos tienen ante el rendimiento al vencimiento para títulos de corto plazo. En algunos casos, la estimación con el modelo parsimonioso de Nelson y Siegel presenta buenos resultados y los rendimientos estimados se ajustan adecuadamente a los estimados. No obstante, cuando la estructura a plazos es más compleja, presenta resultados insatisfactorios, siendo necesaria la estimación con la extensión de Svensson, la cual mejora el ajuste considerablemente.

4. CONSTRUCCIÓN DE LA CURVA CERO CUPÓN DE TASAS DE INTERÉS EN COLOMBIA: APLICACIÓN EN EXCEL.

A partir de los avances logrados en el mercado de renta fija colombiana en la década de 1990, periodo durante el cual el Gobierno Nacional participó como el principal usuario del mercado público de valores, ha sido posible la estimación de una estructura a plazos de tasas de interés de los títulos de deuda pública colombiana. Las estimaciones iniciales estuvieron a cargo de la actual Bolsa de Valores de Colombia –BVC- la cual publicaba diariamente la curva de TES –CETES- la cual se estimaba mediante la aproximación de una función polinomial. Desde 2003, la BVC y su sistema proveedor de información –INOFVAL- estiman y publican diariamente tres curvas:

1. Curva Cero Cupón de los TES denominados en pesos: Esta curva se conoce como CECPESOS, su plazo de maduración había sido de 10 años, no obstante en la actualidad es de 15 años, muestra de la disponibilidad y liquidez de títulos de más largo plazo.
2. Curva Cero Cupón de los TES denominados en UVR: Se conoce como CECUVR. Se calcula para un término de 10 años.
3. Curva CDT: Se utiliza para valorar los títulos CDT del sector financiero cuyo plazo al vencimiento no supere 365 días, término para el cual se construye la curva.

La metodología utilizada para la construcción de estas curvas es la de Nelson y Siegel (1987), la cual fue sugerida por los investigadores Luis Fernando Melo, Luis Eduardo Arango y Diego Mauricio Vásquez del Banco de la República de Colombia. Revéiz et al (2002), construyó la curva cero cupón para Colombia utilizando la metodología Splines Cúbicos, concluyendo que su desempeño en términos estadísticos era similar a la de Nelson y Siegel (1987).

Los estudios más recientes sobre la estructura a plazos de tasas de interés en Colombia se han enfocado en tratar de extraer información de la misma más que en avanzar en métodos que permitan mejorar su estimación o extender su construcción a otros tipos de instrumentos como los bonos corporativos. Entre estos trabajos es necesario tomar en la cuenta los trabajos de Jiménez et al. (2005) sobre la relación empírica entre las tasas de interés de los títulos TES tasa fija y el tipo de cambio peso dólar. Arosemena y Arango (2002), estudian las lecturas alternativas de la estructura a plazos de tasas de interés y analizan como a partir de la misma es posible obtener información sobre expectativas de inflación, de tasas de interés, de actividad industrial, déficit fiscal, entre otras. Arias et al. (2006) estudian a partir de los títulos TES en UVR el contenido informativo de estos sobre las expectativas de inflación, aunque no usan directamente la curva CECUVR, utilizan un mecanismo que teóricamente es compatible con esta.

Para construir la estructura a plazos de tasas de interés es necesario que los títulos que se utilizan para la construcción de la función de optimización tengan características intrísecas homogéneas, en especial en cuanto a riesgo de crédito y liquidez. A continuación se presentan otras características que deben considerarse para estimar la curva cero cupón de los títulos de deuda corporativa:

1. Riesgo de crédito
2. Tasa cupón
3. Madurez
4. Liquidez
5. Tratamiento fiscal
6. Amortización
7. Amortización anticipada (Opciones Call y Put)
8. Canjeabilidad y convertibilidad
9. Subordinación y garantías

Tratándose de los títulos de deuda pública colombiana, las características intrínsecas de estos es bastante homogénea y la estimación se realiza fácilmente.

A continuación se presenta la construcción de la estructura a plazos de tasas de interés utilizando la metodología de Nelson y Siegel (1987) y Svensson(1994). La información se tomó directamente de la página web de la Bolsa de Valores de Colombia. Los títulos escogidos son los TES Totales en pesos a tasa fija transados los días 8, 9, 12 y 13 de junio de 2006. La estimación se llevará a cabo en Excel utilizando Solver.[16]

Los títulos elegidos para la estimación durante los días en referencia son los siguientes:

			Precio Sucio Promedio*			
Nemotécnico	**Tasa Cupón**	**Maduración**	**Jun-08**	**Jun-09**	**Jun-12**	**Jun-13**
TFIT01270906	6%	27/09/2006	103.690%	103.700%	103.710%	na
TFIT03110408	10%	11/04/2008	103.430%	103.753%	103.657%	103.150%
TFIT04091107	12%	09/11/2007	111.471%	111.528%	111.311%	110.904%
TFIT05100709	12.50%	10/07/2009	119.570%	119.554%	120.332%	118.314%
TFIT05140307	15%	14/03/2007	108.402%	108.491%	108.268%	108.386%
TFIT05250706	15%	25/07/2006	114.011%	114.013%	113.917%	114.085%
TFIT06120210	13%	12/02/2010	114.505%	114.410%	115.817%	113.350%
TFIT07120209	15%	12/02/2009	na	na	117.430%	na
TFIT07220808	15%	22/08/2008	123.311%	123.433%	123.591%	122.825%
TFIT10120914	13.50%	12/09/2014	128.136%	129.668%	131.250%	127.360%
TFIT10250112	15.000%	25/01/2012	na	na	128.097%	na
TFIT10260412	15%	26/04/2012	124.390%	na	125.467%	na
TFIT15240720	11%	24/07/2020	119.321%	119.591%	123.195%	115.374%

- La ponderación se realizó por la cantidad nominal.
- Na: No se transó ese día

Para estimar el modelo es necesario establecer a priori valores para los parámetros $\Theta=(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\tau_1,\tau_2)$. El metodo de optimización es bastante sensible a los valores iniciales que se tomen. Se recomienda usar los publicados para el día anterior por la Bolsa de Valores de Colombia los cuales se pueden

[16] El algoritmo de optimización utilizado en Solver es el de Newton-Rapson.

obtener diariamente en el enlace: http://www.infoval.com.co/spivi2/. La BVC utiliza el método de Nelson y Siegel (1987) por cuanto los parámetros calculados y publicados diariamente corresponden a $\Theta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1)$. Se deben elegir aquellos que correpondan a los instrumentos elegidos, en este caso los betas de la curva cero cupón en pesos, CECPESOS.

En este trabajo se utiliza la programación en Visual Basic facilitada por el profesor Kart Hess de la Escuela de Administración de la Universidad de Waikato en Nueva Zelanda. El código se encuentra en el Apéndice 3. Este código construye, entre otras, la siguiente función en Excel:

VP_NS(Liquidación, Maduración, Cupon, Frecuencia, Beta0, Beta1, Beta2, Tau1, Tau2)

Tomando Tau1=Tau2 se obtiene la especificación básica de Nelson y Siegel (1987), este será el procedimiento que se ilustrará en este trabajo, aunque con un procedimiento análogo puede estimarse la curva cero cupón con la metodología de Svensson (1994).

Donde:

- Liquidación es la fecha de valoración del título o estimación de la curva
- Madurición es la fecha en la cual el título se vence
- Cupón es la tasa cupón del título
- Frecuencia: determina el número de cupones por año que promete pagar el título
- Beta0, Beta1, beta2, Tau1 y Tau2, corresponden a $\Theta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2)$.

La función VP_NS devuelve el valor presente de un título descontando sus flujos de caja con las tasas obtenidas a partir de la función de la tasa spot de Nelson y Siegel (1987).

Alrededor de esta función gira toda la estimación de la curva cero cupón mediante un proceso iterativo. El procedimiento general es el siguiente:

1. Construir un Vector 1x5 donde se ubiquen los parámetros elegidos a priori para $\Theta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2)$.
2. Construir una matriz de información de Nx5 con los datos obtenidos en el mercado en donde en cada fila se pone la información del título: Nemotécnico, Tasa Cupón, Maduración, Precio Sucio observado en el mercado y el precio estimado según el modelo de Nelson y Siegel (resultado de aplicar la fórmula VP_NS con los parámetros iniciales propuestos) para el respectivo título. Así, si tenemos 10 títulos, la matriz será de 10x5, en donde la última columna tendrá el resultado de aplicar la fórmula VP_NS y de asumir a priori unos valores iniciales para los parámetros a estimar.
3. Calcular en un vector de 1xN, para $\varepsilon^2{}_i = (\hat{P}_i - P_i)^2$, es decir, la diferencia al cuadrado entre los precios de mercado observados y los precios estimados con el modelo de Nelson y Siegel.
4. En una celda se calcula $\sum_{i=1}^{N} (\varepsilon_i)^2$, o sea, la sumatoria del vector de $\varepsilon^2{}_i = (\hat{P}_i - P_i)^2$. La cual será la celda objetivo del proceso de optimización.
5. Crear una celda donde se ubique la tasa de interés overnight. Esta tasa es necesaria para hacer que $\beta_0 + \beta_1$ converja al valor de corto plazo cuando $m \to 0$. Este procedimiento difiere del utilizado por la Bolsa de Valores de Colombia y descrito en el Anexo 4. Se utiliza para evitar que el modelo estime tasas negativas. La tasa overnight utilizada puede ser el promedio aritmético de las operaciones de expansión y contracción del Banco de la República de

ese día, tal como lo sugiere el documento técnico de la BVC. Otra alternativa es tomar la Tasa Interbancaria del día más próximo al de la estimación.

6. Construir una columna con valores de *m* desde 1/365 hasta el plazo *T* en años para el cual se construirá la curva.
7. Crear una columna seguida a la anterior donde se estimen las tasa spot con la metodología de Nelson y Siegel (1987) para los plazos *m* ubicados en la columna anterior.
8. Crear una columna seguida a la anterior donde se calculen los factores de descuento para todos los plazos *m* y seguidamente una columna donde se estime la diferencia entre el factor de descuento en *m y m+(1/365),* esta diferencia debe ser mayor que cero para todos los plazos. Con esto se asegura que la función de descuento sea estrictamente decreciente.
9. Abrir la herramienta Solver y realizar los siguientes procedimientos:
   9.1. Definir como celda objetivo aquella que contiene $\sum_{i=1}^{N}(\varepsilon_i)^2$.
   9.2. Las celdas a modificar será el rango de celdas donde se encuentra el vector de parámetros a estimar $\Theta=(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\tau_1,\tau_2)$.
   9.3. Se deben agregar las siguientes restricciones:
      9.3.1. $\beta_0+\beta_1=TasaOvernigh$
      9.3.2. $S(1/365)\geq 0$, es decir, la tasa cero cupón a un día debe ser mayor o igual a cero.
      9.3.3. Se debe imponer la restricción de que los valores en la columna donde se encuentran las diferencias entre los factores de descuento en *m y m+(1/365)* sea mayor o igual a cero.
      9.3.4. Imponer la restricción de que la última tasa spot calculada sea no negativa.

10. Correr el modelo dándo click en aceptar.

Cuando solver llega a una solución, se obtienen $\Theta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2)$ que son los parámetros a partir de los cuales se estima la curva cero cupón completa.

Los resultados para los días que utilizamos como ejemplo se muestran a continuación:

Junio 8 de 2006

Curva	Nombre	Beta 0	Beta 1	Beta 2	Tao
CECPESOS BVC	Curva de TES B en Pesos	5.248817	1.586023	12.414411	4.842203
CECPESOS EXCEL	Curva de TES B en Pesos	4.35031996	2.48452004	13.886887	5.30906124

Junio 9 de 2006

Curva	Nombre	Beta 0	Beta 1	Beta 2	Tao
CECPESOS BVC	Curva de TES B en Pesos	6.47974	0.217058	10.327262	4.111263
CECPESOS EXCEL	Curva de TES B en Pesos	7.1823286	-0.4855306	8.82782852	3.63700092

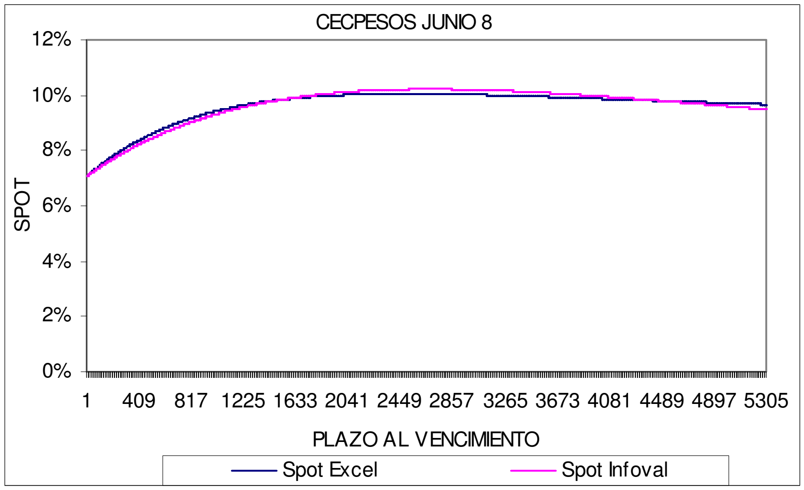
Junio 12 de 2006

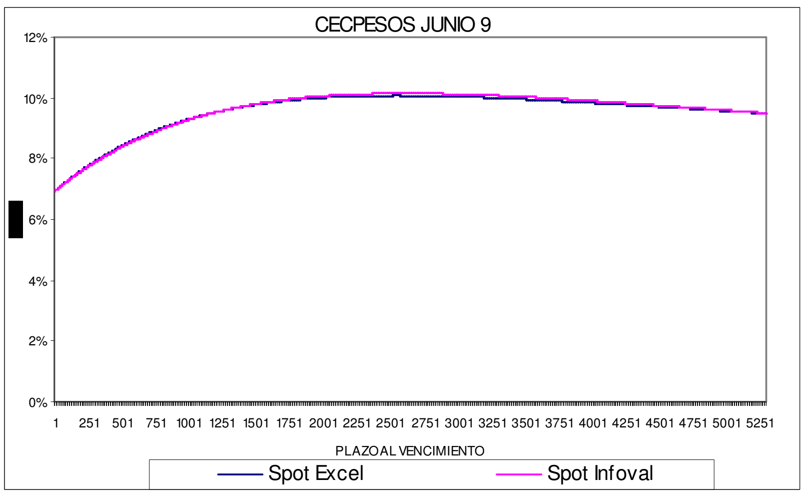
Curva	Nombre	Beta 0	Beta 1	Beta 2	Tao
CECPESOS BVC	Curva de TES B en Pesos	8.424366	-1.607651	6.510495	3.070143
CECPESOS EXCEL	Curva de TES B en Pesos	6.56894335	0.24777165	8.74432505	3.63160654

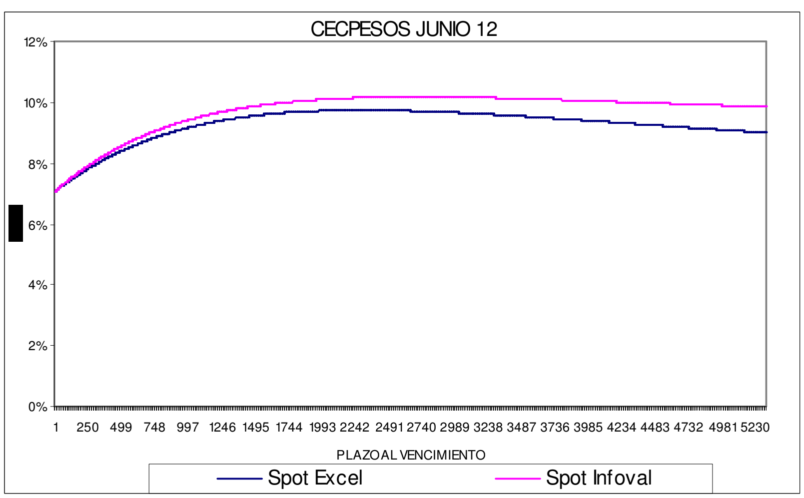
Junio 13 de 2006

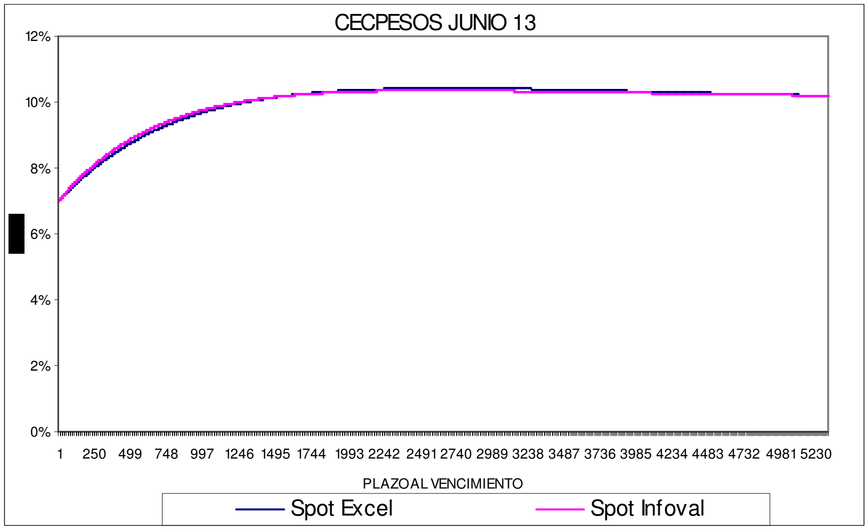
Curva	Nombre	Beta 0	Beta 1	Beta 2	Tao
CECPESOS BVC	Curva de TES B en Pesos	9.43563	-2.68051	4.68045	2.03624
CECPESOS EXCEL	Curva de TES B en Pesos	9.18052532	-2.42540532	5.61441465	2.47835761

Las diferencias en los parámetros hace que se presenten diferencias en las tasas spot estimadas. Sin embargo, al tratarse de un ejercicio académico la aproximación lograda es bastante buena como puede observarse en los siguientes gráficos:


CECPESOS JUNIO 8
12%
10%
8%
6%
4%
2%
0%
SPOT
1 409 817 1225 1633 2041 2449 2857 3265 3673 4081 4489 4897 5305
PLAZO AL VENCIMIENTO
Spot Excel
Spot Infoval


CECPESOS JUNIO 9
12%
10%
8%
6%
4%
2%
0%
1 251 501 751 1001 1251 1501 1751 2001 2251 2501 2751 3001 3251 3501 3751 4001 4251 4501 4751 5001 5251
PLAZO AL VENCIMIENTO
Spot Excel
Spot Infoval


CECPESOS JUNIO 12
12%
10%
8%
6%
4%
2%
0%
1 250 499 748 997 1246 1495 1744 1993 2242 2491 2740 2989 3238 3487 3736 3985 4234 4483 4732 4981 5230
PLAZO AL VENCIMIENTO
Spot Excel
Spot Infoval



Como se puede observar la estimación efectuada en Excel se aproxima a la publicada por la Bolsa de Valores de Colombia. Las diferencias se pueden explicar por:

1. El conjunto de información utilizado para el cálculo de la curva difiere del utilizado por la BVC, pues la BVC no publica cuáles son los títulos utilizados.
2. El proceso de optimización depende de los valores iniciales. Estos valores tampoco son dados a conocer por la BVC.
3. La capacidad computacional de los algoritmos utilizados en Excel es inferior a la utilizada en programas como Gauss.
4. Las restricciones impuestas aunque están de acuerdo a la teoría sobre la estructura a plazos de tasas de interés, difieren de la metodología utilizada por la BVC.

5. CONCLUSIONES GENERALES

- La construcción de la estructura a plazos de tasas de interés constituye uno de los campos de de investigación más activos en la literatura financiera. Su comprensión y dominio amplia el campo de actuación y análisis de cualquier agente interesado en el campo de las finanzas. Hasta el momento, la construcción de dichas curvas se considera como algo especializado. No obstante, con herramientas al alcance de cualquier persona es posible construir dichas curvas.
- La literatura existente en Colombia sobre la estructura a plazos de tasas de interés es poca. Esto puede deberse a que las metodologías para su construcción se muestran a veces demasiado complejas. No obstante, dado que se puede disponer de herramientas fáciles de manejar y de adquirir para su construcción es de esperarse que las investigaciones en este campo aumenten significativamente en los próximos años.
- En este trabajo, además de ilustrarse los métodos tradicionales utilizados en la construcción de la estructura a plazos de tasas de interés, se hizo una estimación en Excel, al cual puede accederse de manera fácil y flexible. Se espera que esta herramienta sirva de base para utilizarse en cursos introdcutorios sobre la construcción de la estructura a plazos de tasas de interés a nivel de pregrado y postgrado. El aporte de un trabajo como este debe observarse, no desde su exactitud en cuanto a los resultados, sino en cuanto a su facilidad para hacer comprender un tema que se ha presentado tan complejo en las instituciones de enseñanza de las finanzas.

Bibliografía

Adams, K.J., and D.R. Van Deventer. "Fitting Yield Curves and Forward Rate Curves With Maximum Smoothness" *Journal of Fixed Income,* 2 (June 1994) pp. 52-62.

Arosemena, A. M. Arango, L. (2002). "Lecturas alternativas de la estructura a plazo: una breve revisión de la literatura", Borradores de Economía, No. 223, noviembre, Banco de la República.

BIS (2005). BANK OF INTERNATIONAL SETTLEMENT. Zero- Coupon Yield Curves: thecnical documentation. Working Paper No. 25.

BOLSA DE VALORES DE COLOMBIA. Dirección de investigación y desarrollo (2002). "Métodos de estimación de la curva cero cupón para títulos TES".

Buono, M., R.B Gregory-Allen, and Uzi Yaari. "The Efficacy of Term Structure Estimation Techniques: A Monte Carlo Study," *Journal of Fixed Income,* 1 (March 1992) pp. 52-59.

Buse, A., and L. Lim. "Cubic Splines as a Special Case of Restricted Least Squares," *Journal of the American Statistical Association*, 72, (1977) pp. 64-68.

Campbell, J. A. Lo and A. MacKinlay. (1997). The econometrics of Financial Markets. Princeton: Princeton University Press, chap. 10-11.

Cárdenas, Mauricio. Aguilar, Camila. Meléndez, Natalia y Salazar, Natalia. *The Development of Latin-America Bond Markets: The case of Colombia.* Bogotá: Banco Interamericano de Desarrollo –BID-. Informe parcial. Febrero 22 de 2006.

Choudry, M.(2005) Fixed Income Securities and Derivatives Handbook: Analysis & Valuation. Bloomberg Press. 368 p.

Cox, J., J. Ingersoll and S. Ross (1985). "An Iner-Temporal General Equilibrium Model of Asset Prices". Econometrica 53.

Fabozzi, F.(2003). *Bond Markets, Análisis and Strategies. 5th edition. New York: Prentice Hall, Chapter 5.*

Fama, E.F. and R.R. Bliss. *"The Information in Long-Maturity Forward Rates,"* American Economic Review, 77 (September 1988) pp. 893-911.

Fedesarrollo. *Informe Final de la Misión de Estudios del Mercado de Capitales Colombiano.* Ministerio de Hacienda-Banco Mundial- Fedesarrollo. Mayo de 1996.

Fernández, Abascal et al. Cálculo de Probabilidades y Estadística. Editorial Ariel. Madrid España, 1994.

Fisher, M., D. Nychka, and D. Zervos. "Fitting the Term Structure of Interest Rates with Smoothing Splines," Working Paper 95-1, Finance and Economics Discussion Series, Federal Reserve Board, (January 1995).

Jiménez, E. Camaro, A. Santana, J. Casas, A. (2005) "Una aproximación empírica a la relación entre tasas de interés de los TES TF y el tipo de cambio en Colombia". Working Paper. Promotora Bursátil.

Julio, J. M., Mera, S. J. y Revéiz, A. (2002). "La curva spot (Cero cupón) estimación con splines cúbicos suavizados, usos y ejemplos". Borradores de Economía No 213. Banco de la Republica.

Hicks, J. (1946). *Value and Capital,* 2nd ed. Oxford: Oxford University Press.

Hull, J. (2003). Options, Futures and Others Derivatives. Prentice Hall. New Jersey. 744 p.

Jarrow, R. (1996). Modeling Fixed Income Securities and Interest Rate Options. Princeton: McGraw Hill. Chapter 3.

Liu, Z. y Choudhry, M. (2005). *"Yield curve fitting 2.0".* User's manual. Yield curve.com.

Melo, L. F. y Vásquez, D. M. (2005). "Estimación de la estructura de tasas de interés en Colombia por medio del método de funciones B-spline cúbicas". Borradores de Economía No 210. Banco de la República.

Molinare, A. (2002). "Estructura y dinámica de tasas de interés reales en Chile: Información contenida en los pagares reajustables con pagos en cupones del banco central". Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería. Pontificia Universidad Católica de Chile.

Ruiz, E. (2005). *"Comparación de curvas de tipos de interés. Efectos de la integración financiera".* Tesis doctoral. Universidad de Barcelona.

Nelson, C.R. and A.F. Siegel, 'Parsimonious modeling of yield curves,' Journal of Business, vol.60 (3) 1987: 473-89.

Matarrita, Rodrigo (2003f); "Construcción de Indicadores para el Análisis del Mercado de Valores: un par de propuestas". Documento de Trabajo 11-2003. Dirección de Supervisión de Mercados. Bolsa Nacional de Valores. Mimeo. 13 de mayo.

McCulloch, J. (1971). The Tax Adjusted Yoeld Curve. Journal of Finance 30, 811-830.

O. A. Vasicek (1977) “An Equilibrium Characterization of the Term Structure” *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188

McCulloch, J.H. “Measuring the Term Structure of Interest Rates.” *Journal of Finance*, 34 (January 1971), pp.19-31.

Ross, Sheldon. Sthocastic Processes. John Wiley & Sons, Inc. Second Edition. 1996. Capítulo 8.

Shea, G.S. “Interest Rate Term Structure Estimation with Exponential Splines: A Note.” *Journal of Finance*, 40 (March 1985), pp. 319-325.

Svensson, L.E.0. (1994) “Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994,” IMF Working Paper, WP/94/114, (1994).

Svensson, L.E.O. (1995) “Estimating Forward Interest Rates with the Extended Nelson & Siegel Method. En: Penning & ValuataPolitik. Sweden.

Van Deventer, D and K. Imai. (1997). *Financial Risk Analysis.* New York: Irwin.

Vasicek, O.A., andH.G. Fong. “Term Structure Modeling Using Exponential Splines.” *Journal of Finance*, 37 (May 1982), pp. 339-348.

Wegman, E.J., and I.W. Wright. “Splines in Statistics,” *Journal of the American Statistical Association*, 78, (June 1983) pp. 351-363.

Anexo 1. Bases teóricas básicas sobre la estructura y el precio de los títulos de renta fija.

Bonos cero cupón y tasas *spot* o al contado

Los bonos cero cupón son instrumentos de renta fija que confieren a su tenedor el derecho de recibir un pago en el futuro. Estos títulos tienen la estructura más simple de todos los bonos. A diferencia de los Bonos *plain vanilla,* el bono cero cupón no tiene pagos de intereses periódicos o con una frecuencia establecida. Los bonos cero cupón son instrumentos al descuento, es decir, se venden o se transan por debajo de su valor par o facial. La tasa de descuento que hace que el valor de venta o compra del título iguale el valor facial del título se conoce como *tasa de interés spot ó al contado.* La expresión denota el precio en el momento t de un instrumento cero cupón que tiene un plazo de maduración T, donde $T \geq t$.

El precio $P(t,T)$ de un bono cero cupón cuyo valor facial es 1 unidad monetaria, viene dado por la siguiente expresión:

$$P(t,T) = \frac{1}{\left[1 + r(t,T)\right]^{(T-t)}}$$

Donde:

$(T-t)$: Tiempo hasta la maduración del título cero cupón

$r(t,T)$: Tasa spot efectiva vigente en t para el periodo *T-t*

En ocasiones es mejor trabajar con tasas de interés compuestas continuas por su fácil tratamiento algebraico. La expresión equivalente para $P(t,T)$ viene dada por:

$$P(t,T)=e^{-r(t,T)(T-t)}$$

El precio $P(t,T)$ de un bono cero cupón cuyo valor facial es 1 unidad monetaria, viene dado por la siguiente expresión:

$$P(t,T)=\frac{1}{\left[1+r(t,T)\right]^{(T-t)}}$$

Donde:

$(T-t)$: *Tiempo hasta la maduración del título cero cupón*

$r(t,T)$: *Tasa spot efectiva vigente en t para el periodo T-t*

En ocasiones es mejor trabajar con tasas de interés compuestas continuas por su fácil tratamiento algebraico. Así, la expresión equivalente para $P(t,T)$ viene dada por:

$$P(t,T)=e^{-r(t,T)(T-t)}$$

El precio del título cero cupón para una fecha t_2, $t\le t_2\le T$, viene dado por:

$$P(t_2,T)=P(t,T)e^{r(t,T)(t_2-t)}$$

Despejando $r(t,T)$ de $P(t,T)=e^{-r(t,T)(T-t)}$, tenemos la tasa *spot* en términos compuestos continuos:

$$r(t,T)=-\frac{\log(P(t,T))}{T-t}$$

La Estructura a Plazos de Tasas de Interés es la representación del conjunto de rendimientos cero cupón o tasas *spot* vigentes en *t* dpara periodos $(t, t+1)$ hasta $(t, t+m)$, donde los bonos cero cupón tienen vencimientos de $\{0,1,2...m\}$. Es decir, esta estructura representa la relación entre las tasas de interés *spot* de instrumentos cero cupón y sus plazos de maduración. Un bono que tenga pagos de intereses periódicos más un pago del principal, generalmente en *m,* puede ser descompuesto en un conjunto de bonos cero cupón, donde el principal del bono y cada uno de sus cupones se convierten en un instrumento independiente de los demás. Esta característica de los bonos con principal y cupones hace que cualquier estructura de un título pueda se descompuesta en estructura más simples como los bonos cero cupón.[17]

La representación gráfica de las tasas de interés $r(t, t+1)$ hasta $r(t, t+m)$ en el tiempo *t* contra el conjunto de plazos de maduración *m,* se conoce como curva de rendimientos. Frecuentemente en la literatura financiera se habla indistintamente de la curva cero cupón y la curva de rendimientos, sin embargo, es necesario distinguir entre una y otra. La primera representa las tasas *spot* o al *contado* para el conjunto de bonos cero cupón. La segunda contiene las tasas de interés que igualan el valor presente de los bonos, no necesariamente cero cupón, con sus futuros pagos de intereses y de principal, es decir, representa una estructura de tasas internas de retorno, una para cada bono existente[18].

El precio de un bono con pagos periódicos de intereses y un principal al final viene dado por la siguiente expresión:

[17] En Colombia existen tres denominaciones básicas para los Títulos de Tesorería TES. Estos se clasifican en TES Tolales, los cuales hacen referencia a bonos cuya estructura correponde a los bonos *plain vanilla,* TES Principales, pagan un único flujo que corresponde al principal de un TES Total que ha sido transformado en un conjunto de bonos cero cupón y Cupones, los cuales corresponden a un conjunto de títulos individuales que quedan de extraer de un TES Total el Principal.

[18] En Colombia la *estructura a plazos de tasas de interés* de tasas *spot* es calculada y publicada diariamente por la Bolsa de Valores de Colombia. Actualmente se construyen curvas cero cupón para los TES B denominados en Pesos (CECPESOS), TES en UVR (CECUVR) y CDT.La metodología de construcción es la de Nelson y Siegel (1987) que se verá más adelante. Disponibles en www.infoval.com

$$P(t,T)=\sum_{t_i>t}\left[C_i e^{-(t_i-t)r(t,T)}+Me^{-(T-t)r(t,T)}\right]$$

Donde:

C_i : *Es el Cupón i del bono, para i=1,2,3...m*

M: Es el pago del principal del bono.

En tiempo discreto y desarrollando la expresión anterior, tenemos:

$$P(t,T=m)=\frac{C_1}{(1+r(t,1))}+\frac{C_2}{(1+r(t,2))^2}+...+\frac{C_m+M}{(1+r(t,m))^m}$$

La valoración de bonos se lleva a cabo en tiempo discreto, generalmente la unidad menor de tiempo es un día. Sin embargo, desde el punto de vista teórico es importante contar con modelos que permitan el análisis en tiempo continuo. Siguiendo a Choudhry (2005) el precio de un bono evoluciona según un proceso *n-dimensional*, el cual se puede representar de la siguiente manera:

$$X(t)=\{X_1(t),X_2(t),X_3(t),...,X_n(t)\},t>0$$

Donde $X_i(t)$ es un conjunto de variables aleatorias de estado que representan el estado de la economía en el tiempo *i.* Se supone que las variables de estado evolucionan de tal forma que siguen un proceso *browniano geométrico* o proceso de *Wiener.* Es posible modelar su evolución utilizando una ecuación diferencial estocástica.

Se supone que el tiempo al vencimiento *m* de un bono puede dividirse en intervalos de tiempo *dt* muy pequeños. La tasa de interés *r(t)=r(t,t)* es la tasa instantánea que paga un instrumento en un pequeño intervalo de tiempo *dt.* En este caso, tenemos:

$$r(t) = -\frac{\partial \log P(t,T)}{\partial T}$$

Si el valor facial de un bono se reinvierte continuamente a la tasa *r(t),* la cantidad acumulada al final del tiempo *t,* será igual a la cantidad inicial multiplicada por $M(t) = e^{\left[\int_0^t r(s)ds\right]}$.

Si la tasa de interés instantánea es constante, el precio de un título libre de riesgo que tiene un valor facial de 1 unidad monetaria el día de su maduración será:

$P(t,T) = e^{-r(T-t)}$ o equivalentemente $P(t,T) = e^{\left[-\int_0^t r(s)ds\right]}$

Tasas de interés forward o a plazo

A diferencia de las tasas *spot* que representan el interés que se reconoce sobre una cantidad invertida en *t* hasta *T, ,*las tasas de interés *forward* o a plazo son tasas que representan el interés reconocido sobre una inversión desde *t+1* hasta un periodo *T,* con *T>t+1.* Por ejemplo, sin un inversionista invierte una cantidad *P* por un periodo *T-t* a una tasa de interés *spot r(t,T),* debería obtener la misma cantidad de dinero en *T,* si hubiera invertido su dinero *P* por un periodo *t+1-t* y la cantidad obtenida en *t* haberla reinvertido a una tasa *f(t,t+1,T).* Así, las tasas *forward* son tasas futuras implícitas en una estructura de tasas *spot.*

Si se invierte una cantidad $P(t,T)$ durante un intervalo de tiempo igual a 1, la tasa de interés *forward* desde *t* hasta *T* viene dada por el cociente entre $P(t,T)$ y $P(t,T+1)$:

$$f(t,T) = \frac{P(t,T)}{P(t,T+1)}$$

Podemos expresar $f(t,T)$ de la siguiente manera:

$$f(t,T,T+1) = \frac{1}{\dfrac{P(t,T+1)}{P(t,T)}} = \frac{r(t,T+1)^{(T+1)}}{r(t,T)^{(T)}}$$

La expresión anterior nos permite calcular las tasas *forward* en función de las tasas *spot.* Por ejemplo, si invertimos una cantidad *P* desde hoy hasta dentro de 6 meses a una tasa *spot* anual *r(6)* obtendremos $P(t,T)e^{r(6)(6/12)}$. Si hubiésemos invertido la misma cantidad *P* a una tasa de interés anual *r(3)* desde hoy y hasta dentro de 3 meses y luego reinvertirla a la tasa *spot r(3)* vigente en 3 por otros 3 meses, se debe obtener la misma cantidad $P(t,T)e^{r(6)(6/12)}$ para evitar oportunidades de arbitraje, así:

$$Pe^{r(6)(6/12)} = Pe^{r(3)(3/12)}e^{f(3)(3/12)}$$

Despejando *f(3) obtenemos:*

$$Pe^{r(6)(6/12)} = Pe^{r(3)(3/12)}e^{f(3)(3/12)}$$
$$r(6)(6/12) = r(3)(3/12) + f(3)(3/12)$$
$$f(3) = 2r(6) - r(3)$$

En general, la tasa de interés *forward* desde un periodo *t+s* hasta *T* viene dada por la siguiente expresión:

$$e^{r(t,T)(T-t)} = e^{r(s)(s-t)}e^{f(t,s,T)(T-s)}$$
$$f(t,s,T) = \frac{r(t,T)(T-t) - r(t,s)(s-t)}{(T-s)}$$

Cuando *s=t,* la tasa *forward* y la tasa *spot son iguales*: $f(t,s,T)=r(t,T)$

Una deducción alternativa de las tasas *forward* es la siguiente:

En un contexto de no arbitraje y suponiendo expectativas puras, se deb cumplir la siguiente relación:

$$e^{r(t,t_1)(t_1-t)}e^{f(t_1,T)(T-t_1)}=e^{r(t,T)(T-t)}$$

Tomando logaritmos y haciendo transformaciones adecuadas tenemos:

$$f(t_1,T)(T-t_1)=r(t,T)(T-t)-r(t,t_1)(t_1-t)$$
$$f(t_1,T)(T-t_1)=r(t,T)T-r(t,T)t-r(t,t_1)t_1+r(t,t_1)t$$
$$f(t_1,T)(T-t_1)-r(t,T)t_1=(T-t_1)r(t,T)-r(t,T)t-r(t,t_1)t_1+r(t,t_1)t$$
$$f(t_1,T)(T-t_1)=r(t,T)(T-t_1)+r(t,T)t_1-r(t,T)t-r(t,t_1)t_1+r(t,t_1)t$$
$$f(t_1,T)(T-t_1)=r(t,T)(T-t_1)+r(t,T)(t_1-t)-r(t,t_1)(t_1-t)$$
$$f(t_1,T)=r(t,T)+\frac{\left[r(t,T)-r(t,t_1)\right]}{(T-t_1)}(t_1-t)$$

La expresión $\frac{\left[r(t,T)-r(t,t_1)\right]}{(T-t_1)}$ es la pendiente de la curva *spot* continua.

Si t_1 ($r(t,t_1)$) se aproxima a T ($r(t,T)$), la expresión para $f(t_1,T)$ se denota por:

$f(t_1,T)=r(t,T)+\frac{\partial r(t,t_1)}{\partial t_1}(t_1-t)$, esta expresión denota la tasa *forward* instantánea para un vencimiento t_1.

En general, la tasa *forward* instantánea corresponde a la tasa de retorno para un corto intervalo de tiempo t_j-t. La expresión general será la siguiente:

$$f(t,t_j) = r(t,t_j) + \frac{\partial r(t,t_j)}{\partial t_j}(t_j - t)$$

Ahora, con la expresión derivada anteriormente y al despejar $r(t,T)$ se puede obtener una relación entre las tasas *forward, spot* y el precio de un bono cero cupón.

Recordemos que se había deducido anteriormente la siguiente expresión:

$$r(t,T) = -\frac{\log(P(t,T))}{T-t}$$

Que se puede rescribir para un periodo t_j como:

$$-\log P(t,t_j) = r(t,t_j)(t_j - t)$$

Derivando con respecto a $(t_j - t)$*,* tenemos:

$$-\frac{\partial \log P(t,t_j)}{\partial(t_j - t)} = r(t,t_j) + \frac{\partial r(t,t_j)}{\partial(t_j - t)}(t_j - t)$$

El lado derecho de la ecuación es igual a la expresión derivada para $f(t,t_j)$, así:

$$f(t,t_j) = -\frac{\partial \log P(t,t_j)}{\partial(t_j - t)} \text{ ó } \partial(t_j - t) f(t,t_j) = -\partial \log P(t,t_j)$$

Integrando desde *t* hasta t_j tenemos:

$$\int_t^{t_j} f(s)\partial(s) = -\int_t^{t_j} \partial \log P(s)$$

$$\exp\left[-\int_t^{t_j} f(s)\partial(s)\right] = P(t_j)$$

Esta es la expresión que permite calcular el precio $P(t_j) = \exp\left[-\int_t^{t_j} f(s)\partial(s)\right]$ de un bono cero cupón en función de las tasas *forward*. Adicionalmente, podemos encontrar una expresión de las tasas *spot* en función de las tasas *forward* igualando la anterior expresión con el precio del bono cero cupón hallado inicialmente para un periodo t_j:

$P(t,t_j) = e^{-r(t,t_j)(t_j-t)}$ Así,

$e^{-r(t,t_j)(t_j-t)} = \exp\left[-\int_0^{t_j} f(s)\partial(s)\right]$ Tomando logaritmos, tenemos:

$$r(t,t_j) = \frac{1}{(t_j - t)}\int_t^{t_j} f(s)\partial(s)$$

Esta expresión implica que las tasas *spot* son un promedio de las tasas *forward* futuras esperadas. Estas expresiones se utilizarán en la derivación de la estructura a plazos de tasas de interés.

Alternativamente, el precio de un bono cero cupón con valor facial de 1 unidad monetaria. puede expresarse de la siguiente manera, Jarrow(1996):

$$P(t,T)=\frac{1}{\prod_{k=t}^{m} f(t,k)}$$

Donde:

$$\prod_{k=t}^{m} f(t,k)=(1+f(t,t))(1+f(t,t+1))...(1+f(t,s))...(1+f(t,m))$$

Para un bono que paga cupones y un principal *M,* el precio puede hallarse mediante la siguiente expresión:

$$P(t,T=m)=\frac{C_1}{(1+f_{t,1})}+\frac{C_2}{(1+f_{t,1})(1+f_{t,2})}+...+\frac{C_m+M}{\prod_{k=1}^{m}(1+f_{t,k})}$$

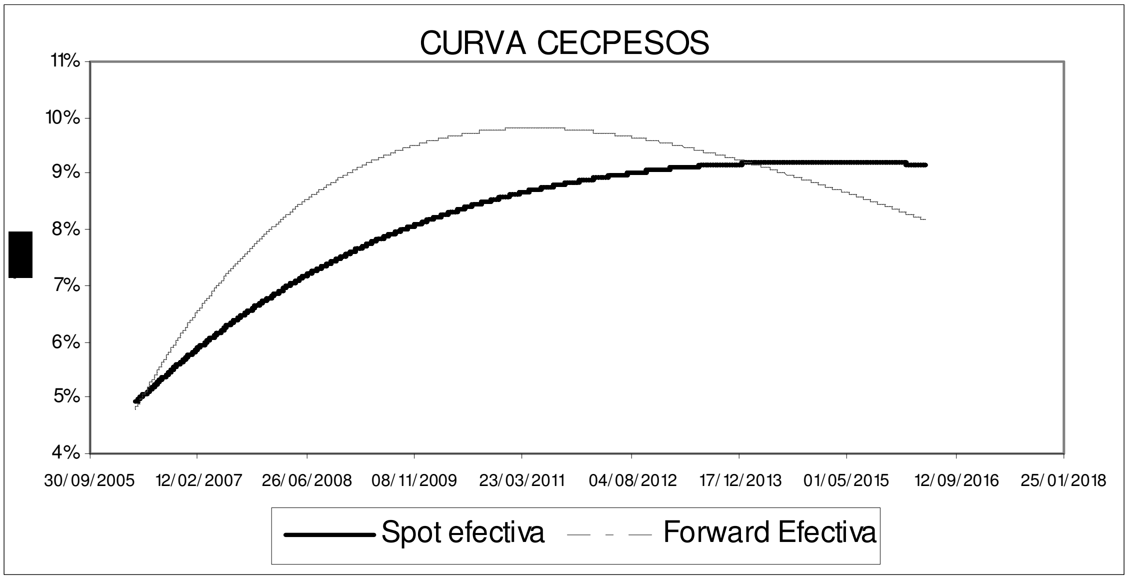
Donde las tasas *forward* se hallan a partir de la estructura a plazos de tasas de interés *spot.*

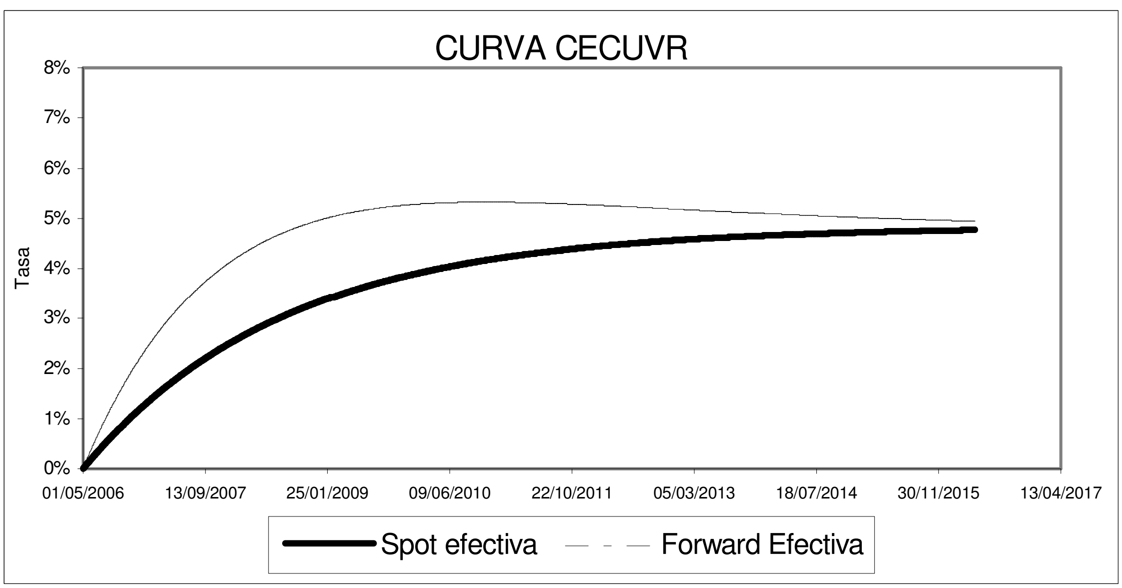
A continuación se presentan las curvas de tasas *spot (curva spot)* y las curvas de tasas *forward* (curva forward) en términos efectivos anuales calculadas para Colombia por la Bolsa de Valores de Colombia correspondientes al día 30 de abril de 2006 para los TES B en Pesos y en UVR's.

Valores de Betas para 2006-05-01[19]					
Curva	**Nombre**	**Beta 0**	**Beta 1**	**Beta 2**	**Tao**
CECUVR	Curva de TES B en UVR	4.800278	-4.800278	4.330537	2.134611

[19] Estos valores Betas corresponden a los parámetros del modelo de Nelson y Siegel (1987) para estimar la estructura a plazos de tasas de interés. Dicha estimación, como se mencionó anteriormente se lleva a cabo por la Bolsa de valores de Colombia. Las cualidades técnicas de dicha metodología se abordan más adelante.

CEC	Curva de TES B en Pesos	1.42764	3.359762	19.099377	6.120535





Como puede observarse, las tasas *forward* para los TES B en Pesos se encuentran por encima de las tasas *spot* por un periodo de tiempo y luego se ubican por debajo. Para el caso de los TES UVR`s la curva *foward* se ubica por encima de la *spot* para todos los plazos. En general, la curva *forward* se ubica por encima de la *spot* cuando la *spot* tiene pendiente positiva, se ubica por debajo cuando es negativa y se cruzan cuando la pendiente es cero (la curva spot es plana), Estas son propiedades estándar de las curvas de costos marginales y promedio, Campbell (1997). Cuando el costo de una unidad marginal excede el costo de una unidad promedio, entonces el costo promedio por unidad se incrementa, lo contrario también es cierto. De lo anterior podemos deducir una relación entre ambas curvas en términos de que la curva spot representa un promedio de las tasas de interés *forward*.

ANEXO 2. Metodologías aplicadas por los principales Bancos Centrales del mundo para construir la estructura a plazos de tasas de interés. Fuente BIS(2005)

Banco central	Método*	Estimaciones disponibles desde	Frecuencia	Series yield disponibles	Número de Parámetros	Notación del parámetro
Alemania6	SV	07-Ago-97	Diaria	1 a 10 años	6	Porcentaje
	SV	Ene-73	Mensual	na	6	Porcentaje
	SV	28-Ago-97	Diaria	1 a 10 años	6	Porcentaje
	SV	Ene-73	Mensual	1 a 10 años	6	Porcentaje
Bélgica	SV-NS	01-Sep-97	Diaria	0 a 10 años	6	Porcentaje
Canadá	SV	23 Jun 1998 a 15 Oct 2003	Diaria	1 a 10 años	6	Porcentaje
	SS	01-Ene-86	Diaria	3 meses a 30 años	na	na
Colombia	NS	Ene-03	Diaria	0 a 15 años	4	Porcentaje
Costa Rica	NS	na	Diaria	0 a 10 años	4	Decimal
España	NS	2 Ene 1991 a 30 Dic 1994	Diaria	NA	4	Decimal
	SV	02-Ene-95	Diaria	1 a 10 años	6	Decimal
Estados Unidos	SS	14-Jun-61	Diaria	0 a 10 años	na	na
	SV	01-Dic-87	Diaria	0 a 10 años	na	na
Finlandia	NS	03-Nov-97	Semanal; diaria desde 4 Ene 1999	1 a 10 años	4	Porcentaje
Francia	SV-NS	3 Ene 1992 a 3 Jun 1994	Semanal	0 a 10 años	6	Decimal
Italia	NS	01-Ene-96	Diaria	0 a 10 años	4	Decimal
Japón	SS	29 Jun 1998 a 19 abr 2000	Semanal	1 a 10 años	na	na
Noruega	SV	21-Ene-98	Una vez al mes	0 a 10 años	6	Porcentaje
Perú	SV	Mar-05	Diaria	1 a 10 años	6	Porcentaje
Reino Unido	SV	4 Ene 1982 a 30 Abr 1998	Diaria	2 a 10 años	na	na
	SV	Ene 1982 a Abr 1998	Mensual	2 a 10 años	na	na
Suecia	SV	9 Dic 1992 a 1 Mar 1999	Semanal	0 a 10 años	6	Porcentaje
	SV	02-Mar-99	Diaria	0 a 10 años	6	Porcentaje
Suiza	SV	04-Ene-88	Diaria	1 a 10 años	6	Porcentaje
	SV	04-Ene-98	Diaria	1 a 10, 15, 20 y 30 años	6	Porcentaje
	SV	Ene-88	Mensual	1 a 10, 15, 20 y 30 años	6	Porcentaje

*** NS: Nelson y Siegel (1987), SV: Nelson y Siegel Extendido, Svensson (1994), SS: Smoothing Splines.**

ANEXO 3. Código en Visual Basic para la estimación del precio de un título de renta fija con la metodología de Nelson y Siegel (1987) y Nelson y Siegel Extendida, Svensson (1994).

El código fue modificado por el autor de este trabajo con expresa autorización del autor, profesor Kart Hess de la Universidad de Waikato de Nueva Zelanda, para acomodar la convención de días utilizada en Colombia para la valoración de los títulos TES (Actual/360).

```
*************************************************************
' Función que devuelve el valor presente como porcentaje (%)
de su valor nominal de un bono, descontado con la estructura
a plazos de tasas de interés calculada a partir del método de
Nelson y Siegel (1987) y de Nelson y Siegel Extendida

'  Datos de entrada:
'  Settle:      settlement date
'  Maturity:    final maturity date
'  Coupon:      in % of face value
'  Frequency:   Number of coupon payments per year
'
'  NS term structure shape parameters:
'   beta0, beta1, beta2, tau1, tau2 (optional)
'
'************************************************************
*****************
Function PV_NS _
        (settle As Date, maturity As Date, coupon As Double,
_
         frequency As Integer, _
         beta0 As Double, beta1 As Double, beta2 As Double, _
         tau1 As Double, Optional tau2) As Double
Dim Years As Single, fr As Single
Dim i As Single
Dim result As Double, m As Double, r As Double
If IsMissing(tau2) Then tau2 = tau1  'for basic Nelson Siegel
tau2 = tau1
  ' PV of pricipal and last coupon
m = YearsToMaturity(settle, maturity)
r = NS_extended(m, beta0, beta1, beta2, tau1, tau2)
result = (1 + coupon / frequency) * DFactor(m, r, "C")
  ' Loop though all coupons backward
m = m - 1 / frequency
Do While m > 0
    r = NS_extended(m, beta0, beta1, beta2, tau1, tau2)
    result = result + _
```

```
            coupon / frequency * DFactor(m, r, "C")
    m = m - 1 / frequency
Loop
PV_NS = result

End Function
' ------------------------------ DESCRIPTION ----------------
--------------------
' Función para calcular las tasas de interés de acuerdo al
modelo de N&S extendido
' -------------------------------------------------------------
-------
Function NS_extended _
        (m As Double, _
         beta0 As Double, beta1 As Double, beta2 As Double, _
         tau1 As Double, Optional tau2) As Double

If IsMissing(tau2) Then tau2 = tau1  'for basic Nelson Siegel
tau2 = tau1
If m = 0 Then m = TinY 'avoid error due to division by 0
NS_extended = _
beta0 + _
beta1 * ((1 - Exp(-m / tau1)) / m * tau1) + _
beta2 * (((1 - Exp(-m / tau2)) / m * tau2) - Exp(-m / tau2))
End Function

' ------------------------------ DESCRIPTION ----------------
--------------------

' Calculo del interés acumulado de un bono

'                         Number of days from last coupon pmt to
                          settlement date
' Accrued Interest AI = C ----------------------------------------------
'                              Number of days in coupon period

' C equals semiannual coupon payment if number of payments
per year equals 2

' ---------------------------- INPUT PARAMETERS -------------
--------------------

' Settle       Settlement date of bond (for example today)
' Maturity     Maturity date of bond
' Coupon       Coupon amount (absolute)
' Frequency    Number of coupon payments per year
```

```
' -------------------------------- FUNCTION -----------------
--------------------

Function Accrued(settle As Date, _
                 ByVal maturity As Date, _
                 ByVal coupon As Single, _
                 frequency As Integer) As Single
  Dim days As Single

  days = DaysFromPrevCoupon(settle, maturity, frequency)
  If (days = 365 / frequency) Then
    Accrued = 0
  Else
    Accrued = days / 365 * coupon
  End If
End Function
'
*************************************************************
******************

' ------------------------------ DESCRIPTION ----------------
--------------------

' Calculo del número de días desde la última fecha de pago de
cupón
' If Pmts < 1 prompt message: There has to be at least one
coupon payment

' ---------------------------- INPUT PARAMETERS -------------
--------------------

' Settle       Settlement date of bond (for example today)
' Maturity     Maturity date of bond
' Pmts         Number of coupon payments per year

' -------------------------------- FUNCTION -----------------
--------------------

Function DaysFromPrevCoupon(ByVal settle As Date, ByVal
maturity As Date, Pmts As Integer) As Integer
  Dim days As Single
  Dim interval As Single

  If Pmts < 1 Then
    MsgBox ("There has to be at least one coupon payment")
  Else
    interval = 365 / Pmts
```

```
    days = Day365(settle, maturity)
    DaysFromPrevCoupon = interval - (days Mod interval)
  End If
End Function
' ------------------------------- DESCRIPTION ----------------
--------------------

' Cálculo del núemro de días entre Date1 and Date2 en
notación(actual/365)
' If Date1 > Date2 result = 0!
' ----------------------------- INPUT PARAMETERS -------------
--------------------

' Date1         Beginning of period
' Date2         End of period

' --------------------------------- FUNCTION -----------------
--------------------

Function Day365(Date1 As Date, Date2 As Date) As Long
  If (Date1 > Date2) Then
    Day365 = 0
  Else
    Day365 = Date2 - Date1
  End If
End Function
'
**************************************************************
******************

' ------------------------------- DESCRIPTION ----------------
--------------------

' Calculo del tiempo al vencimiento en años en notación
(actual/365)
' If Maturity <= Settle result = 0!

' ----------------------------- INPUT PARAMETERS -------------
--------------------

' Settle        Settlement date of bond (for example today)
' Maturity      Maturity date of bond

' --------------------------------- FUNCTION -----------------
--------------------
```

```
Function YearsToMaturity(settle As Date, maturity As Date) As
Single
  If maturity <= settle Then
    YearsToMaturity = 0
  Else
    YearsToMaturity = Day365(settle, maturity) / 365
  End If
End Function
'-------------------------------------------------------------
' Cálculo del factor de descuento como function de la
frecuencia de composición.
'Function DFactor(Time As Double, Rate As Double,
DiscountingMethod) As Double
If DiscountingMethod = "C" Then
   DFactor = Exp(-Time * Rate)
Else
   DFactor = 1 / (1 + Rate / DiscountingMethod) ^ (Time *
DiscountingMethod)
End If

End Function
```

ANEXO 4. Método de Estimación de la Curva Cero Cupón para Títulos TES tasa fija en pesos (CEC en pesos) y la Curva Cero Cupón para Títulos TES en UVR (CEC en UVR). Fuente: BVC.

1. Objetivo

En este documento se presenta el método de estimación de las curvas cero cupón para títulos TES en pesos y UVR calculadas por La Bolsa de Valores de Colombia S.A.

En el trabajo de determinación de una adecuada metodología de estimación de la curva cero cupón para los títulos TES, participaron diferentes investigadores del Banco de la República, la Superintendencia de Valores, la Superintendencia Bancaria, Crédito Publico y la Bolsa de Valores de Colombia S.A.

La metodología propuesta para la estimación de las curvas es la desarrollada por Nelson y Siegel (1987). Esta metodología presenta numerosas e importantes ventajas sobre otras metodologías evaluadas, como son:

- Mínima discrecionalidad en su estimación
- Buen ajuste
- Reducida fluctuación
- Parsimonia
- Bajos requerimientos de información
- Estimación de tasas para el corto y el largo plazo, incluso fuera de la muestra.

El objetivo de este documento es presentar la metodología definitiva de cálculo para las curvas que servirán como tasas de referencia para los títulos emitidos a tasa fija en pesos y en UVR que trata el literal ii) del numeral 6.1.1 de la Circular 033 de 2002 de la Superintendencia Bancaria y el literal ii) del literal b, del artículo 1.7.3.2.1 de la Resolución 550 de 2002 de la Superintendencia de Valores.

2. Operaciones a utilizar en el procedimiento de estimación de la curva cero cupón

2.1 Se incluyen las operaciones con TES B tasa fija en pesos, para CEC pesos y TES B tasa fija en UVR, para CEC UVR.

2.2 Se incluyen las operaciones negociadas en el mercado secundario en Sistemas Centralizados de Negociación de TES reconocidos por el Ministerio de Hacienda y Crédito Público para efectos de la calificación de la actividad de los participantes en el Programa de Creadores de Mercado en el mercado secundario de TES Clase B como son: el Mercado Electrónico Colombiano - MEC de la BVC y el Sistema Electrónico de Negociación – SEN del Banco de la República y las operaciones de mercado secundario realizadas a través de intermediarios de valores, de conformidad con lo dispuesto en el Título Quinto, Capítulo Primero a Cuarto de la Parte Primera de la Resolución 400 de 1995 de la Superintendencia de Valores y registradas en sistemas centralizados de información para transacciones de que trata el Título Segundo de la Parte Cuarta de la Resolución 400 de 1995 de la Superintendencia de Valores, que hayan sido realizadas por Corredores Especializados en TES clase B (CVETES). También incluye las operaciones de subasta primaria de títulos TES de Crédito Publico.

2.3 Las operaciones consideradas serán las registradas como ventas definitivas de contado (spot). No se incluirán operaciones que hagan parte de una operación de ingeniería financiera (operaciones a plazo, ventas con pacto de recompra-repo, swap, carruseles, simultáneas, préstamos de valores).

2.4 Solo se incluirán las operaciones que tengan un plazo para cumplimiento en días hábiles menor o igual a dos (Se incluirán las operaciones del mercado secundario con plazo de cumplimiento t+0 y las subastas primarias de TES se incluyen el día de la subasta con plazo de cumplimiento hasta t+2).

Las operaciones sobre títulos que presenten pago de cupón entre el día de la celebración y el día de su cumplimiento se excluirán para todos los efectos.

2.5 Sólo se incluyen operaciones negociadas con títulos TES completos, se excluyen las negociaciones con cupones y principales.

3. Información proveniente de los diferentes sistemas de negociación de TES necesaria para el cálculo de la curva cero cupón

Para efectos del cálculo de la curva cero cupón, son necesarias las siguientes variables de los diferentes sistemas de negociación de TES.

3.1 ***Tasa de Descuento (TD o y) - Rentabilidad o yield***: Es la rentabilidad efectiva anual a la que se realizó el negocio y que se utilizó para el descuento de todos los flujos calculados con las condiciones nominales del título. La rentabilidad no debe incluir ningún tipo de comisión o cargo. Base 365 días, sin corrimiento de días en caso de caer el flujo en día no hábil y sin considerar el día 29 de febrero de los años bisiestos.

3.2 ***Cantidad (Q)*** : Esta corresponde al valor facial (nominal) del título, en la respectiva unidad del título.

3.3 ***Volumen (V)***: Valor de giro de la operación en pesos.

3.4 Tasa Cupón (C): Valor del cupón del título.

3.5 Tipo de Título: Titulo Completo, Principal o Cupón.

3.6 Fecha de la operación: Fecha de realización de la operación.

3.7 Fecha de emisión del título de la operación: Fecha en la que se emitió el título***.***

3.8 Fecha de vencimiento del título de la operación: Fecha en la que se paga el último flujo de capital e intereses.

3.9 Fecha de cumplimiento de la operación.

3.10 Moneda.

3.11 Días plazo al vencimiento de la operación: Diferencia entre la fecha de vencimiento del título y la fecha de cumplimiento de la operación considerando un calendario corriente de 365 días, sin corrimiento de días en caso de caer el flujo en día no hábil y sin considerar el día 29 de febrero de los años bisiestos.

3.12 Días plazo al vencimiento del título de la operación: Corresponderá a los días hábiles entre la fecha en que se efectúa la operación y la fecha de vencimiento del título considerando un calendario corriente de 365 días, sin corrimiento de días en caso de caer el flujo en día no hábil y sin considerar el día 29 de Febrero de los años bisiestos.

3.13 Días de cumplimiento de la operación: Corresponderá a los días hábiles contados entre la fecha en que se efectúa la operación y la fecha de cumplimiento de la operación considerando un calendario corriente de 365 días, sin corrimiento de días en caso de caer el flujo en día no hábil y sin considerar el día 29 de Febrero de los años bisiestos.

4. Temporalidad

4.1 De negociarse seis emisiones diferentes en el día para TES en pesos y TES en UVR, respectivamente, la curva se calculará con los datos del día. Sin embargo, para dar mayor representatividad a la muestra, esta podrá incluir datos registrados en días anteriores al de cálculo, de no presentarse por lo menos seis emisiones diferentes. Los datos que se incluirán serán sólo los de las emisiones que completen las seis mínimas.

Adicionalmente, siempre se buscarán operaciones para los plazos menos líquidos, a saber: se buscarán operaciones en el día de cálculo de mínimo una (1) emisión de corto plazo, la más cercana en vencimiento y máximo tres (3) emisiones en orden desde la más cercana. De no encontrar las operaciones en el día de cálculo se podrá devolver hasta máximo 180 días corridos calendario para encontrarlas. Así mismo, para el largo plazo se deberán buscar operaciones mínimo de una (1) emisión de largo plazo, la más lejana en vencimiento y de máximo tres (3) emisiones en orden desde la más lejana. De no encontrar las operaciones en el día de cálculo se podrá devolver hasta máximo 180 días corridos calendario para encontrarlas. Lo anterior, de forma que se garantice la inclusión de operaciones en el largo y corto plazo en las curvas.

5. Filtros de la Información

5.1 Filtro de tipo de título: Solo se incluirán los títulos negociados como totales.

5.2 Filtro de volumen: Solo se incluirán las operaciones por un volumen igual o superior a:

- TES tasa fija en pesos: Operaciones por un volumen igual o superior a $500.000.000.

- TES UVR: Operaciones por un volumen igual o superior a $500.000.000.

Cuando se considere apropiado, los volúmenes mínimos de las operaciones serán revisados, con el propósito de comprobar si el tamaño de la operación es lo suficientemente representativo para fijar precio en el mercado.

5.3 Filtro por tasa: El filtro por tasa se realiza construyendo una curva de TIRes aplicando el método de Nelson y Siegel, con las operaciones efectuadas en el MEC, SEN y la subasta primaria, en la fecha de calculo de la curva. El filtro por tasa requiere de mínimo seis emisiones diferentes para ser calculada. En caso de que no se presenten las seis emisiones se complementara la muestra. En la complementación la muestra se incluirán las operaciones totalmente filtradas de los tres mercados de días anteriores a la fecha de cálculo para las emisiones no negociadas en la fecha de cálculo de la curva de filtros.

Se calcula el error cuadrado de la rentabilidad de cada operación de la fecha de cálculo de la curva con la rentabilidad estimada por la curva de TIRes para el plazo respectivo de la operación.

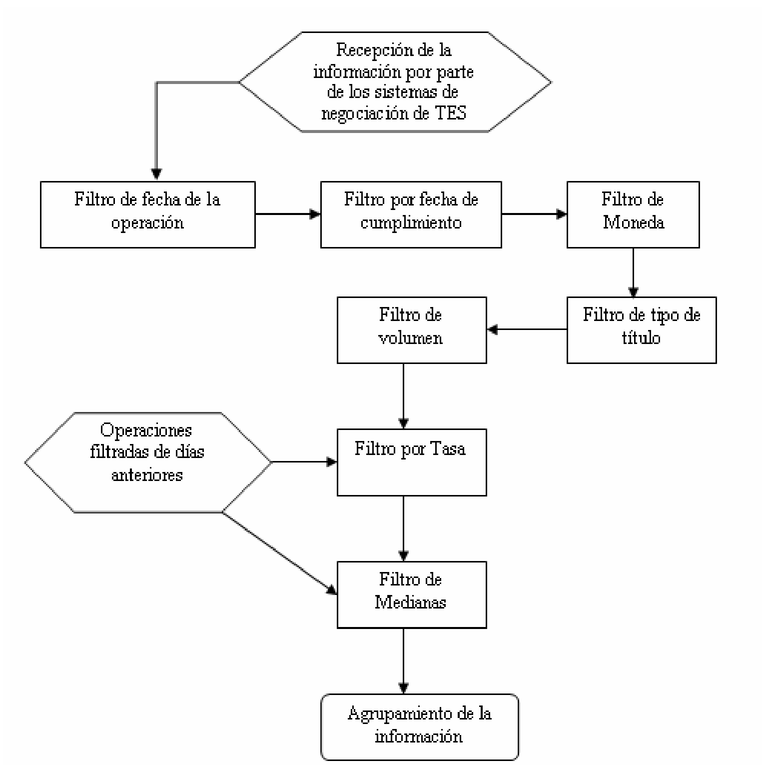
Después se calcula el promedio de los errores cuadrados. Si el error cuadrado de la operación **i** es mayor que un parámetro dado de veces el error cuadrado promedio de las operaciones, la operación **i** se excluye.

5.4 Filtro de medianas: Se realiza calculando las medianas ponderadas por cantidad del precio ó de la tasa de negociación para un grupo de títulos dentro de un rango de días a vencimiento elegido.

Los valores excluidos deberán ser reportados a las Superintendencias Bancaria y de Valores, para su evaluación.

El proceso de filtros se ilustra en la Gráfica 1 por medio de un diagrama de flujo.

Gráfica 1 - Diagrama de Flujo del Proceso de Filtros



6. Procedimiento de cálculo

Este método fue desarrollado por Nelson y Siegel (1987) con la intención de minimizar el número de parámetros que se desea estimar suponiendo que la tasa forward instantánea es la solución a una ecuación diferencial de segundo orden con raíces iguales y repetidas. De esta forma, la tasa forward instantánea con maduración en t tiene la siguiente expresión:

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-t/\tau\right) + \beta_2 \cdot \frac{t}{\tau} \cdot \exp\left(-t/\tau\right)$$

Donde $(\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \tau)$ son los parámetros para estimar en el modelo.

Dependiendo del valor de los parámetros, la ecuación anterior puede tomar las diferentes formas que más comúnmente toma la estructura de tasas. Entre las formas que pueden tomar las curvas se encuentran curvas monótonas crecientes, en formas de S o en forma de U invertida. Integrando la ecuación que relaciona la tasa spot y la tasa forward que se presentó anteriormente se obtiene la siguiente expresión para la tasa spot (s(t)):

$$s(t) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)\left[\frac{1-\exp\left(-t/\tau\right)}{\left(t/\tau\right)}\right] - \beta_2 \exp\left(-t/\tau\right)$$

Este método se lleva a cabo minimizando la suma de los errores cuadráticos entre los precios observados y estimados de los precios de la siguiente forma:

$$\underset{\beta,\tau}{\arg\min} \sum_{i=1}^{M} (PO_i - PE_i)^2$$

El proceso de estimación se lleva a cabo empleando un método de máxima verosimilitud.

La tasa spot estimada es una tasa continua que se tiene que convertir a una tasa compuesta anual de forma discreta:

$$s_d(t) = \exp(s(t)) - 1$$

Para el cálculo de las dos curvas se utiliza el programa Gauss y el módulo de máxima verosimilitud.

6.1 Cálculo de la rentabilidad promedio

Se ordenan los datos por las fechas de vencimiento de la operación y para cada fecha de vencimiento diferente y para cada valor de cupón diferente se obtiene el promedio ponderado del yield por la cantidad negociada.

$$y = \frac{\sum_j TD_j \cdot Q_j}{\sum_j Q_j}$$

Dónde:

TD: Tasa de Descuento de la operación j.
Q: Cantidad o Valor Facial de la operación j.
y: Yield observada para cada fecha de vencimiento y para cada valor de cupón diferente.

Con los días vencimiento se calculan los tiempos anualizados que resultan de aplicar la siguiente formula:

$$TA_i = {DV_i}/{365}$$

Donde:

TA_i = Maduración anualizada de la agrupación i

De esta forma, hasta el momento, después de filtros y de calcular la rentabilidad promedio se tendría la siguiente información:

FechaOper	FechaVenci	Cupon Ci	Rent. Prom Yi	DiasVencimiento DV	TA
17/10/2002	8/01/2003	13	8.48	83	0.2274
17/10/2002	12/03/2003	15	9.651	146	0.4000
17/10/2002	18/03/2003	12	9.8015	152	0.4164
17/10/2002	8/10/2003	13	11.43984615	356	0.9753
17/10/2002	17/10/2003	15	11.42225	365	1.0000
17/10/2002	16/04/2004	15	13.61475	546	1.4959
17/10/2002	6/05/2004	12	13.61276471	566	1.5507
17/10/2002	25/06/2004	15	13.55578571	616	1.6877
17/10/2002	4/02/2005	15	15.18672727	840	2.3014

7. Procedimiento en caso de estimación de tasas negativas en el corto plazo

7.1 Se estimará el modelo sin ningún tipo de restricción y se almacenará el coeficiente Bo estimado.

7.2 Incorporar la restricción de que Bo sea la calculada con el modelo sin restricciones, e incluir en la muestra como una tasa más para el plazo de días a vencimiento de un día, el promedio aritmético de las tasas de expansión y contracción del Banco de la República.

7.3 Si el modelo continúa estimando tasas negativas se aplica el procedimiento descrito en 7.1 y se agrega la siguiente restricción:

$$Bo+B1 = 0$$

En el caso en que se presente el problema de tasas negativas estimadas en corto plazo para la curva de UVR solo se aplicara el procedimiento descrito en los numerales 7.1 y 7.3.

8. Resultados de la función

8.1 Los cuatro parámetros de la función.
8.2 Los Precios Estimados de los bonos de la muestra.
8.3 Los Precios Observados de los bonos de la muestra.
8.4 Las Rentabilidades Estimadas de los bonos de la muestra.
8.5 Las Rentabilidades Observadas de los bonos de la muestra

9. Estadísticos que se calcularán y publicarán con las curvas estimadas cero cupón

9.1 Estadístico de Ajuste

Este es uno de los criterios más importantes ya que mide que tan bien el modelo y su procedimiento de estimación asociado describen los datos de la muestra. La medida de ajuste que se calculara será la raíz cuadrada del promedio de los errores al cuadrado (RMSE)
Esta medida se puede interpretar como la desviación estándar de los errores.

$$RMSE(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \hat{x}_i)^2}{N}}$$

Este estadístico se calculara para los errores de los precios y para los errores de las rentabilidades.

9.2 Indicador de Fluctuación
Una característica importante de la curva estimada es que sea estable y que no posea mucha fluctuación, o que presente movimientos bruscos. Una medida conveniente para la fluctuación esta dada por el siguiente indicador:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \left[\frac{r(t_{i+1}) - 2 \cdot r(t_i) + r(t_{i-1})}{(t_i - t_{i-1})^2} \right] \cdot t_i \right\}^2$$

Donde r(t) representa la función estimada de la curva spot. Este funcional mide la magnitud de los cambios de pendiente de la curva spot a lo largo de todo el intervalo de estimación de la curva. Además, la cantidad de fluctuación se pondera por el tiempo de maduración y de esta forma se permite mayor flexibilidad en el corto plazo.