Determinación de requerimientos mínimos de capital conforme criterios de valor a riesgo en entidades financieras

Dr. Delia Novello
Dr. Daniel Sarto

INTRODUCCIÓN

El proceso de convergencia de las normas que regulan la solvencia de las entidades financieras alcanzó un objetivo importante en junio del año pasado: el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea publicó una nueva regla de capital en un documento cuyo título en español es "*Convergencia internacional de medidas y normas de capital – Marco revisado*". Si bien hace ya más de dos décadas que en los ámbitos académicos y comerciales se estudia cómo modelar la dependencia entre los cambios en la calidad de los deudores y los eventos de default, sin duda la puesta en práctica de la nueva regla de capital ha actualizado el interés por los modelos de riesgo de crédito.

En el presente trabajo se intenta recopilar los antecedentes teóricos que fundamentan esta nueva regla de capital. Tiene un carácter monográfico, sin pretensión de originalidad alguna, ni analítica ni de evaluación o de calibración de los modelos. Por el contrario, la abundancia de citas tiene por objeto referir puntualmente los conceptos u opiniones a sus autores y el lector queda advertido de la necesidad de consultar los trabajos originales, que en todos los casos son piezas fundamentales del desarrollo teórico reciente en materia de riesgo de crédito.

Un segundo objetivo ha sido reunir en un solo trabajo una serie de definiciones y conceptos que se encuentran esparcidos en un sinfín de publicaciones y presentarlos de un modo secuencial. Debe tenerse presente que el estudio de la distribución de la pérdida de las carteras de crédito es una cuestión relativamente nueva y, por lo tanto, existen pocos manuales, libros de texto y traducciones que traten esta materia.

Con este criterio, el trabajo se dividió en cinco capítulos. En el primero se presentan los conceptos necesarios para medir el riesgo de crédito. Sólo para ejemplificar las cuestiones que se deben resolver para llegar a una medición, en el segundo capítulo se enuncian algunas características de los modelos comerciales más conocidos. A diferencia de la mayoría de los riesgos asegurables, que se presumen independientes, los eventos de default son dependientes y esa condición afecta la distribución de la pérdida de la cartera. Para tratar las estructuras de dependencia, en el capítulo tercero se introducen algunos conceptos sobre las funciones cópula. En el cuarto capítulo se expone el modelo que sustenta la nueva regla de capital para los bancos. Como el modelo es aplicable sólo para el caso de las carteras de crédito bien diversificadas, en el capítulo quinto se resumen –de un modo muy sucinto– algunas cuestiones vinculadas con la diversificación insuficiente.

ÍNDICE

CAPÍTULO I
EL RIESGO DE CRÉDITO

El riesgo de crédito puede definirse como la probabilidad de experimentar una pérdida, ya sea porque un deudor incurre en default o porque se deteriora su calidad crediticia. En la última década han aparecido varios modelos comerciales que optaron por una u otra definición. Si seguimos a Crouhy, Galai y Mark[1], la definición de riesgo sobre la base de la pérdida por default es el enfoque adoptado por KMV Corporation y CreditRisk+, en tanto que la variación del valor de mercado del título de crédito es el criterio que siguen CreditMetrics y CreditPortfolio View.

CreditMetrics es una marca que pertenece a JP Morgan/Chase. Su modelo se basa en el análisis de la migración de los créditos en un plazo determinado, que en general es de un año. Como la probabilidad de pasar de un grado crediticio a otro incluye, pero no se limita, a la probabilidad de incurrir en default, la pérdida que registra el modelo es la que se deriva del cambio del valor de mercado del préstamo debido a los cambios en la calidad crediticia. CreditPortfolioWiew (de McKinsey) también se basa en las probabilidades de default y de migración de

---

[1] Crouhy M.; Galai D. y Mark R. "*Risk Management*"; pág. 318 y 426.

los deudores, agrupados por país e industria, condicionales a los valores que adoptan determinados factores económicos. En este modelo, cuando la economía se deprime se incrementan los defaults y se reduce la calificación crediticia de los deudores y ocurre lo contrario cuando la economía se recupera.

En cambio, el modelo de KMV Corporation se basa en la "frecuencia de default esperada" o EDF[2] de los deudores. Cada valor de EDF está asociado de manera implícita a una curva de spread y, por lo tanto, a un rating crediticio. A diferencia de CrediMetrics, este modelo no hace referencias explícitas a las probabilidades de transición entre niveles de calidad crediticia. CreditRisk+ (de Credit Suisse First Boston) tiene un enfoque de tipo actuarial basado en la información histórica del número de defaults por clase de crédito. Los procesos de default de los deudores y de recupero de los préstamos se consideran exógenos y se representan mediante un proceso de Poisson.

El Acuerdo del BIS (Bank for International Settlements) de 1988 fue el primer acuerdo internacional sobre el capital que deben tener los bancos para hacer frente al riesgo de crédito[3]. Establece un capital regulatorio mínimo para los eventos de default equivalente a un porcentaje sobre los activos. Pero para ponderar el riesgo no se toma en cuenta la calidad crediticia del deudor sino el tipo de activo: mientras la exigencia de capital para los préstamos a empresas es del 8%, se reduce a sólo el 4% para los préstamos hipotecarios para vivienda. La escasa sensibilidad del Acuerdo de 1988 al riesgo de crédito promueve que, vía arbitrajes regulatorios, los bancos saquen de su balance a los activos de mayor calidad y conserven a los más riesgosos. Como ejemplo, vale citar a Crouhy, Galay y Mark quienes compararon los resultados de CreditMetrics, KMV, CreditRisk+ y el Acuerdo de Basilea de 1988 para una cartera de más de 1.800 títulos, con diferentes calificaciones crediticias y plazos de vencimiento y denominados en 13 monedas de Estados Unidos, Europa y Asia. Los tres modelos comerciales produjeron exigencias que no difirieron en más de un 50% entre la mayor y la menor; pero para los títulos investment-grade todos los modelos de crédito generaron una exigencia de capital sustancialmente menor que el Acuerdo de 1988.

Desde entonces se afianzó la convergencia internacional de la regulación y se perfeccionaron los métodos para medir y controlar los riesgos de las actividades bancarias. En ese proceso es relevante la participación del BIS. Esta institución está formada por 55 bancos centrales, entre ellos el de Argentina, y es la sede de una cantidad de comités y organizaciones cuyos objetivos son la estabilidad financiera y el sistema financiero internacional, aunque algunas de dichas organizaciones no tienen relación de dependencia directa con el BIS o los bancos centrales miembro, como por ejemplo la International Association of Insurance Supervisors (IAIS). Dentro del BIS, los gobernadores de los bancos centrales de los países G-10[4] establecieron varios comités para estudiar y proponer normas relacionadas con el funcionamiento de los mercados financieros internacionales. Entre ellos, el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea, creado en el año 1974. Este comité, que incluye también a las autoridades de supervisión bancaria cuando no forman parte de un banco central, propone normas aceptadas a nivel internacional que, en general, son adoptadas luego por las legislaciones nacionales.

En junio de 2004 el Basel Committee on Banking Supervision publicó el documento denominado "Convergencia internacional de medidas y normas de capital – Marco revisado"[5], más conocido como Basilea II. Este marco, que va a sustituir al Acuerdo de 1988, tiene como objetivos fortalecer la solvencia y la estabilidad del sistema

---

[2] Expected default frequency.
[3] A partir de 1998 los bancos deben tener un capital adicional por el riesgo de mercado de su trading book.
[4] Alemania, Bélgica, Canadá, Estados Unidos, Francia, Italia, Japón, Países Bajos, Reino Unido, Suecia y Suiza.
[5] El título en inglés es "*International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, a Revised Framework*".

bancario internacional, promover la adopción de una mejor administración del riesgo y lograr la convergencia de las normas que regulan las exigencias de capital aplicables a los bancos internacionalmente activos.

El nuevo acuerdo establece cómo se calculan los requisitos mínimos de capital en función de los riesgos de crédito, de mercado y operacionales. En lo que concierne al riesgo de crédito, ofrece una gama de opciones para determinar los requisitos de capital, de modo que los supervisores y los bancos puedan elegir el enfoque más adecuado a sus operaciones y a la infraestructura de su mercado financiero. En adelante, las definiciones y las fórmulas seguirán los criterios que sustentan el enfoque IRB (Internal Ratings-Based Approach) o método basado en las calificaciones internas, que es el enfoque más sofisticado que ofrece Basilea II para el cálculo del capital por riesgo de crédito. No obstante, el criterio de valor a riesgo subyace también al mecanismo del otro método alternativo: el Standarised Approach o Método estándar. Está previsto que tendrá vigencia a partir de 2007 para los enfoques estándar e IRB básico y a partir de 2008 para el enfoque IRB avanzado. Durante el año 2006 se va a efectuar la última recalibración.

La probabilidad de default (PD)

El párrafo 452 del documento establece que ocurre un incumplimiento (o default) respecto de un deudor determinado cuando se da alguna de las siguientes situaciones, o ambas:

1) El banco considera improbable que el deudor cancele sin deducciones el total de sus obligaciones, sin necesidad de recurrir a la ejecución de las garantías, en caso de que éstas existan;
2) La mora del deudor en cualquier obligación significativa es de más de 90 días[6]. Si lo considera adecuado a las circunstancias del país, el regulador puede ampliar este plazo a 180 días para las obligaciones minoristas. Esta ampliación también es procedente para los préstamos a empresas durante un período de transición de 5 años.

Los siguientes son indicios de que el cobro es improbable:

1) El banco suspendió el devengamiento de los intereses de la obligación;
2) El banco vendió el préstamo con una pérdida significativa, lo previsionó o lo dio de baja, debido al deterioro de la calidad crediticia del deudor;
3) El banco aceptó una reestructuración forzosa del crédito, con quita o diferimiento del pago.
4) El banco solicitó la quiebra del deudor.
5) El deudor solicitó su propia quiebra o se le decretó la quiebra a pedido de otro acreedor.

En el caso de las posiciones minoristas, la definición de default puede aplicarse a nivel de línea de crédito. En consecuencia, el incumplimiento de una obligación no exige que el banco considere en default al resto de las operaciones del deudor.

La probabilidad de default (PD) puede estimarse a partir de la información de mercado o mediante ratings crediticios. Los modelos que se basan en la información de mercado calibran la PD a partir del spread de los instrumentos con riesgo de crédito o del valor de mercado de los activos del deudor. Puesto que el valor de los

[6] Se considera que existe mora respecto de un giro en descubierto si el deudor excedió el límite asignado.

activos de una empresa no es observable, debe estimarse a partir de la capitalización de mercado[7] y de la volatilidad del rendimiento de las acciones.

Los modelos que estiman la PD a partir del rating del deudor, asignan una probabilidad a cada uno de los niveles. Las calificaciones de crédito pueden provenir del propio banco o de agencias calificadoras comerciales, tales como Moody's Investors Services, Standard & Poor's (S&P) o Fitch. En Estados Unidos y Canadá la mayoría de las empresas que han emitido deuda pública están calificadas por estas agencias, pero la calificación externa no es habitual en Europa y, tampoco, en Argentina. Es importante destacar que de acuerdo con Basilea II, los bancos sólo pueden acudir a las calificaciones externas si optan por el método estandarizado o en casos muy especiales, si optaron por el método IRB.

Un concepto esencial en todo modelo de factores de riesgo es la distinción entre probabilidad condicional e incondicional de un evento. La probabilidad incondicional de default de un deudor, conocida también como PD o frecuencia esperada de default, es la probabilidad de default dentro de un horizonte temporal, dada toda la información actualmente disponible. La probabilidad condicional de default es la PD que se le atribuiría al deudor si también se supiera cuáles serán los valores de los factores de riesgo sistemáticos dentro del horizonte. La PD incondicional es el promedio de las probabilidades condicionales de default a través de todas las realizaciones posibles de los factores de riesgo sistemáticos. En algunos modelos los factores de riesgo sistemático no se especifican, mientras que en otros modelos se asocian a valores observables de las variables macroeconómicas o de los indicadores sectoriales. Condicional a la realización de los factores sistemáticos, se asume que el remanente del riesgo de crédito es idiosincrásico de cada deudor individual.

Si, como es el caso del enfoque IRB, el modelo se basa en un solo factor sistemático se denomina de factor único. Normalmente, el riesgo sistemático es el mayor riesgo de la cartera. El riesgo idiosincrásico se anula en las carteras diversificadas, pero sigue siendo importante en las carteras pequeñas o cuando existen grandes concentraciones.

Para aplicar el método IRB, los bancos deben demostrar a su regulador que pueden ordenar y cuantificar el riesgo de un modo consistente. Los sistemas y procesos de calificación y estimación de riesgos deben proporcionar evaluaciones significativas del deudor y de la operación, una diferenciación significativa del riesgo y una estimación cuantitativa del riesgo razonablemente precisa. Además, los sistemas y procesos deben ser compatibles con el uso interno de tales estimaciones. El párrafo 444 del documento establece que las calificaciones internas y las estimaciones de incumplimiento y de pérdida deben tener una participación importante en el procedimiento de aprobación de créditos, en la gestión de riesgos y en la asignación interna del capital. No son aceptables los sistemas de calificación ni las estimaciones formulados al solo efecto de obtener el permiso para emplear el método IRB o para proveer la información para la determinación del capital regulatorio. El banco deberá haber utilizado el sistema de calificación al menos durante tres años antes de su admisión en el método IRB.

Todos los bancos que apliquen el método IRB deben hacer sus propias estimaciones de la PD. El "sistema de calificaciones" que emplee el banco debe incluir los métodos, procesos, controles y sistemas de recopilación de datos y de tecnología informática que faciliten la evaluación del riesgo de crédito, la asignación de calificaciones de riesgo internas y la cuantificación de las estimaciones de incumplimiento y de pérdidas. El riesgo de

[7] Valor de la acción por número de acciones emitidas.

incumplimiento que se asigne a un deudor debe ser igual para cualquier tipo de operación con el mismo cliente, excepto cuando por el tipo de garantía sea admisible ajustar el grado del deudor o cuando intervengan factores tales como el riesgo país / riesgo de transferencia. En este último caso, el banco puede asignar diferentes grados a un deudor en función de si la moneda en la que se denomina la línea de crédito es nacional o extranjera.

Los bancos deben contar con un mínimo de siete grados de calidad de crédito para los deudores que no han incurrido en incumplimiento y de un solo grado para los deudores en default. Deben distribuir las exposiciones a través de los distintos niveles de calificación, sin concentraciones excesivas, tanto por grado de calificación o por tipo de facilidad. En caso de que tuvieran concentraciones de préstamos en uno o varios grados, deben demostrar de un modo convincente que dichos grados cubren bandas de PD razonablemente estrechas.

Las calificaciones deben reflejar la capacidad y la voluntad del deudor de atenerse a las pautas contractuales de su obligación, incluso en una situación económica adversa o ante acontecimientos inesperados. Los bancos pueden basar las calificaciones en "escenarios de tensión"[8] o tener en cuenta la vulnerabilidad del deudor a las circunstancias económicas adversas, sin especificar escenarios de tensión. Deben tomarse en consideración las circunstancias económicas presentes y las que se darán probablemente a lo largo del ciclo económico en el sector industrial o la región geográfica relevantes. Aunque el horizonte temporal para la estimación de la PD es de un año, se espera que los bancos utilicen un horizonte mayor para asignar las calificaciones.

Los modelos de credit scoring y otros procedimientos mecánicos para calificar a los deudores emplean sólo una parte de la información disponible. Se admiten como base de la calificación pero se debe utilizar el criterio personal para que toda la información relevante, incluso la que está fuera del modelo, sea tomada en consideración.

De acuerdo con el párrafo 447, las estimaciones de la PD deben consistir en una media a largo plazo de las tasas de incumplimiento anuales de los deudores incluidos en cada grado de calidad crediticia. Para las estimaciones internas de la PD[9] se pueden utilizar tanto datos internos como externos, pero las estimaciones siempre deben basarse en la experiencia a largo plazo. Las estimaciones deben realizarse a partir de datos empíricos. Tanto la muestra como el período muestral utilizados en la cuantificación deben ser suficientes para confiar en la precisión de las estimaciones.

El período de observación para estimar la PD media de cada grado de calificación de empresas, soberanos y bancos debe ser, como mínimo, de 5 años. Los bancos pueden utilizar diversas técnicas para estimar la PD:

1) Estimación sobre la base de la experiencia interna de default. El análisis debe reflejar los criterios de suscripción y las diferencias entre el sistema de rating que generó la información y el sistema actual.
2) Asociación (o "mapeo") de los grados internos a una escala utilizada por una agencia externa de calificación. Luego se asignan las tasas de default estimadas por la agencia a los grados del propio banco.
3) Media simple de las estimaciones de probabilidad de default para deudores individuales de cada grado, si dichas estimaciones se obtienen de modelos estadísticos de predicción de default.

La PD de los préstamos minoristas debe estimarse sobre la base de la experiencia interna. Dado que cada banco determina cómo conforma los pools, los datos propios son la fuente primaria de información para estimar

[8] Stress scenario.
[9] También de la LGD y la EAD.

las características de la pérdida. Los bancos pueden usar datos externos o modelos estadísticos siempre que puedan demostrar una relación estrecha entre los procesos externos de segmentación de riesgos y la conformación de su cartera. También en este caso, el período de observación debe ser, como mínimo, de 5 años.

Los párrafos 285 y 331 fijan un valor mínimo de 0,03% para la PD anual de las empresas, los bancos y los clientes minoristas. Los deudores en default reciben una PD de 100%.

La pérdida en caso de incumplimiento (LGD)[10]

La LGD representa la proporción de la exposición crediticia que no puede recuperarse una vez producido el default. Depende de factores tales como las garantías y la preferencia en el cobro (o "seniority"). Algunos modelos tratan a la LGD como una variable aleatoria correlacionada con el ciclo económico, en tanto otros le dan un valor fijo o, lo que es lo mismo, la tratan como equivalente a la esperanza de una variable aleatoria independiente del ciclo.

El enfoque IRB en el esquema de Basilea II admite dos variantes: el método básico y el método avanzado[11]. Sólo bajo este último los bancos pueden calcular la LGD, que se mide en decimales. En el método básico deben aplicar coeficientes fijos: 45% para los préstamos sin garantías a empresas, soberanos y bancos si tienen preferencia en el cobro ("senior claims") y 75% para los préstamos subordinados. Además, se establece cómo debe reducirse la LGD cuando los préstamos cuentan con determinado tipo de garantías admisibles.

De acuerdo con el párrafo 297, los bancos que reciban autorización de su regulador pueden utilizar sus propias estimaciones. En este caso, la LGD no puede ser inferior a la tasa de pérdida media de largo plazo por tipo de facilidad. Los bancos deben tener en cuenta la "variabilidad cíclica" de la LGD, es decir la posibilidad de que sea mayor que el valor medio durante los períodos en los que se acrecientan las pérdidas crediticias. También deben considerar si existe algún tipo de dependencia entre el riesgo del deudor y el riesgo del garante o de la garantía. Las estimaciones de la LGD deben basarse en períodos de observación que cubran, por lo menos, un ciclo económico completo, y que no pueden ser inferiores a 5 años para los créditos minoristas y a 7 años para el resto.

En el esquema de Basilea II el evento de default y la LGD se tratan como variables independientes entre sí. De acuerdo con Jon Frye[12], ocurre algo similar con los modelos comerciales. Ningún modelo convencional trata a la LGD como dependiente del factor sistemático. Por ejemplo, CreditRisk+ no trata a la LGD como variable aleatoria sino que asume que es un valor conocido, en tanto que CreditMetrics considera al riesgo de recupero como puramente idiosincrásico.

Existen otros modelos en los que la LGD depende del factor sistemático. Estos modelos tienen en cuenta que el valor de las garantías, como el de cualquier otro activo, disminuye en condiciones económicas adversas. Sin

[10] Loss given default.
[11] Foundation approach y Advanced IRB, respectivamente.
[12] FRYE Jon "*Collateral Damage*".

embargo, si seguimos a Frye, existe poca información en materia de recupero de créditos. Para estimar el valor de los parámetros de un modelo en el que la LGD depende de los estados de la economía, este autor debió emplear los datos de una base de Moody's Default Risk Service, que contiene información desde 1970 sobre las tasas de default y de recupero de los bonos con rating crediticio emitidos por las empresas norteamericanas[13].

La exposición a la fecha de default (EAD)[14]

La EAD es el importe de la exposición del banco con el deudor. Se mide en unidades monetarias y se compone tanto de préstamos (los fondos ya fueron entregados al deudor) como de créditos. Éstos a su vez pueden estar comprometidos (acuerdos para girar en descubierto y líneas de crédito) o haberse originado por la evolución de ciertos contratos (por ejemplo, de derivados). Los modelos de crédito computan la EAD como los cashflows a riesgo más allá del horizonte temporal. Su precio se calcula en función de la curva de tasas de interés futuras correspondiente a la calidad crediticia del deudor.

Los swaps y los futuros tienen un tratamiento especial. Para calcular la EAD de estos derivados se deben adoptar supuestos sobre la distribución de probabilidades de las tasas de interés. Por ejemplo, la exposición en un swap puede ser positiva (si está in-the-money para el banco) o negativa (si está out-of-the money). En este último caso el swap es un pasivo para el banco y quien soporta el riesgo de crédito es la contraparte. La exposición en un swap se debe obtener a partir de modelos externos, ya que sólo se puede calcular de un modo adecuado con los modelos que hacen uso de tasas de interés estocásticas.

Sólo los bancos que apliquen el método avanzado pueden calcular la EAD. Los bancos que utilicen el método básico deben computar como exposición los saldos de balance, en tanto que las cuentas de orden ("fuera de balance") deben convertirse en equivalentes de crédito mediante la utilización de factores de conversión (CCF)[15]. Por ejemplo, los compromisos en cuentas de orden con un plazo de vencimiento inicial de hasta un año reciben un CCF del 20% y los que exceden ese término, del 50%. Los compromisos que pueden ser cancelados incondicionalmente por el banco reciben un CCF del 0%.

El párrafo 474 define los conceptos a aplicar por los bancos autorizados a efectuar sus propias estimaciones. La EAD de una partida dentro o fuera del balance se define como la posición bruta esperada de la facilidad a la fecha de default. Para las partidas dentro del balance, la estimación no puede ser inferior al valor del préstamo otorgado. Para las partidas fuera del balance, la estimación debe reflejar la posibilidad de que el deudor decida girar contra la facilidad acordada, antes y después de la fecha de exteriorización del default. Para las exposiciones en las que la EAD fluctúe con el ciclo económico, las estimaciones deben contemplar la posibilidad de una desaceleración. Como en el caso de la LGD, la estimación de la EAD debe basarse en un período que cubra un ciclo económico completo, el que no puede ser inferior a 5 años para los créditos minoristas y a 7 años para el resto.

---

[13] FRYE Jon "*Depressing Recoveries*". El autor reconoce que el modelo debería haberse calibrado sobre la base de las tasas de default y recupero de los préstamos. Sin embargo, la base de Moody´s registraba sólo 15 recuperos de préstamos en default, el primero del año 1996.
[14] Exposure at Default.

El vencimiento efectivo (M)[16]

La PD se calcula con un horizonte temporal de un año. El coeficiente M se incorpora para contemplar el mayor riesgo implícito en los préstamos de plazo superior. De acuerdo con el párrafo 318, los bancos que utilicen el método básico para sus exposiciones con empresas deben utilizar lo que se considera que es el plazo estándar (M igual a 2,5 años), excepto en el caso de las recompras a término donde M es de 6 meses. Los bancos que utilicen el método IRB avanzado deben calcular el vencimiento efectivo de todas las facilidades. Los reguladores pueden exceptuarlos de esta exigencia en el caso de préstamos a pequeñas empresas con ventas y activos inferiores a 500 millones de euros, a los que deberá aplicarse entonces una M de 2,5 años.

Para los restantes casos, el vencimiento efectivo tiene un máximo de 5 años y se calcula:

$$M = \frac{\sum_t t * CF_t}{\sum_t CF_t}$$

Donde CF_t son los flujos de fondos (capital, intereses y comisiones) que por contrato el deudor está obligado a pagar en el período *t*.

La pérdida esperada (EL)[17]

La pérdida esperada es la esperanza de la variable aleatoria que representa a la posible pérdida por el default de los deudores. El evento de default es una variable Bernoulli, que puede describirse mediante el siguiente indicador:

$$I_{D_i} = \begin{cases} 1, \text{si se produce el default del deudor } i \\ 0, \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Puesto que la media de la variable aleatoria Bernoulli es igual a la probabilidad del evento, la pérdida esperada en un año puede expresarse como:

$$E[L] = PD = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{D_i}$$

$$EL_{\%} = LGD * E[L] = LGD * PD$$

$$EL_{Monto} = EAD * EL_{\%}$$

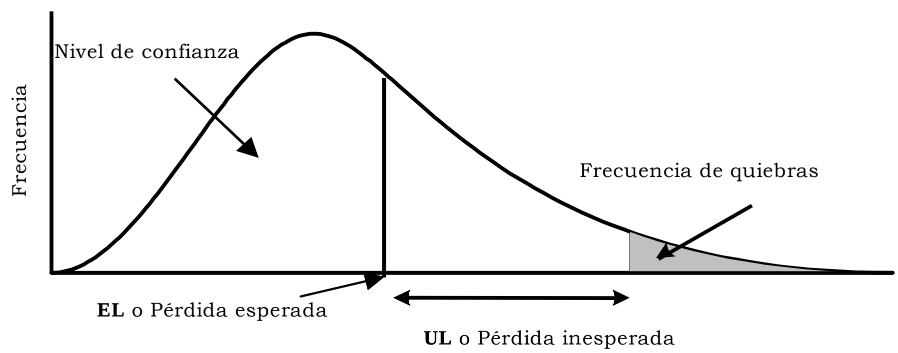
Por último, la $EL_{\%}$ es un componente del costo de los préstamos que se suma a la tasa de interés y a la tasa de los costos operativos. Los bancos deben constituir previsiones por incobrabilidad de los préstamos (es decir, reservas) que no sean inferiores a la EL_{Monto}.

[15] Credit conversion factor.
[16] Effective maturity.
[17] Expected loss.

La pérdida inesperada (UL)[18]

La pérdida inesperada es la denominación que se da a los desvíos desfavorables de la variable aleatoria que representa a la posible pérdida por el default de los deudores, respecto de su media.

Pérdida porcentual de la cartera



El enfoque IRB de Basilea II determina el capital necesario para absorber estos desvíos en función de la frecuencia de las quiebras de bancos que resulta aceptable para los reguladores. Mediante los modelos de crédito puede estimarse el monto de la pérdida que corresponde a dicha frecuencia. El esquema de Basilea II permite calcular el capital regulatorio de manera que pueda absorber las pérdidas que exceden la media en un 99,9% de los casos. O lo que es lo mismo, con un nivel de confianza del 99,9%, el capital regulatorio más las previsiones (o reservas) por incobrabilidad van a impedir las quiebras bancarias.

La fórmula para determinar el requisito de capital es:

$$\text{Re}\,quisito\ \ de\ \ capital\ \ (K)_{\%} = \left\{ N \left[\frac{N^{-1}(PD) + \sqrt{\rho} * N^{-1}(99{,}9\%)}{\sqrt{1\text{-}\rho}} \right] - PD \right\} * LGD * \frac{1 + (M - 2.5) * b}{1 - 1.5 * b}$$

Donde N y N^{-1} son la función normal y la función normal inversa, respectivamente; ρrepresenta la correlación de los activos del deudor con el estado general de la economía (o factor de riesgo sistemático) y b es el ajuste del plazo de vencimiento efectivo (M).

$$\rho = 0.12 * \frac{1 - e^{(-50*PD)}}{1 - e^{(-50)}} + 0.24 * \frac{1 - [1 - e^{(-50*PD)}]}{1 - e^{(-50)}} - 0.04 * \left(1 - \frac{S - 5}{45} \right)$$

---

[18] Unexpected loss.

$$b = [0.11852 - 0.05478 * \ln(PD)]^2$$

La función de correlación de activos, que se aplica a empresas, deuda soberana y bancos, se calibró en base a información provista por los países del G-10. De acuerdo con dicha información, cuanto mayor es la PD menor es la correlación, porque aumenta el riesgo idiosincrático y la evolución del deudor es menos dependiente del estado general de la economía. La función de correlación da valores entre dos límites: 12% para una PD de 100% y 24% para una PD de 0%.

También se observa que a mayor tamaño de la firma, mayor es la correlación de sus activos respecto de la evolución de la economía. La insolvencia de las firmas pequeñas responde en mayor medida a factores idiosincráticos. Por eso se permite un tratamiento diferente para los préstamos a empresas pequeñas y medianas. En el caso de empresas con ventas anuales (S) menores a 50 millones de euros se puede deducir de la fórmula de correlación un ajuste por tamaño de la firma (último término de la ecuación). Las ventas menores a 5 millones de euros se tratan como si fueran equivalentes a ese valor. El ajuste por tamaño no se aplica a las exposiciones con bancos y soberanos.

Como se vio, los créditos a largo plazo aportan más riesgo que los créditos a corto plazo. El ajuste del vencimiento efectivo toma en consideración la potencial disminución del valor de mercado del crédito en el horizonte temporal. Como los préstamos con menor PD tienen un valor de mercado presente mayor, la probabilidad de que ese valor se reduzca es mayor que en el caso de los préstamos con alta probabilidad de default, pues éstos ya han perdido gran parte de su valor de mercado. Por ello el coeficiente *b* aumenta cuando disminuye la PD.

La cartera minorista

Los ponderadores de riesgo de la cartera minorista tienen dos diferencias respecto de los que se aplican a empresas, bancos y soberanos: 1) no se ajustan por el vencimiento efectivo (M) y 2) los supuestos de correlación son diferentes:

Hipotecas residenciales	$\rho = 0,15$
Exposiciones revolving	$\rho = 0,04$
Otras exp. minoristas	$\rho = 0.03 * \frac{1 - e^{(-35*PD)}}{1 - e^{(-35)}} + 0.16 * \frac{1 - [1 - e^{(-35*PD)}]}{1 - e^{(-35)}}$

Securitización (o titulización) de activos

El capítulo IV del Pilar 1 del acuerdo, “Credit Risk – Securitization Framework”, establece las pautas para calcular la exigencia de capital por las exposiciones en activos securitizados. Según la nueva norma, debido a que las securitizaciones pueden estructurarse de maneras muy diferentes, estas exposiciones deben tratarse de acuerdo con su sustancia económica y no en función de la forma legal.

Las *securitizaciones tradicionales* se definen como aquellas estructuras en las que el cash flow de un pool de exposiciones subyacentes se utiliza para atender los servicios de al menos dos posiciones de riesgo estratificadas o tramos, con diferente grado de riesgo crediticio. Los pagos a los inversores dependen del comportamiento de las exposiciones subyacentes y no constituyen una obligación para la entidad originante.

Las *securitizaciones sintéticas* son estructuras, que tienen al menos dos tramos con diferente riesgo de crédito, a las que el riesgo de un pool de exposiciones subyacentes se ha transferido en todo o parte mediante el uso de derivados de crédito o garantías que sirven como "hedge" del riesgo de crédito de una cartera.

Las securitizaciones y, en general, los derivados de crédito, protegen de los movimientos adversos en la calidad de los deudores. De acuerdo con Bluhm[19], se prefiere a estos instrumentos respecto de los seguros porque tienen costos de transacción menores, pagos más rápidos y mayor liquidez. Además, si bien fueron concebidos como cobertura, ahora se comercializan también con fines especulativos. Bluhm agrega que los derivados de crédito son un producto intermedio entre el seguro de crédito tradicional y los derivados financieros. Cada uno de estos productos tiene su metodología de valuación propia, pero ninguna es completamente satisfactoria para los derivados de crédito. Las técnicas del seguro usan información histórica; es decir, presumen que los deudores se van a comportar en el futuro como lo hicieron en el pasado. En tanto que para la valuación de los derivados se emplea información de mercado. Sin embargo, este enfoque se basa en el supuesto de neutralidad al riesgo, que a su vez implica que se asume que los mercados son completos y que no permiten arbitrajes sin riesgo. No es claro que estos supuestos se cumplan en el mercado del crédito.

Las Collateralized Debt Obligations o CDO son una clase de securitización o ABS (Asset Backed Securities) cuyo pool de activos consiste en bonos o préstamos. Estos activos de riesgo se transfieren a una compañía creada especialmente para la transacción o Special Purpose Vehicle (SPV) y, de este modo, no pueden ser alcanzados por los acreedores de la entidad originante. La SPV emite títulos o notas estructuradas respaldadas por el cash flow del pool de activos y los coloca entre los inversores. Por lo general, estas notas se estructuran con grados crecientes de subordinación y, por lo tanto, de riesgo y de rendimiento. El tramo más subordinado, o equity, sólo recibe intereses y el pago del principal si han cobrado los tenedores de los tramos precedentes.

El banco originante puede excluir para el cálculo de la exigencia de capital a las exposiciones securitizadas sólo si ha transferido el riesgo de crédito a terceros de un modo efectivo y no conserva el control de las exposiciones cedidas. Desde luego, debe mantener el capital regulatorio que corresponde a las exposiciones retenidas.

El nuevo acuerdo contiene pautas detalladas para el cálculo de la exigencia de capital que corresponde a las securitizaciones, tanto para los bancos que utilizan el enfoque estandarizado como para los que emplean el enfoque IRB. No corresponde ahondar aquí en esas disposiciones, pero para comprender el criterio que se emplea basta decir que los bancos deben ponderar la exposición en función de los ratings crediticios de los tramos. En el enfoque estandarizado, los bancos inversores (bancos que incorporaron tramos de securitizaciones a su activo mediante una compra) deben tratar a los tramos sin rating o con ratings de largo plazo B+ o peores como una pérdida (deben deducirlos del capital). El tratamiento es más severo para los bancos originantes, que deben deducir todas las exposiciones retenidas si tienen ratings inferiores a las categorías investment grade (BBB-).

---

[19] BLUHM C., OVERBECK L. y WAGNER C. "*An Introduction to Credit Risk Modeling*"; pág. 211.

En el enfoque IRB existen más opciones, que dependen de si los tramos tienen un rating, ya sea inferido o acordado por una calificadora de crédito. Si no existe tal rating, debe aplicarse una evaluación interna (*Internal Assessment Approach)* que "mapea" las calificaciones internas en los ratings equivalentes de las calificadoras de crédito o la fórmula de supervisión (*Supervisory Formula*). Mediante la fórmula de supervisión el cargo de capital IRB que correspondería a las exposiciones subyacentes si no se hubieran securitizado se apropia a cada tramo en forma inversa a su prioridad en el cobro (el tramo más subordinado tiene un cargo de capital mayor).

Prociclicidad de la exigencia de capital según Basilea II

Se argumenta que el incremento de la sensibilidad al riesgo del capital regulatorio podría tener efectos económicos inesperados. Esto podría resultar así porque los activos de menor calificación van a tener una mayor exigencia de capital, en el enfoque estandarizado y, especialmente, en el enfoque IRB.

Si bien la sensibilidad al riesgo va a promover una administración más prudente, va a mejorar la asignación del capital y va a reducir el riesgo de default de los bancos, la exigencia de capital del sistema financiero en su conjunto también va a ser más sensible al riesgo y va a elevarse y a caer mucho más con los ciclos de crédito. Las variaciones van a ser importantes porque las probabilidades de default se elevan exponencialmente a medida que baja la calificación de los deudores.

Se aduce que si los reguladores no flexibilizan las exigencias, los bancos tendrán que administrar los créditos de un modo mucho más activo, recortando los préstamos o vendiendo parte de la cartera en los períodos de declinación económica. Aunque este mecanismo funciona razonablemente bien para los activos de trading, se argumenta que probablemente sea inconveniente para instrumentos menos líquidos como los incluidos en el régimen de riesgo de crédito.

Los efectos de la volatilidad de la exigencia de capital afectarán a la industria bancaria y a la economía en general. Si los bancos responden restringiendo el crédito durante la parte adversa del ciclo, se amplificarán los efectos y hasta se podría neutralizar el rol del sistema financiero como amortiguador de los shocks en las economías de mercado.

Con cualquier régimen, sensible al riesgo o no, el capital de los bancos siempre se reduce en circunstancias adversas, ya sea por la incobrabilidad real o por los requisitos de previsionamiento. Por ello, siempre hay implícito un mínimo de profundización del ciclo. Pero los enfoque sensibles al riesgo disminuyen la ratio de capital no sólo a partir de las pérdidas reales, sino también por el incremento de la exigencia que resulta de la rebaja de la calificación de los activos que todavía tienen buen cumplimiento. Entre las medidas para aliviar la cuestión de la volatilidad del capital se han sugerido: 1) permitir el uso de la calificación de los activos al momento del otorgamiento del crédito, en vez de la calificación corriente y 2) el aplanamiento de la curva IRB.

El nuevo acuerdo establece que los ratings y las estimaciones de la PD deben reflejar el riesgo promedio a largo plazo. Esta instrucción parece un intento de compensar los cambios en las condiciones económicas: las evaluaciones deben ser relativamente pesimistas en los períodos de auge y optimistas en los períodos de depresión. Sin embargo, existen estudios[20] que muestran que aun los ratings "a través del ciclo", como por ejemplo las calificaciones de S&P, ponen en evidencia la volatilidad de la exigencia de capital de Basilea II.

La respuesta parcial a la volatilidad del capital que parece haberse incorporado al acuerdo es el "aplanamiento" de la curva IRB o reducción de la tasa de incremento de los ponderadores de riesgo en función del incremento de la PD. La curvatura de la función de ponderación de riesgos IRB depende de la correlación de los activos. La calibración del acuerdo disminuye la correlación a medida que aumenta la PD, lo que en cierta medida atenúa el efecto de la rebaja de la calificación de los deudores en los períodos de depresión.

CAPÍTULO II
LA MEDICIÓN DEL RIESGO

Existen múltiples enfoques para determinar cuál es el capital necesario para cubrir el riesgo de default. Entre ellos, el VaR o Value at Risk, que puede definirse como la distancia entre la media y el percentil de la distribución de la pérdida a futuro que corresponde al nivel de confianza deseado. De acuerdo con Crouhy, Galai y Mark[21], si se lo compara con el VaR de mercado, el VaR de crédito presenta tres dificultades:

1) La distribución de los eventos de default no es una distribución normal. En consecuencia, no puede hallarse el percentil deseado de la distribución sólo a partir de la media y de la varianza[22].
2) la diversificación que se produce dentro de la cartera es más difícil de medir que en el caso del riesgo de mercado; y
3) la información sobre los préstamos no es tan completa como la que existe sobre los instrumentos negociados. Por ejemplo, para estimar la diversificación es preciso conocer la correlación de la calidad crediticia para cada par de deudores, pero estas correlaciones no son observables en forma directa.

Crouhy, Galai y Mark hacen un análisis muy interesante de la evolución de los modelos de riesgo[23] y la vinculan a la investigación académica sobre la valuación de derivados y a las técnicas de administración de riesgo desarrolladas a partir de los años cincuenta. Los primeros análisis se encuentran entonces en el trabajo de Markowitz sobre los principios para la selección de una cartera, según los cuales en un mercado de capitales perfecto, un inversor racional –es decir, que maximiza su utilidad esperada– debe analizar las carteras alternativas sobre la base de la media y a la varianza de las tasas de rendimiento. Como se asume que las tasas de rendimiento tienen una distribución normal, sólo son necesarios estos parámetros para fundamentar la elección del consumidor. Cada título debe evaluarse por su contribución a la media y a la varianza de la cartera que integra. El riesgo específico o idiosincrásico del título individual se diversifica en el conjunto de la cartera sin costo alguno, razón por la que no es tenido en cuenta por el mercado.

En la década del 60, William Sharpe y John Lintner agregaron al modelo la existencia de un activo libre de riesgo y demostraron que los mercados se encuentran en equilibrio cuando los inversores mantienen una tenencia que combina el activo libre de riesgo y una cartera de mercado que contiene todos los activos de riesgo de la economía. Entonces, el precio de los activos de riesgo se determina de modo que todos los activos tengan un

---

[20] ERVIN D. y WILDE T. "*Pro-cyclicality in the New Basel Accord*".

[21] CROUHY M., GALAI D. y MARK R. "*Risk Management*"; pág. 320.

[22] Para calcular el VaR por riesgo de crédito, en muchos modelos se debe recurrir a la simulación de la distribución de los cambios en el valor de la cartera.

lugar en la cartera de mercado. Para que un activo de riesgo tenga cabida en la cartera de mercado, su precio debe ser acorde a su contribución al riesgo, contribución que se expresa por:

$$\beta_i \equiv \frac{Cov(r_i, r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\sigma_i}{\sigma_M} \rho_{i,M}$$

Donde r_i y r_M son las tasas de rendimiento del activo *i* y de la cartera de mercado, respectivamente; σ_i y σ_M son sus desvíos estándares, y $\rho_{i,M}$ es el coeficiente de correlación entre *i* y *M*. Este coeficiente, que se conoce como coeficiente "beta" del activo *i*, mide el riesgo sistemático del activo; es decir, el riesgo no diversificable. En consecuencia, la tasa de rendimiento esperada del activo *i* es:

$$E(r_i) = r + \beta_i \left[E(r_M) - r\right] = r + \rho_{i,M} \frac{\sigma_i}{\sigma_M} \left[E(r_M) - r\right]$$

Donde *r* es la tasa libre de riesgo. El factor entre corchetes es la prima por riesgo por cada unidad de riesgo beta. El rendimiento que excede la tasa libre de riesgo es una función del componente sistemático del riesgo $\sigma_i \, \rho_{i,M}$.

En tanto, Franco Modigliani y Merton Miller mostraron en 1958 que en un mercado de capitales perfecto la estructura de capital de una firma no tiene incidencia sobre su valor. Es decir, la firma no puede incrementar su valor emitiendo más deuda, aunque el costo esperado de la deuda sea menor que el costo esperado de la acción. Esto es así porque a mayor endeudamiento, mayor riesgo financiero para los accionistas quienes, en consecuencia, demandarán mayores rendimientos para la acción. El valor económico de la firma depende solamente del rendimiento de sus activos.

En 1973, Fischer Black y Myron Scholes, por un lado, y Robert Merton, por otro, publicaron trabajos sobre la valuación de las opciones. En ambos casos se basaron en los supuestos de Markowitz, Sharpe y Lintner: la existencia de mercados de capitales perfectos y la distribución lognormal de los precios de los títulos. Se agregaron dos nuevos supuestos: la negociación de los títulos es continua y la distribución de los rendimientos es estacionaria.

Finalmente en la década de los 80, Oldrich Vasicek –quien había trabajado a fines de los 60 en un equipo integrado por Sharpe, Scholes, Black y Merton– elaboró un modelo de riesgo para las carteras de crédito que es el antecedente directo, no sólo del esquema de Basilea II, sino también de algunos modelos comerciales, como el de KMV, firma de análisis del riesgo crediticio de la que es cofundador.

Valuación neutral al riesgo

El caso más simple del modelo de valuación de deudas desarrollado por Merton es el de una empresa con una estructura de financiamiento muy sencilla: las acciones S_T y una sola deuda, de valor nominal B, con vencimiento en el momento T. Los activos de riesgo de la empresa se representan por A_t. En este esquema, existe riesgo de crédito en tanto $Pr(A_T<B)>0$. Esto implica que en el momento 0, $B_0<B^*e^{-rT}$; es decir que la deuda devenga un interés hasta el vencimiento que es mayor que la tasa libre de riesgo (la diferencia es el spread por riesgo de

---

[23] CROUHY M., GALAI D. y MARK R. "*Risk Management*"; pág. 21.

default). Como se verá, en este modelo simple el riesgo de crédito es una función de la estructura financiera de la empresa, es decir de su "*leverage ratio*": $LR=B^*e^{-rT}/A_0$.

Si se observa, el riesgo de crédito es igual a un put europeo sobre el valor de los activos de la firma, con un strike igual a B y vencimiento en T. Es decir que si el acreedor de la firma adquiriera el put en el momento 0, mediante el pago de la prima P_0, eliminaría por completo el riesgo de crédito. En equilibrio, $B_0 + P_0 = B^*e^{-rT}$. Si se asumen los supuestos necesarios para aplicar el modelo de valuación de Black y Scholes (BS)[24]:

$$P^{BS}(A_0, B, T, \sigma, r) = -N(-d_1)\,A_0 + B\,e^{-rt}\;N(-d_2)$$

Donde N es la función de distribución normal acumulada y:

$$d_1 = \frac{\ln\left(A_0/B\right) + \left(r + \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\left(A_0/B\;e^{-rT}\right) + \tfrac{1}{2}\sigma^2\;T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Si se tiene presente la paridad put-call para las opciones europeas sobre acciones que no pagan dividendos, se advierte que en este modelo los accionistas tienen un derecho S_T sobre los activos de la empresa equivalente a un call europeo:

$$C(A_t) - P(A_t) = A_t - B\,e^{-r\,(T-t)}$$

$$C^{BS}(A_0, B, T, \sigma, r) = N(d_1)\,A_0 - B\,e^{-rt}\;N(d_2)$$

Es importante destacar, siguiendo a Lando[25], que el precio del bono B_t es creciente en *A* y *B* y decreciente en *r*, (*T-t*) y σ. La volatilidad incrementa simultáneamente el valor del call y del put sobre los activos de la firma y es la clave para entender la noción de "sustitución de activos". El incremento del riesgo de la firma transfiere riqueza de los acreedores a los accionistas. Este efecto puede lograrse vendiendo los activos de la firma e invirtiendo el producido en activos más volátiles. El valor de la firma no cambia, pero ganan los accionistas (que tienen un call sobre los activos) y pierden los acreedores (que lanzaron un put sobre dichos activos). Por este motivo los bonos se emiten con "covenants" o cláusulas mediante las cuales los acreedores limitan las decisiones de inversión de los accionistas. En el modelo de Merton se asume la existencia de este control, porque la volatilidad de los activos es fija.

Entonces, si el acreedor de la firma compra un put P_0, adquiere un seguro cuya prima es la pérdida esperada en caso de default, descontada a la tasa libre de riesgo. En la expresión siguiente, $N(-d_2)$ es la probabilidad de default y dentro del paréntesis se encuentra la diferencia entre el valor nominal de la deuda y el recupero esperado del préstamo condicional a $A_T<B$, descontada a la tasa libre de riesgo.

$$P^{BS}(A_0, B, T, \sigma, r) = \left(B\,e^{-rt} - \frac{N(-d_1)}{N(-d_2)}\,A_0\right)N(-d_2)$$

[24] En el modelo estándar de Black-Scholes se asume un mercado con negociación continua, sin fricciones y competitivo, en el sentido de que: 1) los agentes son tomadores de precios, esto es la negociación de activos no tiene efecto sobre los precios; 2) las transacciones no tienen costos; 3) hay acceso irrestricto al "short selling" y los activos son divisibles, 4) existe financiamiento mediante una "money-market account" (cuenta a la vista) a una única tasa libre de riesgo, continua y compuesta, r.

Se dice que la valuación de las opciones es neutral al riesgo porque en la ecuación diferencial desarrollada por Black y Scholes no intervienen las variables que se vinculan con las preferencias de los inversores. Debe recordarse que el inversor exige mayor rendimiento cuanto mayor es su aversión al riesgo. Si en la fórmula interviniera la tasa esperada de rendimiento del activo A, representada por μ, habría tantos precios para el derivado como inversores. Como el precio es independiente de las preferencias individuales, puede asumirse que en este caso los inversores son neutrales al riesgo y, por lo tanto, para ellos el rendimiento esperado no es otro que la tasa de interés libre de riesgo *r*.

Todo este razonamiento se apoya en el supuesto de que no existan oportunidades de arbitrar sin riesgos. Si se puede construir una cartera con cierta cantidad de un activo y una opción que asegure el valor de la cartera a determinado plazo, el rendimiento de dicha cartera no puede ser otro que la tasa libre de riesgos. A su vez, el precio de la opción queda determinado por el valor presente del activo y su volatilidad, el plazo y la tasa de interés libre de riesgo. La tasa de rendimiento esperada del activo y las preferencias individuales no intervienen, ya que cualquier precio distinto para la opción daría lugar a arbitrajes sin riesgo.

Pero si se remueve el supuesto de neutralidad al riesgo, la probabilidad de default se convierte en *p*=N(-d'$_2$):

$$d_2' = \frac{\ln\left(A_0/B\right) + \left(\mu - 1/2\,\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Desde luego, las frecuencias de default empíricas se desvían de las probabilidades neutrales al riesgo. Mientras N(-d_2) es una función de la tasa libre de riesgo, N(-d'$_2$) es una función de la tasa de rendimiento esperada de los activos del deudor:

$$-d_2' = -d_2 - \frac{(\mu - r)\sqrt{T}}{\sigma}$$

Entonces, la probabilidad neutral al riesgo puede expresarse como una función de la probabilidad real:

$$p^* = N\left(N^{-1}(p) + \frac{\mu - r}{\sigma}\sqrt{T}\right)$$

Como $\mu \geq r$, se sigue que la probabilidad de default neutral al riesgo es mayor que la probabilidad de default real. De acuerdo con el modelo CAPM para tiempo continuo:

$$\mu - r = \beta\,\pi = \beta\,(\mu_M - r)$$

$$\beta \equiv \frac{Cov(r_A, r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\sigma}{\sigma_M}\,\rho_{A,M}$$

Aquí r_A y r_m son, respectivamente, las tasas continuas de rendimiento del activo de la firma y de la cartera de mercado, σ y σ_M son las volatilidades de dichos rendimientos y $\rho_{A,M}$ es la correlación que los vincula. En este caso, el precio del riesgo en el mercado es $\mu_M - r$; μ_M es la tasa esperada de rendimiento de la cartera de mercado y *r* es la tasa libre de riesgo continua. Sustituyendo:

[25] LANDO DAVID "*Credit Risk Modeling – Theory and Applications*"; pág. 11.

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{\beta\,(\mu_M - r)}{\sigma} = \rho_{A,M}\ \frac{\mu_M - r}{\sigma_M}$$

$$p^* = N\left(N^{-1}(p) + \rho_{A,M}\ \frac{\mu_M - r}{\sigma_M}\sqrt{T}\ \right)$$

La probabilidad de default neutral al riesgo está en la base de la estimación de la EDF neutral al riesgo (estimated default frequency) que emplea el modelo KMV[26]. A diferencia de los modelos que, como CreditMetrics, determinan el valor de los préstamos en el horizonte temporal descontando los flujos posteriores en función de la curva de rendimientos a futuro que corresponde a cada rating crediticio, KMV emplea la metodología de valuación de opciones. Dada una estructura temporal de EDF para cada deudor, calcula el valor presente de los flujos futuros sobre la base de la valuación neutral al riesgo (o enfoque de “martingala”). De acuerdo con este enfoque, el valor actual esperado de los cash flows se calcula sobre la base de las probabilidades neutrales al riesgo en lugar de las probabilidades reales. Asumiendo que se ha derivado la curva cupón 0 del deudor para un plazo t_i:

$$e^{-r_{A,i}\,,t_i} = \left[(1 - LGD) + \left(1 - p_i^*\right) LGD\right] e^{-r_i\,,t_i}$$

$$r_{A,i} - r_i = -\frac{1}{t_i}\ \ln\left(1 - p_i^*\ LGD\right)$$

Donde $r_{A,i}$ es la tasa de interés compuesta continua para el vencimiento *i* que corresponde al deudor y r_i es la tasa de interés compuesta continua libre de riesgo para el vencimiento *i*. El spread, $r_{A,i} - r_i$, para el vencimiento t_i puede obtenerse en forma directa de la información sobre los bonos que emite el deudor.

Valuación a mercado

Los modelos actuariales son simples y fáciles de calibrar ya que se ajustan naturalmente a la contabilidad a valores históricos que se utiliza para registrar los préstamos bancarios. Sin embargo, mucho del riesgo de crédito se pierde, especialmente en los instrumentos a largo plazo con una alta calificación crediticia[27]. Con el concepto de pérdida mark-to-market (MTM), el riesgo de crédito incluye el riesgo de migración hacia abajo (o arriba) en el rating, aun cuando no se produzca el default, si el vencimiento (maturity) del instrumento excede el horizonte de riesgo.

La pérdida es más difícil de definir bajo el enfoque de mark-to-market. Gordy, por ejemplo, sigue la convención que define a la tasa de pérdida U_i del activo *i* como la diferencia entre el valor esperado en el horizonte y el realizado, descontada a la tasa libre de riesgo y dividida por el valor de mercado corriente. Por lo tanto, el riesgo de crédito surge de la incertidumbre acerca de *U*, que depende de un vector de factores de riesgo sistemático *Y*.

[26] Para más detalles, ver CROUHY M., GALAI D. y MARK R. “*Risk Management*”; pág. 368 y 383/4. KMV deriva la EDF o probabilidad de default para cada deudor sobre la base del modelo de Merton, en el cual la probabilidad de default es una función de la estructura de capital de la firma, del valor presente de sus activos y de la volatilidad del rendimiento de dichos activos. La EDF es específica para cada deudor y puede “mapearse” en cualquier sistema de ratings. Las EDFs constituyen un ranking cardinal de los deudores, en tanto que los ratings tradicionales son rankings ordinales.

[27] En Gordy M. En “*A risk-factor model foundation for ratings-based bank capital rules*” da el ejemplo de un préstamo a dos años con rating AA que se degrada a BB al cabo de un año. Como se presume que las pérdidas sólo aparecen cuando ocurre el evento de default, en el ínterin no se reconoce ninguna pérdida. En el esquema de Basilea II, los coeficientes *M* y *b* intentan capturar el efecto de los cambios en el valor de mercado sobre el horizonte temporal.

Por ejemplo, siguiendo nuevamente a Gordy, para un instrumento de cupón cero que vence en el horizonte temporal o después, con un valor corriente A_i conocido y un valor en el horizonte $v_{i,g}$ condicional a que el deudor migre al rating g, la versión estándar de CreditMetrics da un precio en el horizonte equivalente a descontar los cashflows contractuales futuros a los spreads que corresponden a cada grado. Estos spreads se suponen fijos y conocidos. El valor de mercado esperado en el horizonte temporal, condicional a una realización determinada de los factores sistemáticos es:

$$MTM_i(y) = \sum_{g=1}^{G} v_{i,g}(y)\ p_{i,g}(y) + \tilde{A}_i\ \left(1 - E\left[LGD|y\right]\right) p_{i,G+1}(y)$$

Donde $\tilde{A}_i$ es el valor del derecho del banco contra el deudor en caso de default (identificado con el rating G+1). Si T es el plazo hasta el horizonte temporal y r es el rendimiento libre de riesgo para el plazo T, las funciones $\mu_i(y)$ de pérdida esperada condicionales están dadas por:

$$\mu_i(y) = \frac{e^{-rT}}{A_i}\left(\mathrm{E}\ \left[MTM_i(Y)\right] - MTM_i(y)\right)$$

Modelos de riesgo

CreditMetrics (enfoque sobre la base de la migración de los créditos):

Este modelo fue desarrollado por J.P.Morgan. Como se mencionó, se basa en el análisis de la migración de los créditos, esto es, la probabilidad de pasar de una calidad crediticia a otra, incluido el default, dentro de un horizonte de tiempo determinado, que en general es de un año. La medición del riesgo de crédito se hace sobre la base de los spreads de las tasas de interés que pagan los deudores.

La tasa de interés puede variar tanto porque se modifican las condiciones de equilibrio en el mercado de capitales (en cuyo caso los spreads se modifican para todos los ratings crediticios) como porque cambia la calidad crediticia del deudor. CreditMetics modela la distribución a futuro de los valores de un crédito sólo sobre la base de la migración crediticia, ya que asume que las tasas de interés evolucionan de un modo determinístico[28].

El esquema de CreditMetrics se divide en dos etapas: 1) el cálculo del VaR del instrumento financiero individual o “Value at Risk Due to Credit”; 2) el cálculo del VaR de la cartera, influido por el proceso de diversificación o “Porfolio Value at Risk Due to Credit”.

En la primera etapa se especifican el sistema de ratings y las probabilidades de migrar de una calidad crediticia a otra en el horizonte de riesgo. La principal desventaja del modelo radica en que las probabilidades de transición se basan en promedios históricos de probabilidades de default y de migración. En consecuencia, no sólo asume que las tasas de default y de migración presentes son iguales a las históricas sino que se da por hecho que a las firmas con un mismo rating les corresponde una única curva de spread, aun cuando sus tasas de default y de recupero sean diferentes.

Para calcular la distribución de los cambios en el valor de un instrumento financiero en el horizonte temporal debido a posibles variaciones en la calidad crediticia del deudor, el título debe valuarse sobre la base de la curva de descuento "cupón cero" que corresponde a cada rating crediticio[29]. Puesto que el modelo trabaja con siete categorías de crédito, se necesitan siete curvas de spread para valuar un título en cada uno de los siete estados posibles. En caso de default, el valor del instrumento se estima en términos de tasa de recupero[30].

Para la segunda etapa es necesario contar con un modelo de correlación entre los activos de los deudores. Como ni la probabilidad de default ni las probabilidades de migrar son estacionarias, se necesita un modelo estructural que relacione los cambios de las probabilidades a variables fundamentales. Habida cuenta de que los valores de los activos de las empresas y sus correlaciones no son observables, CreditMetrics recurre al precio de la acción como una aproximación. Aunque supone un alto grado de simplificación de la estructura de capital de los deudores[31], la correlación de los retornos de las acciones permite inferir la correlación de los activos de los deudores y, en consecuencia, la correlación de los cambios en sus calidades crediticias.

Efectuar cálculos a partir de la correlación de las probabilidades de default implica establecer una matriz de correlación para una cartera de miles de deudores. Para reducir la dimensión de la matriz a los efectos del cálculo, CreditMetrics usa el "análisis multifactor", que asocia cada deudor a los países e industrias que son más significativos para su desempeño. El usuario debe especificar para cada deudor los ponderadores de país e industria y el riesgo específico, que no se correlaciona con ningún otro deudor o índice.

Conocida la correlación entre las tasas de retorno de los activos de los deudores, el modelo genera, mediante una simulación de Monte Carlo, la distribución de los valores de la cartera en el horizonte temporal.

KMV (enfoque estructural):

A diferencia de CreditMetrics, que emplea frecuencias de transición promedio históricas, el modelo de KMV se basa en la frecuencia de default esperada de cada emisor de deuda (EDF o "expected default frequency"). Cada emisor es específico, con una estructura de capital propia y, por lo tanto, tiene una probabilidad de default individual.

Para estimar la probabilidad de default es preciso conocer el valor de mercado de los activos de la firma y su volatilidad; pero ni uno ni otro pueden observarse de manera directa[32]. Como alternativa, KMV recurre al modelo de valuación de opciones de Merton. Como se mencionó, según este modelo los acreedores han lanzado un put sobre los activos de la firma y los accionistas son titulares de un call:

$$S_t = C^{BS}\left(A_t, B, T-t, \sigma_A, r\right)$$

[28] Los modelos desarrollados hasta el presente (CreditMetrics, KMV y CreditRisk+) derivan los valores y exposiciones a futuro a partir de curvas a futuro determinísticas.
[29] La tasa se aplica a los cash flows entre el horizonte temporal y el vencimiento del título.
[30] En este esquema, el default se considera un "estado absorbente", por lo que una vez que el deudor incurre en default permanece para siempre en ese estado.
[31] Emplear el rendimiento de la acción como equivalente del rendimiento de los activos implica suponer que la empresa se financia exclusivamente con capital propio. Este enfoque perjudica a las empresas con alto endeudamiento, ya que el retorno de la acción de estas empresas es más volátil que el retorno de sus activos.
[32] Si todos los pasivos de la firma tuvieran cotización, el valor de mercado de los activos sería la suma del valor de mercado de los pasivos y del patrimonio neto; y la volatilidad del rendimiento se derivaría del valor reconstituido de dichos activos. En la práctica, sólo existen cotizaciones para las acciones y algunos títulos de deuda.

Por el lema de Itô, $\mathrm{d}S_t = (\cdots)\,\mathrm{d}t + C'(A_t, \sigma_A)\,\sigma_A\, A_t\, \mathrm{d}W_t$, entonces la volatilidad es:

$$\sigma_s(t) = C'(A_t, \sigma_A)\sigma_A \frac{A_t}{S_t}$$

Como el valor de la acción y su volatilidad son observables, tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas, A_t y σ_A, que pueden determinarse resolviendo las ecuaciones en forma numérica. Como en este modelo $\sigma_s(t)$ no es un parámetro sino un proceso en sí mismo, cuando la firma tiene poca deuda –es decir A_t/S_t es pequeño y $C'(A_t)$ tiende a uno- puede ser estimado mediante la siguiente aproximación:

$$\sigma_s(t) = \sigma_A \frac{A_t}{S_t}$$

De acuerdo con KMV, las empresas incurren en default cuando el valor de sus activos se acerca a determinada distancia del total de los pasivos. En el modelo, la distancia hasta el default (DD) es la distancia entre el valor esperado de los activos a un año ($E(A_1)$) y el punto de default (DPT)[33], expresada en términos del desvío estándar del rendimiento de los activos:

$$DD = \frac{E(A_1) - DPT}{\sigma}$$

La DD se "mapea" en las probabilidades reales de default para un horizonte temporal y, mediante este proceso, se calcula la proporción de empresas dentro de cada ranking de DD que efectivamente incurrieron en default dentro del horizonte temporal. El resultado es la "expected default frequency" o EDF. Según menciona Crouhy[34], las EDFs de KMV han demostrado ser un indicador del default y de la calidad crediticia que anticipa al menos en un año la degradación del rating de las empresas clasificadas por Moody's y Standard & Poor's.

La importancia de trabajar con una frecuencia de default esperada individual para cada deudor fue puesta de manifiesto por KMV mediante un ejercicio de simulación. Debido a que la distribución de las tasas de default es muy asimétrica, en general la tasa promedio (o media) excede a la tasa típica (o mediana) de cada categoría de crédito. En consecuencia, la probabilidad de default histórica sobreestima la tasa de default del deudor típico. Esta característica puede producir un fenómeno de selección adversa: si el precio de los préstamos se basa en la tasa de default histórica, se castiga al deudor típico y se beneficia a los peores deudores de cada clase.

La fórmula de Vasicek, que se desarrolla de forma detallada en el capítulo IV, constituye la base de la versión más simple del modelo KMV, en la que la probabilidad condicional de default depende de un único factor de riesgo. Por ese motivo, no vale la pena extender la descripción en el presente, pero sí mencionar que en el modelo se asume que el valor de mercado de los activos tiene una distribución lognormal y que, en consecuencia, la distribución del rendimiento es normal con una volatilidad constante a través del tiempo. La tasa de pérdida y la probabilidad de default se determinan en forma endógena (dependen del valor de los activos de la firma, de su volatilidad y de la tasa libre de riesgo). Sobre la base del modelo de Merton, el valor económico del default se presenta como un put sobre el valor de los activos de la firma: los accionistas de la empresa

[33] El punto de default, que es igual a los pasivos a corto plazo más la mitad de los pasivos a largo plazo, representa el servicio de los pasivos que deben atenderse dentro del horizonte temporal.
[34] CROUHY M., GALAI D. y MARK R. "*Risk Management*"; pág. 376.

deudora tienen responsabilidad limitada y en caso de default se liberan entregando los activos de la firma a los acreedores. Por ello, los pasivos constituyen un derecho contingente (contingent claim) que depende del valor de los activos de la firma. El default se produce al vencimiento de la obligación si los activos valen menos que la deuda.

El modelo de KMV no carece de críticas. Jorge Soberhart y Sean Keenan han cuestionado seriamente la capacidad predictiva de este enfoque. Sobre la base de la metodología de los “accuracy ratios” (ARs)[35] muestran que los modelos híbridos predicen mejor los eventos de default. Estos modelos mixtos combinan el modelo de Merton con la información que proveen los indicadores financieros y los ratings de las agencias calificadoras y también producen probabilidades de default estimadas a un año de plazo, conocidas como “expected default probability” o EDP.

Detallar el trabajo de Soberhart y Keenan resultaría excesivo, pero es imprescindible mencionar algunos de los comentarios que hacen sobre la aplicación irrestricta de los supuestos de valuación neutral al riesgo y de no arbitraje para determinar el precio de instrumentos con poca liquidez o sin mercado: “De un modo general, la mayor parte de los activos y pasivos de las instituciones no tienen las características idealizadas de los títulos con mercado para los cuales se desarrollaron muchos de estos modelos. Otra cuestión fundamental es la especificación errónea de los modelos que se origina en supuestos simplificadores tales como la variación lognormal de los activos de las empresas, tasas de interés y volatilidades constantes y estructuras de deuda simples. De tal modo, los modelos de default, basados en estrictos supuestos de eficiencia de los mercados, liquidez perfecta y ausencia de oportunidades de arbitraje y en supuestos simplificadores adoptados por conveniencia analítica, pierden terreno una vez que se comienza a modelar seriamente la formación de precios en el mundo real... Ningún modelo es perfecto y, en la práctica, la información es escasa, no confiable o inexistente. Por ello, los modelos de riesgo de crédito dependen de la subjetividad y la incertidumbre, tanto para determinar cuáles son las variables financieras relevantes como para determinar la relación entre ellas”.

Una alternativa al enfoque contingent claim de KMV, el “reduced-form approach”, permite que la bancarrota se produzca en un momento aleatorio, cuando los activos de la firma caen por primera vez por debajo de un límite predeterminado.

CreditRisk+ (enfoque actuarial):

Este modelo, de Credit Suisse Financial Products, tiene base actuarial. Sólo toma en consideración el default. No considera el *downgrade risk* (o migración entre calidades crediticias). El proceso de default y el recupero son exógenos. Las probabilidades de default se basan en los datos históricos de cada clase de crédito. La distribución de pérdidas se basa en las características de los préstamos y en la correlación de las probabilidades de default entre pares de deudores. A continuación se transcriben los aspectos más salientes de la determinación del número de defaults de una cartera y del valor de la pérdida, extraídos de la descripción muy detallada del modelo que se hace en un trabajo de Bluhm[36]. Aun con esta presentación esquemática, es fácil

[35] SOBERHART J. y KEENAN S.; “*The Need for Hybrid Models*”. Los ARs son estadísticos que miden el desempeño de los modelos.
[36] BLUHM C., OVERBECK L. y WAGNER C. “*An Introduction to Credit Risk Modeling*”.

advertir la correspondencia con los modelos actuariales que se usan para determinar la distribución de la intensidad de los siniestros de ciertas ramas de los seguros generales[37].

Si la distribución de probabilidades del número de defaults en un período dado sigue una distribución de Poisson, se asume que: 1) la probabilidad de default de un préstamo para un período dado, por ejemplo un año, es igual que en cualquier otro año; 2) para un número grande de deudores, la probabilidad de default de un deudor particular es pequeña y 3) el número de defaults que ocurre en un período determinado es independiente del número de defaults ocurridos en cualquier otro período. En tal caso:

$$\mathrm{P}[\mathrm{L_i} = \mathrm{n}] = \frac{\lambda_i^n e^{-\lambda_i}}{n!} \qquad \text{Para } n = 0, 1, 2, ...$$

Donde λ_i es el número de defaults en promedio anual. Con una distribución de Poisson, el número de defaults es una variable aleatoria con media λ y desvío estándar $\lambda^{1/2}$. Pero, para adaptar la probabilidad de default al ciclo económico, el modelo CreditRisk+ supone que el promedio del número de defaults es también estocástico, con media λ y desvío estándar σ_λ. Con este supuesto la distribución se vuelve más asimétrica y cada deudor *i* tiene una intensidad aleatoria de default Λ_i, con media $E[\Lambda_i]= \lambda_i$. La media del número de defaults puede calibrarse a la probabilidad anual de default:

$$p_i = \mathrm{P}[L_i \geq 1] = 1 - e^{-\lambda_i} \approx \lambda_i$$

Debe notarse que si bien con esta definición p_i de probabilidad anual de default se admite más de un default por año para el deudor *i*, la probabilidad de que el evento ocurra más de una vez es muy pequeña para los valores que se manejan[38]:

$$\mathrm{P}[L_i \geq 2] = 1 - e^{-\lambda_i}(1 + \lambda_i)$$

La influencia de los factores económicos se modela mediante m_S sectores (industrias, países, regiones o ratings crediticios) que se representan por variables de intensidad, con distribución gamma: $\Lambda^{(s)} \sim \Gamma(\alpha_s, \beta_s)$, que se asumen independientes. Los sectores inciden en la solvencia de los *m* deudores de la cartera y su influencia se regula mediante "factores de ponderación" $w_{is} \geq 0$, de modo que:

$$\sum_{s=1}^{m_S} w_{is} = 1$$

Es evidente, y Bluhm lo destaca, que el desafío crucial de este enfoque es la calibración del riesgo de los sectores y de sus ponderadores. El riesgo de cada sector *s* se captura mediante dos parámetros: la intensidad media de default $\lambda_{(s)}$ y la volatilidad de la intensidad de default $\sigma_{(s)}$:

$$\lambda_{(s)} = \mathrm{E}[\Lambda^{(s)}] = \alpha_s \beta_s \qquad \sigma_{[s]}^2 = \mathrm{V}[\Lambda^{(s)}] = \alpha_s \beta_s^2$$

La parametrización por sectores de la intensidad aleatoria de default del deudor *i* resulta de:

---

[37] DAYKIN C, PENTIKAINEN T. Y PESONEN M. "*Aplicaciones prácticas de la Teoría del Riesgo para Actuarios*". Los conceptos de los capítulos 2 y 3 son similares a los que emplea CredirRisk+.

[38] BLUHM C., OVERBECK L. y WAGNER C. "*An Introduction to Credit Risk Modeling*"; pág. 62: Para un λ_i=0,01, la probabilidad de más de un default es de 0,00005; es decir, la probabilidad de un escenario no aplicable es de uno entre 20.000.

$$\Lambda_i = \sum_{s=1}^{m_S} w_{is}\ \lambda_i \frac{\Lambda^{(s)}}{\lambda_{(s)}}$$

Esto significa, además, que dos deudores estarán correlacionados si existe al menos un sector para el cual ambos tengan un ponderador positivo. La probabilidad de default condicional se obtiene a partir de la intensidad de default condicional del deudor *i*, que resulta de las realizaciones $\theta_1,..., \theta_m$ de las intensidades de default $\Lambda^{(1)}$, ..., $\Lambda^{(m)}$, de cada sector involucrado:

$$p_i(\theta_1,\ldots,\theta_m) = \mathrm{P}\left[L_i \geq 1 \middle| \Lambda^{(1)} = \theta_1,\ldots,\Lambda^{(m)} = \theta_m\right] = 1 - \exp\left(-\lambda_i \sum_{s=1}^{m_S} w_{is} \frac{\theta_s}{\lambda_{(s)}}\right)$$

Para reducir el esfuerzo del cálculo, las exposiciones de los deudores (netas del ajuste por recupero) se dividen en m_E bandas *j* y el nivel de exposición de cada banda se aproxima mediante un número $v_{[j]}$. Cada banda se trata como una cartera independiente. El número de defaults esperados y la pérdida esperada de la banda [j] son:

$$\lambda_{[j]} = \sum_{i\in[j]} \lambda_i \qquad\qquad \varepsilon_{[j]} = \lambda_{[j]} v_{[j]}$$

Si las probabilidades de default de los deudores fueran independientes, la intensidad de default λ_i no sería aleatoria, el número *L* de defaults de la cartera seguiría una distribución de Poisson con parámetro λ_C, y las funciones generatrices del número *L* de defaults, de la variable aleatoria N que toma los valores $\{v_{[1]}, ..., v_{[mE]}\}$[39] y de pérdida de la cartera $\overline{L}$ serían:

$$\lambda_C = \sum_{j=1}^{m_E} \lambda_{[j]} \qquad\qquad G_L(z) = e^{\lambda_C\ (z-1)} \qquad\qquad G_N(z) = \sum_{j=1}^{m_E} \frac{\lambda_{[j]}}{\lambda_C} z^{v_{[J]}}$$

$$G_{\overline{L}}(z) = \prod_{j=1}^{m_E} \sum_{k=0}^{\infty} P\left[L_{[j]} = k\right] z^{v_{[J]}k} = \prod_{j=1}^{m_E} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_{[j]}} \frac{\lambda_{(j)}^{k}}{k!} z^{v_{[J]}k}$$

$$= \prod_{j=1}^{m_E} e^{-\lambda_{[j]} + \lambda_{[j]} z^{v_{[J]}}} = G_L \circ G_N(z) = e^{\lambda_C\ (G_N(z)-1)}$$

Como los deudores no son independientes, CreditRisk+ recurre a la distribución de Poisson mixta del número de defaults en cada sector *s*. La intensidad aleatoria $\Lambda^{(s)}$ puede calibrarse a partir de los valores conocidos de $\lambda_{(s)}$ y $\sigma_{(s)}$[40]. Condicional a $\Lambda^{(s)} = \theta_s$, la función generatriz condicional es la función generatriz de la distribución de Poisson:

$$G_{L_s | \Lambda^{(s)} = \theta_s}(z) = e^{\theta_s\ (z-1)}$$

---

[39] $P\left[N = v_{[j]}\right] = \frac{\lambda_{[j]}}{\lambda_C}$

[40] BLUHM C., OVERBECK L. y WAGNER C. "*An Introduction to Credit Risk Modeling*". En Pág. 160 se hace notar que a menudo $\lambda_{(s)}$ y $\sigma_{(s)}$ se calibran a partir de los datos de los deudores: $\lambda_{(S)} = \Sigma\ w_{is}\ \lambda_{(i)}$ y $\sigma_{(s)}$ puede obtenerse a partir de información empírica sobre la media del sector o puede calcularse a partir de las volatilidades de las intensidades de default individuales.

Pero la distribución incondicional es una distribución mixta gamma-Poisson. Por lo tanto, la distribución incondicional de los defaults sigue una distribución binomial negativa con parámetros α_s y $1/(1+\beta_s)$. Para el sector *s*, la función generatriz incondicional (en la que la función de densidad de $\Gamma(\alpha_s,\beta_s)$ se representa por $\gamma_{\alpha,\beta}$) es:

$$G_{L_s}(z)=\int_0^{\infty}\left[G_{L_s|\Lambda^{(s)}=\theta_s}\right](z)\,\gamma_{\alpha,\beta}(\theta_s)\,\mathrm{d}\theta_s=\left(\frac{1-\dfrac{\beta_s}{1+\beta_s}}{1-\dfrac{\beta_s}{1+\beta_s}z}\right)^{\alpha_s}$$

Sobre la base del supuesto de la independencia de las variables $\Lambda^{(1)}, \ldots, \Lambda^{(m)}$; la distribución de los defaults de la cartera es la convolución de las distribuciones binomiales negativas de los sectores, de tal modo que la función generatriz del número de defaults de la cartera puede expresarse mediante una fórmula cerrada:

$$G_L(z)=\prod_{s=1}^{m_S}\left(\frac{1-\dfrac{\beta_s}{1+\beta_s}}{1-\dfrac{\beta_s}{1+\beta_s}z}\right)^{\alpha_s}$$

En el texto de Bluhm se destaca que esta forma cerrada es la razón por la cual CreditRisk+ es un modelo ampliamente aceptado[41]. La posibilidad de usar funciones generatrices de probabilidad no sólo permite una descripción analítica de los defaults de la cartera aunque en el modelo se emplee más de un sector, sino que además facilita el cálculo de la distribución de la pérdida. La variable aleatoria N_s (independiente del número de defaults) representa a la banda *j* afectada por los defaults. Su función generatriz es:

$$G_{N_s}(z)=\sum_{j=1}^{m_E}\left(\frac{1}{\lambda_{(s)}}\sum_{i\in[j]}w_{is}\lambda_i\right)z^{v_{[j]}}$$

La función generatriz de la pérdida de la cartera $\bar{L}$ es la convolución de las distribuciones compuestas de los sectores[42]:

$$G_{\bar{L}}(z)=\prod_{s=1}^{m}\left(\frac{1-\dfrac{\beta_s}{1+\beta_s}}{1-\dfrac{\beta_s}{1+\beta_s}\dfrac{1}{\lambda_{(s)}}\displaystyle\sum_{j=1}^{m_E}\left(\sum_{i\in[j]}w_{is}\lambda_i\right)z^{v_{[j]}}}\right)^{\alpha_s}$$

Enfoques "reduced form" o "intensity based"

A diferencia de los modelos estructurales, en este enfoque el default se modela como un proceso de Poisson exógeno, totalmente independiente de la estructura de capital de la firma y del valor de sus activos. El default es un hecho sorpresivo, impredecible, que no se relaciona con la solvencia del deudor. El evento de default individual ocurre cuando un proceso de intensidad excede un umbral que es una variable aleatoria. En palabras

[41] BLUHM C., OVERBECK L. y WAGNER C. "*An Introduction to Credit Risk Modeling*"; pág. 149.

de David Lando[43], estos modelos surgen como respuesta al hecho de que ni el valor de los activos ni la distancia hasta el default pueden observarse realmente. Estos modelos, que permiten trabajar con tasas de interés estocásticas, aplican el enfoque HJM[44] de estructura temporal de las tasas de interés para la valuación de los derivados de crédito, bajo el supuesto de la inexistencia de oportunidades de arbitraje. Es decir, permiten estimar la estructura temporal de las probabilidades de default a partir de los spreads de crédito que, a diferencia del valor de los activos, son observables.

Si seguimos a Hughston y Turnbull[45], el enfoque "reduced-form" para modelar el riesgo de crédito fue introducido por Jarrow y Turnbull en sendos trabajos de 1992 y 1995. Este enfoque toma como input la estructura temporal de las tasas de interés que corresponde a cada clase de crédito. A partir de la estructura temporal de los spreads de cada clase de crédito, los autores infieren la pérdida esperada para el intervalo (t,t+Δt) bajo la medida neutral al riesgo. La pérdida esperada es el producto de la probabilidad condicional de default bajo la medida neutral al riesgo y la tasa de pérdida (igual a uno menos la tasa de recupero).

Para entender el funcionamiento de estos modelos, se debe explicar el concepto de tasa de riesgo *h*(t)[46] y su relación con el concepto de probabilidad condicional de default. Si τ es una variable aleatoria positiva, que representa el momento de default y que tiene una función de densidad continua *f*, *F* es la función de distribución de la variable τ y *S* es la función de supervivencia:

$$\Pr ob(\tau \leq t) = F(t) = 1 - S(t) = \int_0^t f(s)\, ds$$

La tasa de riesgo *h* es la probabilidad instantánea de default en el momento *t*, condicional a haber sobrevivido hasta dicho momento *t*. La probabilidad de sobrevivir al horizonte *t* es la función de supervivencia:

$$h(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{S'(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt}\log S(t) \qquad S(t) = \Pr ob(\tau > t) = \exp\left(-\int_0^t h(s)\, ds\right)$$

Entonces, la probabilidad de default en un intervalo pequeño (t,t+Δt), condicional a que el default no haya ocurrido hasta el momento *t*, es aproximadamente:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Pr ob\left(\tau \leq t + \Delta t \middle| \tau \geq t\right) = h\,(t)\,\Delta t$$

La probabilidad de default condicional *h*(*t*) sólo depende del paso del tiempo. En los modelos reales se tienen en cuenta factores adicionales. Si la empresa sobrevive hasta *t*, en ese momento se tiene acceso a información que no se conocía en el momento 0 y, entonces, el default se condiciona a la última información disponible. En la

---

[42] En las que intervienen las dos variables: el número de defaults de cada sector (con distribución binomial negativa) y las exposiciones afectadas por dichos defaults.
[43] LANDO DAVID "*Credit Risk Modeling – Theory and Applications*"; pág. 111.
[44] Enfoque desarrollado por HEATH D.; JARROW R. Y MORTON A. en "*Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology*"; Econometrica; 1992. Se puede acceder a una introducción en el capítulo 17 de HULL J.; "*Options, Futures and Other Derivatives*".
[45] HUGHSTON L. y TURNBULL S. "*Credit Derivatives Made Simple*".
[46] Hazard rate.

siguiente expresión, F_t contiene la información hasta el momento *t* y λ, que es un proceso de default continuo y no-negativo, se adapta o es predecible en función del filtro F [47].

$$\Pr ob(\tau \le t + \Delta t | F_t) \cong 1_{\{\tau > t\}} \lambda\ (t)\, \Delta t$$

La anterior es una expresión que carece de precisión y, por lo tanto, no es operativa para el cómputo. Una alternativa es apelar a lo que se conoce como "Procesos de Cox" o "Procesos de Poisson doblemente estocásticos". Estos procesos permiten obtener una intensidad del default λ aleatoria, gobernada por variables de estado exógenas representadas en un vector X_t. Los procesos de Cox, condicionales a las variables de estado, se comportan como procesos de Poisson[48]. Las variables de estado pueden ser, por ejemplo, variables económicas, la tasa libre de riesgo, las monedas y los índices del mercado de valores. Siguiendo nuevamente a Hughston y Turnbull, la intensidad como proceso aleatorio puede representarse como dependiente hasta el momento *t* de la historia de un movimiento browniano multidimensional. Esta situación es típica en el caso del análisis de los derivados de crédito, en los que el movimiento browniano multidimensional también influye en la estructura temporal de los bonos libres de riesgo, bajo el esquema estándar para la tasa de interés de Heath-Jarrow-Morton.

Siguiendo a Lando, se asume entonces la existencia de un espacio de probabilidad (Ω,*F*,Q), en el que Q es una medida neutral al riesgo (o martingala) en el marco de una economía libre de arbitrajes. Todos los títulos se valúan como el valor esperado descontado de acuerdo con esta medida. En el espacio de probabilidades se define un proceso X de variables de estado con valores en R^d. Se definen $\lambda : R^d \rightarrow R$ como una función no negativa y un proceso jump N_t. En este proceso, en el cual $\lambda(X_t)$ es la intensidad, interesa sólo el primer momento jump τ. Por otra parte, $(G_t)_{t\ge 0}$ es el filtro generado por X, por ejemplo $G_t=\sigma\{X_s;0\le s\le t\}$[49] y F_t contiene la información de *X* y del proceso jump, es decir $F_t = G_t \vee H_t$, donde $H_t = \sigma\{N_s;0\le s\le t\}$[50]. Entonces, la probabilidad de supervivencia hasta el momento *T*, condicional a haber sobrevivido hasta el momento *t*, es una variable aleatoria que depende de la información contenida en F_t. El umbral θ_1 es una variable aleatoria exponencial, con media 1, independiente de $(G_t)_{t\ge 0}$. Se define el momento de default τ:

$$\tau = \inf\left\{ t : \int_0^t \lambda\ (X_S)\, ds\ \ \ge \theta_1 \right\}$$

Si se asume que existe un proceso $r(X_s)$ para la tasa de corto, de acuerdo con el cual un bono libre de riesgo cupón 0 con vencimiento en *T* tiene los siguientes valores en los momentos 0 y t:

$$p(0,T) = \mathrm{E}\left[\exp\left(-\int_0^T r(X_s)\, ds \right) \right] \qquad p(t,T) = \mathrm{E}\left[\exp\left(-\int_t^T r(X_s)\, ds \middle| F_t \right) \right]$$

---

[47] En BLUHM C., OVERBECK L. y WAGNER C. "*An Introduction to Credit Risk Modeling*" se menciona que condicional a la realización $\lambda(t)_{t\ge 0}$ del proceso estocástico, los momentos de default de los deudores son procesos de arribo de Poisson independientes con intensidades λ(t). Desde este punto de vista, los modelos de intensidad pueden considerarse una extensión del enfoque CreditRisk^+ al tiempo continuo mientras que, en los otros modelos, el default se modela como un evento binario en el horizonte temporal (pág. 82). El autor hace notar que algunos autores distinguen entre la intensidad λ(t) y la tasa de default a futuro *h*(*t*). La primera es la tasa de arribo del default en *t*, condicional a toda la información disponible en *t*. La segunda es la tasa de arribo del default en *t*, condicional sólo a la supervivencia hasta el momento *t* (Pág. 185).

[48] En el proceso de Cox $\lambda(t) = \lambda(X_t)$. Condicional a X_t, el proceso conserva las propiedades del proceso de Poisson.

[49] G_t es el filtro asociado con los eventos de los que depende la trayectoria de λ hasta el momento t. En el caso de la dependencia de un movimiento browniano, G_t contiene la información de la historia del movimiento hasta el momento t.

[50] H_t contiene la información acerca de si al momento *t* el default ya se ha producido.

Entonces, si se asume un recupero nulo, los precios de un bono con riesgo en los momentos 0 y *t* son:

$$B(0,T)=\mathrm{E}\left[\exp\left(-\int_{0}^{T}(r+\lambda)(X_s)\,ds\right)\right] \qquad B(t,T)=1_{\{\tau>t\}}\mathrm{E}\left[\exp\left(-\int_{t}^{T}(r+\lambda)(X_s)\,ds \middle| \mathbf{G}_t\right)\right]$$

Es decir que para valuar un bono defaulteable, sólo se necesita conocer las variables de estado y que el default todavía no ha ocurrido. A diferencia de la probabilidad de supervivencia que es una función de *t*, el valor del bono (defaulteable o no) es un promedio ponderado por los posibles caminos o trayectorias del movimiento browniano. Según menciona Lando, cuando X es un proceso de difusión, en algunos casos se pueden obtener soluciones cerradas para estas expresiones o las esperanzas pueden hallarse como solución a una ecuación parcial diferencial que se puede resolver en forma numérica.

Existen variaciones del enfoque. Por ejemplo, Duffie y Singleton[51] asumen que en caso de default el valor del bono es proporcional al valor que tenía inmediatamente antes del default. Entonces, si aún no ocurrió el default, el precio de un bono defaulteable que tiene un recupero parcial δ de su valor de mercado al momento de default τ, es[52]:

$$B(t,T)=\mathrm{E}_t\left[\exp\left(-\int_{t}^{T}(r+(1-\delta)\lambda)(X_s)\,ds\right)\right]$$

El análisis puede generalizarse para el caso de múltiples deudores. En el proceso de Cox el momento de default de un deudor *i* es:

$$\tau_i=\inf\left\{t:\int_0^t\lambda^i(X_s)\,ds\geq\theta^i\right\}$$

Donde las variables θ^i son mutuamente independientes, además de ser independientes de (G_t). Las distribuciones independientes pueden reemplazarse por distribuciones exponenciales multivariadas para permitir saltos simultáneos o se pueden emplear variables aleatorias uniformes U_i, cuya dependencia puede establecerse mediante funciones cópula:

$$\tau_i=\inf\left\{t:\exp\int_0^t\lambda^i(X_s)\,ds\geq U_i\right\}$$

Cualquiera sea el caso, puede observarse que la tasa de corto libre de riesgo se reemplaza por la tasa de corto ajustada por la intensidad del default, vinculada al proceso jump. Puesto que la tasa de riesgo se suma a la tasa de interés libre de riesgo para obtener el precio del bono defaulteable, puede identificarse a λ con el spread que corresponde al deudor. Como ya se mencionó, un crédito "defaulteable" puede valuarse como un crédito libre de riesgo, si su valor presente se calcula en función de una tasa *y* de descuento ajustada por default, en lugar de emplear la tasa libre de riesgo:

$$\frac{B}{1+y}=\frac{B}{1+r}\left((1-\lambda)+(1-LGD)\lambda\right)$$

---

[51] DUFFIE D. y SINGLETON K. "*Modeling term structures of defaultable bonds*".

[52] El operador E_t es la esperanza condicional, bajo la medida neutral al riesgo, dada toda la información disponible en el momento *t*.

$$y = \frac{r + \lambda \ \ LGD}{((1-\lambda) + (1-LGD)\lambda)}$$

De lo que resulta que la tasa ajustada por default compuesta continua es:

$$y = r + \lambda \ \ LGD$$

En esta expresión, que corresponde al esquema de Duffie y Singleton, λ*LGD es la tasa de pérdida esperada neutral al riesgo. Puede ser interpretada como el "*yield spread*" o margen necesario sobre la tasa libre de riesgo para compensar al inversor por el riesgo de default. Debe notarse que para implementar un enfoque reduced-form es preciso estimar λ y la LGD pero, como no es fácil discriminarlas, en general se asume una LGD dada y constante. Sobre este punto Lando[53] menciona que aunque lo ideal es estimar la intensidad del default y las tasas de recupero a partir de una historia extensa de defaults y de recuperos de bonos, el escaso número de defaults observados crea muchos problemas prácticos. Si se fuera a incluir predictores relevantes del default, como una verdadera extensión del credit scoring, se debería contar con ratios de ocurrencia / exposición para una tabla de gran dimensión. Además, cuando se trabaja con tasas de interés relacionadas con créditos no es claro cómo estimar los spread a partir de los defaults reales. Esto conduce a especificar la intensidad del default como una variable latente observable a través de una función precio. Finalmente, la intensidad del default es un proceso continuo en el tiempo, pero los precios sólo se observan en puntos de tiempo discretos.

CAPÍTULO III

CÓPULAS Y ESTRUCTURAS DE DEPENDENCIA

Las cópulas son funciones que unen funciones de distribución multivariadas a sus funciones marginales de distribución unidimensionales. Alternativamente, se las define como funciones de distribución multivariadas cuyos márgenes unidimensionales son uniformes en el intervalo (0,1).

El estudio de las cópulas y sus aplicaciones en estadística son muy recientes. Según refiere Nelsen[54] la palabra cópula fue empleada por primera vez con un sentido matemático o estadístico por Abe Sklar (1959) en el teorema que hoy lleva su nombre, para describir a las funciones que "juntan" funciones de distribución unidimensionales para formar funciones de distribución multivariadas. Las funciones cópula son una herramienta para construir distribuciones multivariadas y para investigar las estructuras de dependencia entre variables aleatorias.

Una de las cuestiones principales en la administración de riesgos es la suma de los riesgos individuales. Este problema puede evitarse si se asume que las variables aleatorias que modelan los riesgos son independientes. En cambio, la situación es más compleja si se quiere modelar variables aleatorias dependientes o si no se conoce cuál es la distribución conjunta. Una solución clásica es asumir un comportamiento gaussiano de los

[53] LANDO DAVID "*Credit Risk Modeling – Theory and Applications*"; pág. 139.

[54] NELSEN Roger; "*An introduction to Copulas*"; pág. 2.

vectores de riesgo (con una matriz de covarianzas dada). Sin embargo, no todos los riesgos pueden describirse con esta distribución.

Las funciones cópula permiten describir riesgos dependientes. La cópula es la distribución conjunta de un vector de variables aleatorias uniformes. Por lo tanto, permite separar las distribuciones marginales de la fórmula de dependencia representada por la cópula. Sin embargo, las cópulas no dan la clave acerca de cómo elegir la dependencia. Muchas veces se carece de información sobre el tipo de dependencia que vincula a las variables. Y en muchos casos (en las palabras de Jouanin, Riboulet y Roncalli[55]) la cópula -cuando no se elige de un modo totalmente arbitrario- se elige sólo en función de razones de conveniencia (por ejemplo, cuando son fáciles de simular mediante una metodología de Monte Carlo).

Definición de cópula

Una función cópula es una función de distribución multivariada tal que sus distribuciones marginales tienen una distribución uniforme estándar. Si nos restringimos al caso bivariado, podemos interpretar a la función cópula como la función de probabilidad acumulada de dos variables aleatorias uniformes (*u,v*). Una función $C:[0,1]^2 \to [0,1]$ es una cópula si:

1) *C* es creciente, en el sentido que se define más adelante para *H*. O sea que para $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ y $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$

$$C(u_2,v_2)-C(u_2,v_1)-C(u_1,v_2)+C(u_1,v_1) \geq 0$$

2) Para todo $u,v \in [0,1]$ C satisface:

$$C(u,1)=u \quad \text{y} \quad C(1,v)=v$$

$$C(u,0)=0=C(0,\mathrm{v})$$

Sea *C* una cópula y *a* un número cualquiera en [0,1]. La sección horizontal de *C* en *a* es la función dada por $t \to C(t,a)$; la sección vertical de *C* en *a* es la función dada por $t \to C(a,t)$; y la sección diagonal de *C* es la función δ_C definida por $\delta_C(t) = C(t,t)$. Las secciones horizontal, vertical y diagonal de una cópula *C* son todas no-decrecientes y uniformemente continuas en [0,1].

<u>Teorema</u>: Sea *C* una cópula. Entonces para cada (*u,v*) en Dom *C*:

$$\max(u+v-1,0) \leq C(u,v) \leq \min(u,v)$$

$$W(u,v) \leq C(u,v) \leq M(u,v)$$

[55] JOUANIN J., RIBOULET G. Y RONCALLI T.; "*Financial Applictions of Copula Functions*", pág. 2.

Los límites $M(u,v)$=min(u,v) y $W(u,v)$=max$(u+v-1,0)$ son cópulas en sí mismos y se conocen como los límites Fréchet-Hoeffding. M es el límite Fréchet-Hoeffding superior y W es el límite Fréchet-Hoeffding inferior. Una tercera cópula importante es la cópula producto $\Pi(u,v)=uv$.

Funciones de distribución

Una función de distribución es una función F con dominio en $\overline{\mathrm{R}}$ [56], tal que:

1) F es no-decreciente;
2) $F(-\infty)=0$ y $F(\infty)=1$

Una función de distribución conjunta es una función H, con dominio en $\overline{\mathrm{R}}^2$, tal que:

1) H es *2-creciente*[57] en el sentido de que el *volumen* H de B es igual o mayor que cero para todos los rectángulos B cuyos vértices pertenecen al dominio de H:

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \geq 0$$

2) $H(x,-\infty)= H(-\infty,y)=0$ y $F(+\infty,+\infty)=1$

Puesto que Dom$H = \overline{\mathrm{R}}^2$, H tiene márgenes F y G, dados por $F(x)=H(x,\infty)$ y $G(y)=H(\infty,y)$.

Teorema de Sklar

El teorema de Sklar describe el comportamiento de las cópulas como relación entre las funciones de distribución multivariadas y sus distribuciones marginales univariadas.

Teorema: Sea H una función de distribución conjunta con márgenes F y G. Entonces existe una cópula C tal que para todo x,y en $\overline{\mathrm{R}}^2$,

$$H(x, y) = C(F(x), G(y))$$

Si F y G son continuas, entonces C es única; en caso contrario C no es única sino una cópula posible de F y G. A la inversa, si C es una cópula y F y G son funciones de distribución, entonces la función H es una función de distribución conjunta con márgenes F y G.

Teorema de Sklar para *n* dimensiones: Sea H una función de distribución n-dimensional, con márgenes F_1, F_2,..., F_n. Entonces existe una cópula C, tal que para todo **x** en $\overline{\mathrm{R}}^n$:

$$H(x_1, x_2, ..., x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), ..., F_n(x_n))$$

---

[56] $\overline{\mathrm{R}}$ es la línea real extendida $[-\infty;+\infty]$ y $\overline{\mathrm{R}}^2$ es el plano real extendido. Un rectángulo en $\overline{\mathrm{R}}^2$ es el producto cartesiano B de dos intervalos cerrados $B = [x_1;x_2]*[y_1;y_2]$. Los vértices del rectángulo B son los puntos $(x_1;y_1)$, $(x_1;y_2)$, $(x_2;y_1)$ y $(x_2;y_2)$. $V_H(B)$ es la diferencia de segundo orden de H en B.

[57] "*H es 2-creciente*" (*2-increasing*) no implica ni es implicada por "*H es no-decreciente en cada argumento*". Nelsen da el siguiente ejemplo: $H(x,y)= (2x-1)(2y-1)$, que es 2-creciente y, sin embargo, es una función decreciente de x para cada y en (0,1/2) y una función decreciente de y para cada x en (0,1/2).

A la inversa, si *C* es una n-cópula y F_1, F_2,..., F_n son funciones de distribución, entonces la función *H* es una función de distribución n-dimensional con márgenes F_1, F_2,..., F_n. Si F_1, F_2,..., F_n son continuas, entonces *C* es única.

Ejemplos de cópulas

<u>Función cópula normal</u>: La función cópula más usada (por ejemplo, en CreditMetrics y en el modelo KMV) es la cópula normal sobre la base de la distribución de Gauss multivariada, con una matriz de correlación ρ. Si un vector aleatorio (x_1,x_2) es gaussiano, sus márgenes univariados F_1 y F_2 también los son y están unidos por una función cópula única, tal que:

$$C(u_1, u_2; \rho) = N_2\left[N^{-1}[u_1], N^{-1}[u_2]; \rho\right]$$

$$= \int_0^{u_1} N\left(\frac{N^{-1}(u_2) - \rho\ N^{-1}(u)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) du$$

Un caso especial de la cópula normal se obtiene cuando ρ=0. Es la cópula producto, en la que:

$$C^{\perp}(u_1, u_2) \equiv u_1\ u_2$$

El caso multivariado es:

$$C(u_1,..., u_n; \boldsymbol{\rho}) = N_\rho\left[N^{-1}[u_1],..., N^{-1}[u_n]\right]$$

y la densidad correspondiente es:

$$c(u_1,..., u_n; \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{|\boldsymbol{\rho}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\varsigma^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\rho}^{-1} - \mathrm{I}\right)\varsigma\right)$$

Donde $\boldsymbol{\rho}$ es una matriz definida positiva y simétrica con diag$\boldsymbol{\rho}$=1 y ζ_n es $N^{-1}(u_n)$.

<u>Función cópula de la distribución logística</u>: La distribución logística bivariada de Gumbel para todo *x,y* en $\overline{\mathrm{R}}$:

$H(x, y) = \left(1 + e^{-x} + e^{-y}\right)^{-1}$, con marginales $F(x) = \left(1 + e^{-x}\right)^{-1}$ y $F(y) = \left(1 + e^{-y}\right)^{-1}$

puede representarse por la cópula:

$$C(u, v) = \frac{u\,v}{u + v - uv}$$

Transformación de las variables e invarianza de las cópulas

Las funciones cópula son invariantes bajo transformaciones estrictamente crecientes de las variables. Sean *X* e *Y* dos variables aleatorias continuas con cópula C_{XY}. Si α y βson estrictamente crecientes en RanX y RanY, entonces:

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}\left(F_2(x), G_2(y)\right) = P\left[\alpha(X) \le x, \beta(Y) \le y\right] = P\left[X \le \alpha^{-1}(x), Y \le \beta^{-1}(y)\right]$$

$$= C_{XY}\left(F_1\left(\alpha^{-1}(x)\right), G_1\left(\beta^{-1}(y)\right)\right) = C_{XY}\left(F_2(x), G_2(y)\right)$$

Cópulas de supervivencia

En muchas aplicaciones las variables aleatorias representan la supervivencia de determinados individuos dentro de una población. La probabilidad de que un individuo sobreviva determinado tiempo *x* está dada por la función de supervivencia:

$$\overline{F}(x) = P[X > x] = 1 - F(x)$$

Donde *F(x)* representa la función de distribución de *X*. Cuando se trabaja con vidas, el rango de la variable es normalmente [0,∞); sin embargo puede usarse la función de supervivencia para un rango $\overline{\mathrm{R}}$.

Para el par de variables aleatorias (*X,Y*) con una función de distribución conjunta *H*, la función de supervivencia conjunta es:

$$\overline{H}(x, y) = P[X > x, Y > y]$$

Con márgenes:

$$\overline{H}(x, -\infty) = \overline{F} \quad \text{y} \quad \overline{H}(-\infty, y) = \overline{G}$$

Existe una relación entre las funciones de supervivencia marginales y conjunta, análoga a la descripta en el teorema de Sklar:

$$\overline{H}(x, y) = 1 - F(x) - G(y) + H(x, y)$$

$$= \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - 1 + C(F(x), G(y))$$

$$= \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - 1 + C(1 - \overline{F}(x), 1 - \overline{G}(y))$$

Entonces la cópula de supervivencia es:

$$\overset{\frown}{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)$$

$$\overline{H}(x, y) = \overset{\frown}{C}\left(\overline{F}(x), \overline{G}(y)\right)$$

Simetría

Si *X* es una variable aleatoria continua y *a* es un número real, se dice que *X* es simétrica respecto de *a* si:

$$F(a + x) = \overline{F}(a - x)$$

Si consideramos la situación bivariada, donde *X* e *Y* son variables aleatorias y (*a,b*) un punto en $\overline{\mathrm{R}}^2$, (*X,Y*) son radialmente simétricas respecto de (*a,b*) si la función de distribución *X-a* e *Y-b* es la misma que la función de *a-X* y *b-Y*. Cuando *X* e *Y* son continuas, la condición de simetría radial puede expresarse en términos de funciones de distribución y de supervivencia conjuntas de X e Y, en forma similar a la relación que existe para las funciones de distribución y supervivencia univariadas:

Teorema: Sean X e Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H y márgenes F y G, respectivamente. Sea (a,b) un punto en $\overline{\mathbb{R}}^2$. Entonces, (X,Y) es radialmente simétrica respecto de (a,b) si y sólo sí:

$$H(a+x,b+y)=\overline{H}(a-x,b-y) \quad \text{para todo (X,Y) en } \overline{\mathbb{R}}^2.$$

El término radial deriva del hecho de que los puntos ($a+x,b+y$) y ($a-x,b-y$) se encuentran en radios opuestos que parten de (a,b) y las superficies que determinan tienen igual volumen H. La distribución normal bivariada con parámetros μ_x, μ_y, σ_x^2, σ_y^2, y ρ es radialmente simétrica respecto del punto (μ_x, μ_y)[58].

Si H satisface $H(a+x,b+y)= \overline{H}(a-x,b-y)$ entonces $C(u,v)=\check{C}(u,v)$ para todo (u,v) en $[0,1]^2$.

Generación de variables aleatorias

Una de las principales aplicaciones de las cópulas se encuentra en las simulaciones y los estudios de Monte Carlo. El método de la inversa de la función de distribución es uno de los métodos utilizados para generar muestras de una distribución univariada dada. Para obtener una observación x de una variable aleatoria X con una función de distribución F se debe:

1) Generar una variable u uniforme en (0,1);
2) Hacer $x=F^{-1}(u)$

Para generar observaciones (x,y) de un par de variables aleatorias (X,Y) con una función de distribución conjunta H mediante el método de distribución condicional, se debe generar el par de observaciones (u,v) de las variables aleatorias uniformes (U,V) cuya función de distribución conjunta es la cópula de X e Y: C. Para ello es preciso contar con la función de distribución condicional de V dado $U=u$, que se denota $c_u(v)$:

$$c_u(v)=P[V \leq v | U=u]=\lim_{\Delta u \to 0} \frac{C(u+\Delta u, v)-C(u,v)}{\Delta u}=\frac{\delta}{\delta\ u}C(u,v)$$

1) Generar las variables u y t, uniformes e independientes en (0,1);
2) Hacer $v = c_u^{-1}(t)$;
3) El par obtenido es (u,v)
4) El par (x,y) se obtiene mediante la inversa de las funciones marginales de distribución.

Métodos para construir cópulas

Existen muchas familias de cópulas. La mayoría se obtiene, como la familia normal, mediante la inversión de las distribuciones bivariadas. Otras cópulas pueden construirse en forma directa, tal el caso de las cópulas arquimidianas, en las que:

$$C_{\psi}(u,v)=\varphi^{-1}(\varphi(u)+\varphi(v))$$

Donde φ es una función convexa, continua y estrictamente decreciente, de [0,1] a [0,∞), tal que $\varphi(0)=\infty$ y $\varphi(1)=0$.

Un ejemplo de cópula arquimidiana es la conocida como familia Gumbel-Hougaard, o cópula logística:

$$C_{\theta}(u,v)=\exp\left(-\left[(-\ln u)^{\theta}+(-\ln v)^{\theta}\right]^{1/\theta}\right)$$ en la cual $\varphi_{\theta}(t)=(-\ln t)^{\theta}$ y $\theta \geq 1$

Esta es la cópula que corresponde a las distribuciones bivariadas de valores extremos de Tipo B, en las que las variables son independientes si $\theta=1$:

$$H_{\theta}(x,y)=\exp\left(-\left(e^{-\theta x}+e^{-\theta y}\right)^{1/\theta}\right)$$, para todo x,y en $\overline{R}$.

Otro ejemplo de cópula arquimidiana, que mencionamos porque es el único que se cita en Bowers[59], corresponde a la familia de cópulas Frank. Estas cópulas son las únicas cópulas arquimidianas que satisfacen la ecuación de simetría radial, a la que nos hemos referido[60]. El parámetro θ controla la dependencia. Si el parámetro es igual a 0, debe interpretarse que las variables x e y son independientes:

$$C_{\theta}(u,v)=-\frac{1}{\theta}\ln\left(1+\frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right),$$ con $\theta \in (-\infty,\infty)\setminus\{0\}$

Dependencia

Este punto ha sido desarrollado en el trabajo de Paul Embrechts, Alexander McNeil y Daniel Straumann "Correlation and Dependency in Risk Management: Properties and Pitfalls": "La noción de correlación es central en la teoría financiera. El Capital Asset Pricing Model (CAPM) y la Arbitrage Pricing Theory (APT) usan la correlación como medida de dependencia entre diferentes instrumentos financieros y emplean una teoría elegante que, para arribar a la elección de la cartera óptima, se basa esencialmente en el supuesto de retornos distribuidos de acuerdo con una normal multivariada. Aunque el seguro se ha basado tradicionalmente en el supuesto de independencia y la determinación de los premios se fundamenta en la ley de los grandes números, la creciente complejidad de los productos de seguro y reaseguro ha llevado recientemente a un mayor interés actuarial por los modelos de riesgos dependientes. ... La presente búsqueda de una base metodológica adecuada para la administración integral de los riesgos trae aparejada también la cuestión de la correlación y la dependencia. Aunque la administración de los riesgos financieros contemporánea gira en torno al uso de la correlación para describir la dependencia entre riesgos, la inclusión de productos derivados no lineales invalida muchos de los supuestos en materia de distribución que sustentan el uso de la correlación... La correlación, aunque es uno de los conceptos más ubicuos en las finanzas y los seguros modernos, es uno de los conceptos peor comprendidos. Mucha de la confusión se origina en el uso literal del término para referirse a cualquier noción de dependencia. Para un matemático, la correlación es sólo una medida particular de dependencia estocástica. Es la medida canónica en el mundo de las distribuciones normales multivariadas y, de un modo más

---

[58] La distribución normal bivariada pertenece a la familia de distribuciones con contorno elíptico. Estas distribuciones son todas radialmente simétricas. Sus densidades tienen contornos en forma de elipses concéntricas con excentricidad constante.
[59] BOWERS N. y otros, "*Actuarial Mathematics*", segunda edición, pág. 278.
[60] $C(u,v)=\check{C}(u,v)$

general, de las distribuciones esféricas y elípticas. Sin embargo, la investigación empírica en finanzas y seguros muestra que las distribuciones del mundo real rara vez pertenecen a esta clase".

Correlación lineal

El coeficiente de correlación lineal de dos variables *X,Y* con valores reales y varianzas finitas es:

$$\rho\left(X,Y\right)=\frac{Cov\left[X,Y\right]}{\sqrt{\sigma^{2}\left[X\right]\sigma^{2}\left[Y\right]}}$$

Donde la covarianza entre *X* e *Y* es Cov[*X,Y*] = E[*XY*] - E[*X*]E[*Y*]. La correlación es una medida de dependencia lineal. En el caso de variables independientes ρ = 0 y en el caso de dependencia lineal perfecta, donde $Y = a X + b$ para $a \in$ R|{0}, ρ = ±1. La correlación es invariante bajo transformaciones afines positivas, esto es bajo transformaciones lineales estrictamente crecientes.

De acuerdo con los autores, la popularidad de la correlación lineal se debe a que los momentos segundos son fáciles de calcular para las distribuciones bivariadas, a que la correlación y la covarianza son fáciles de manipular bajo transformaciones lineales afines y a que es una medida natural de la dependencia de las distribuciones esféricas y elípticas.

Entre las desventajas se cuentan que las varianzas de *X* e *Y* deben ser finitas (en caso contrario la correlación lineal es no definida), que la independencia de dos variables implica que no están correlacionadas pero la correlación 0 no implica, en general, que sean independientes; y que la correlación lineal no es invariante bajo transformaciones estrictamente creciente no lineales. Así, en general:

$$\rho\left(T(X),T(Y)\right)\neq\rho\left(X,Y\right)$$

Por el contrario, en general para vectores normalmente distribuidos y transformaciones arbitrarias T, R→R:

$$\left|\rho\left(T(X),\overline{T}(Y)\right)\right|\leq\left|\rho\left(X,Y\right)\right|$$

Distribuciones esféricas y elípticas

Las distribuciones esféricas son distribuciones que extienden la distribución normal multivariada estándar $N_n(0,I)$, o sea la distribución de variables normales estándares independientes. Son distribuciones cuya densidad es constante sobre esferas. La función característica de la distribución esférica de un vector aleatorio **X** tiene la forma:

$$\psi\left(t\right)=\mathrm{E}\left[\exp\left(i\mathrm{t}^{t}\mathrm{X}\right)\right]=\phi\left(\mathrm{t}^{\mathrm{t}}\mathrm{t}\right)=\phi\left(t_{1}^{2}+\ldots+t_{n}^{2}\right)$$

La función $\phi R_{\geq 0}\rightarrow R$ es el generador característico de la distribución esférica. Son ejemplos de distribuciones esféricas la distribución t multivariada con *v* grados de libertad[61] y la distribución logística[62]. Las dos últimas son

[61] $f(\mathbf{x})= c\ (1+\mathbf{x}^t\mathbf{x}/v)^{-(n+v)/2}$
[62] $f(\mathbf{x})= c\ \exp(-\mathbf{x}^t\mathbf{x})/[1+ \exp(-\mathbf{x}^t\mathbf{x})]^2$

distribuciones de variables aleatorias no correlacionadas pero, al contrario del caso normal, no son distribuciones de variables aleatorias independientes. Dentro de la clase de las distribuciones esféricas, sólo la distribución normal multivariada es una distribución de variables aleatorias independientes.

Las distribuciones elípticas son distribuciones que extienden la distribución normal multivariada $N_n(\mu\Sigma$, o sea la distribución con media μ y matriz de covarianzas Σ. Los contornos de igual densidad son ahora elipsoides. El vector aleatorio **X** tiene una distribución elíptica si **X**=T(**Y**) e **Y** tiene una distribución esférica. La función característica es:

$$\psi(t) = \mathrm{E}\left[\exp\left(i\mathbf{t}^t\mathbf{X}\right)\right] = \mathrm{E}\left[\exp\left(i\mathbf{t}^t\left(A\mathbf{Y}+\mu\right)\right)\right] = \exp\left(i\mathbf{t}^t\mu\right)\phi\left(\mathbf{t}^t\Sigma\mathbf{t}\right)$$

Donde $\Sigma = AA^t$.

- Toda combinación lineal de un vector aleatorio distribuido en forma elíptica es también elíptica, con el mismo generador característico ϕ. Los componentes del vector son variables aleatorias del mismo tipo[63] distribuidas en forma simétrica.
- Las distribuciones marginales de las distribuciones elípticas son también elípticas, con el mismo generador.
- Si se asume que Σ es definida y estrictamente positiva, la distribución condicional de X_1 dado X_2, también es elíptica, aunque en general con un generador ϕ diferente.

Embrechts, McNeil y Straumann concluyen el tratamiento de las distribuciones esféricas con la mención de una característica importante: estas distribuciones son apropiadas para los enfoques tradicionales de la administración de riesgos. Constituyen el fundamento tanto del uso del Value-at-Risk como medida de riesgo como del enfoque media-varianza de Markowitz para la optimización de la cartera. El VaR de una cartera Z con n riesgos con distribución elíptica al nivel de probabilidad α es equivalente a la función cuantil de la distribución que corresponde a la variable Z evaluada en α: $\mathrm{VaR}_\alpha(Z)=F_Z^{-1}(\alpha)=q_\alpha$. Esto es posible porque para las funciones elípticas el VaR es una medida de riesgo coherente.

Medidas de riesgo coherente

Una función g es una medida de riesgo coherente si satisface las siguientes propiedades:

1) Positividad. Para toda variable aleatoria positiva $X \geq 0$: $g(X) \geq 0$.
2) Subaditividad: Para dos variables aleatorias X e Y, $g(X+Y) \leq g(X)+g(Y)$.
3) Homogeneidad positiva: Para $\lambda \geq 0$: $g(\lambda X) = \lambda g(X)$.
4) Invarianza de la traslación: Para todo $a \in \mathrm{R}$, $g(X+a) = g(X)+a$.

Para las funciones elípticas, el uso de una medida de riesgo con estas propiedades es equivalente al uso de la varianza como medida de riesgo en el enfoque de Markowitz. Las medidas de riesgo alternativas, tales como el VaR_α o el "*expected shortfall*" $\mathrm{E}[Z \mid Z > \mathrm{VaR}_\alpha(Z)]$, producen valores numéricos diferentes, pero sin efectos en la administración del riesgo. Es decir, para estas funciones si se minimiza la varianza se minimizan el VaR y el *expected shortfall*.

Conceptos de dependencia alternativos

Embrechts, McNeil y Straumann analizaron también algunas medidas de dependencia alternativas y sus propiedades:

<u>Comonotonicidad</u>: Este concepto se relaciona con los límites de Fréchet. En el caso bivariado, para U~ U(0,1):

$$C_l(u,v) = W(u,v) = \max(u+v-1,0) = P[U \le u; 1-U \le v]$$
$$C_u(u,v) = M(u,v) = \min(u,v) = P[U \le u; U \le v]$$

Los límites C_l y C_u son cópulas en sí mismos y distribuciones bivariadas de los vectores $(U,1\text{-}U)^t$ y $(U,U)^t$. Las cópulas límite corresponden a los casos en los que Y es una función monótona de X. La función monótona es creciente en el caso de C_u y decreciente en el caso de C_l. Por ejemplo, la cópula normal da las funciones cópula C_l, $C^{\perp}$ y C_u cuando el parámetro ρ toma los valores –1, 0 y 1. Es decir, C_l y C_u describen los casos de dependencia perfecta negativa y positiva, respectivamente. Se dice que dos variables (X,Y) son *comonótonas* si tienen la cópula C_u y *contramonótonas* si tienen la cópula C_l.

Propiedades deseables en las medidas de dependencia: Si $\delta(.,.)$ es una medida de dependencia que asigna un número real a un par de variables aleatorias X e Y, es deseable que cumpla con las siguientes propiedades:

P1. $\delta(X,Y) = \delta(Y,X)$ (simetría).

P2. $-1 \le \delta(X,Y) \le 1$ (normalización).

P3. $\delta(X,Y)= 1 \Leftrightarrow X,Y$ comonótonas.

. $\delta(X,Y)= -1 \Leftrightarrow X,Y$ contramonótonas.

P4. Para T estrictamente monótona en el rango de X:

$$\delta(T(X),Y) = \begin{cases} \delta(X,Y) & T \text{ creciente} \\ -\delta(X,Y) & T \text{ decreciente} \end{cases}$$

La correlación lineal cumple las propiedades P1 y P2 exclusivamente. La correlación de rango (rank correlation) cumple también las propiedades P3 y P4 si X e Y son continuas. En el trabajo de Embrechts, McNeil y Straumann se mencionan las correlaciones de rango de Spearman[64] y de Kendall[65] como ejemplos de medidas de dependencia alternativas. La correlación de Spearman es la correlación de la cópula C asociada a $(X;Y)^t$. Tanto ρ_s como ρ_τ son medidas de dependencia monótonas entre X e Y, en tanto que la correlación lineal es una medida de dependencia lineal exclusivamente. La principal ventaja de la correlación de rango respecto de la correlación ordinaria es la invarianza en caso de transformaciones monótonas y la sensibilidad a la dependencia perfecta y la principal desventaja es que no se basa en los momentos de las distribuciones.

Dependencia en las colas o "tail dependence": Para valores extremos puede definirse una medida de dependencia en la cola. Si las distribuciones marginales de las variables X e Y son continuas, esta medida es también una función de la cópula de X e Y y, por lo tanto, es invariable en el caso de transformaciones estrictamente crecientes. El coeficiente de dependencia en la cola superior de X e Y (*coefficient of upper tail dependence*) es:

$$\lim_{\alpha \to 1-} P\left[Y > F_2^{-1}(\alpha) \middle| X > F_1^{-1}(\alpha)\right] = \lambda$$

Si $\lambda \in (0,1]$ X e Y se dicen *asintóticamente dependientes* en la cola superior, si $\lambda=0$, son *asintóticamente independientes*. Embrechts, McNeil y Straumann muestran que la cópula normal produce independencia

---

[63] Dos variables aleatorias X e Y son del mismo tipo si existen $a>0$ y $b \in R$, de modo que $Y =_d aX+b$.

[64] $\rho_s(X,Y)=\rho(F_1(X),F_2(Y))$, donde ρ es la correlación lineal usual.

[65] $\rho_\tau(X,Y)=P[(X_1\text{-}X_2)(Y_1\text{-}Y_2)>0] - P[(X_1\text{-}X_2)(Y_1\text{-}Y_2)<0]$

asintótica en tanto ρ<1. No importa cuán alta sea la correlación elegida, si se avanza suficientemente en la cola superior, los eventos extremos parecen ocurrir en forma independiente en cada distribución marginal. En cambio la distribución t-bivariada aparece como asintóticamente dependiente, en tanto ρ> -1. Incluso en el caso de correlaciones negativas o nulas, la cóputa-t produce dependencia asintótica en la cola superior. La dependencia se incrementa en la medida en que los grados de libertad disminuyen y las distribuciones marginales tienen colas más pesadas.

Algunas falacias

Finalmente, Embrechts, McNeil y Straumann exponen algunas falacias con relación a las distribuciones bivariadas y la noción de dependencia.

1) *Las distribuciones marginales y su correlación determinan la distribución conjunta.* Si sólo se conocen las distribuciones marginales de X e Y y su correlación, debe tenerse presente que hay muchas distribuciones bivariadas posibles para X e Y. Por ejemplo, y citando a los autores, "analíticamente es difícil hallar el Value-at-Risk que corresponde a la suma de $X+Y$ bajo dos distribuciones bivariadas diferentes, pero los estudios de simulación confirman que $X+Y$ produce resultados mayores para un modelo de dependencia Gumbel que para un modelo gaussiano. La diferencia entre las dos estructuras de dependencia es particularmente importante si estamos interesados en las pérdidas que se producen sólo en el caso de valores extremos conjuntos de $X+Y$".

2) *Dadas dos distribuciones marginales F_1 y F_2 para X e Y, toda correlación lineal entre –1 y 1 es posible mediante una adecuada especificación de la distribución conjunta*.
Por el contrario, los autores citan un teorema de Fréchet y Hoeffding de acuerdo con el cual si las varianzas de las distribuciones marginales son finitas y mayores que 0, el conjunto de todas las correlaciones posibles se encuentra entre las correlaciones extremas $\rho_{min}<0<\rho_{max}$. La correlación mínima se obtiene sólo si X e Y son contramonótonas y la correlación máxima sólo si son monótonas. Además, ρ_{min}= -1 y ρ_{max} =1 si X y $-Y$ y X e Y, respectivamente, son del mismo tipo. Mediante un ejemplo, demuestran que es posible tener un vector aleatorio $(X,Y)^t$ en el que la correlación es casi 0 aunque X e Y son comonótonas o contramonótonas y tienen, por lo tanto, la dependencia más fuerte posible. Este ejemplo contraintuitivo muestra que las correlaciones pequeñas no son sinónimo de independencia entre variables aleatorias.

3) *El peor VaR (cuantil) para una cartera lineal X+Y ocurre cuando $\rho(X,Y)$ es máxima; esto es, cuando X e Y son comonótonas.*
Sobre este punto Embrechts, McNeil y Straumann dicen que es común considerar a la varianza como una medida del riesgo en finanzas y en seguros y que, si bien es cierto que la varianza de una cartera lineal es máxima cuando la correlación es máxima: $\sigma^2(X+Y)=\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)+2\rho(X+Y)\sigma(X)\sigma(Y)$, no es correcto concluir que el VaR también es máximo. Aunque esto es cierto para las distribuciones elípticas, no lo es en general para otras distribuciones. El VaR no es una medida de riesgo subaditiva, por lo que existen casos en los que $VaR_\alpha(X+Y)>VaR_\alpha(X)+VaR_\alpha(Y)$. Los autores definen la diversificación $D=(VaR_\alpha(X)+VaR_\alpha(Y))-VaR_\alpha(X+Y)$ y muestran que si bien se piensa que los riesgos no comonótonos son diversificables (D>0), hay ejemplos de que existen distribuciones con correlaciones (lineales o de rango) menores a uno que resultan en una diversificación negativa (D<0). Para ciertas distribuciones, el inversor está en mejor posición si toma un riesgo y lo duplica que si toma dos riesgos independientes: la

diversificación de dos riesgos no sólo depende de su estructura de dependencia sino también de la elección de las distribuciones marginales.

El cálculo del VaR

Si se utiliza una cópula normal para el cálculo del VaR, la correlación empírica es una buena medida de la dependencia sólo si los márgenes son gaussianos. Citando a Jouanin, Riboulet y Roncalli, se demuestra que una elección incorrecta de las distribuciones marginales (por ejemplo, si se asume que los márgenes son gaussianos cuando no lo son) lleva a una estimación sesgada de la matriz de correlación. Y aunque los márgenes sean gaussianos, se demuestra que la elección de la estructura de la dependencia tiene un gran impacto en la determinación del VaR de una cartera. Por ejemplo, una cópula-t con un grado de libertad produce un VaR menor que la cópula normal para niveles de confianza bajos (90% y 95%), en cambio el VaR gaussiano subestima el riesgo en forma sistemática para niveles de confianza superiores al 95%[66].

Mediante las funciones cópula pueden construirse distribuciones de pérdida con colas más anchas que las que producirían los logaritmos de los retornos de los activos normalmente distribuidos. Según explica Bluhm[67], los modelos de riesgo basados en la cópula normal pueden modificarse empleando en su lugar una cópula con distribución *t*. Cuando los grados de libertad *v* aumentan la función de distribución converge a la distribución normal estandarizada. Entonces, cuanto menor es el grado de libertad, más gruesa es la cola que produce el modelo para una misma matriz de correlación entre las variables. Si se reemplaza la dependencia que produce una distribución normal por la dependencia que produce una distribución *t*, la masa de la distribución de pérdidas se traslada a las colas.

Para ejemplificar el impacto que produce cambiar una cópula normal por una cópula-t en el modelo de Merton, Bluhm modifica la ecuación del modelo de factor único:

$$X_i = \sqrt{\rho}\ Y + \sqrt{1-\rho}\ Z_i$$

Esta modificación se hace escalando la ecuación con $\sqrt{v/W}$, y $W \sim \chi^2_{(v)}$. Además, *W* es independiente de *Y* y de Z_i. De este modo, la cópula normal se transforma en una cópula-t, que da la distribución *t* del logaritmo del retorno de los activos: $\overline{X}_i = \sqrt{v/W}\ X_i$.

La probabilidad condicional de default del deudor y, en el límite, la pérdida porcentual de la cartera, dados *Y=y* y *W=w*, quedan descriptos por:

$$L = N\left[\frac{\sqrt{w/v}\ F_v^{-1}[p] - \sqrt{\rho}\ Y_i}{\sqrt{1-\rho}}\right]$$

66 JOUANIN J., RIBOULET G. Y RONCALLI T.; "*Financial Applictions of Copula Functions*", pág. 4 y 5. De acuerdo con los autores, la subestimación del riesgo explicaría por qué el VaR paramétrico (o gaussiano) no se utiliza con frecuencia en los bancos internacionales. Sin embargo, estiman que es probable que en el futuro se avance hacia un VaR paramétrico o semi-paramétrico (la dependencia de los riesgos corresponde a una función cópula paramétrica mientras que la distribución de los riesgos es una distribución empírica) más realista.

67 BLUHM C., OVERBECK L. y WAGNER C. "*An Introduction to Credit Risk Modeling*"; pág. 105.

Bluhm realizó la simulación de la pérdida del portafolio con la cópula-t para diferentes grados de libertad (*v*), probabilidades de default (*p*) y coeficientes de correlación (*ρ*). Para 10.000 grados de libertad, los estadísticos de la cartera son similares a los que produce la cópula normal, pero la pérdida casi se duplica para el cuantil 99% si los grados de libertad descienden de 40 a 10, con el resto de los parámetros iguales. Las diferencias son mayores para niveles de confianza superiores.

La cópula-t permite modelar pérdidas extremas con sólo reducir los grados de libertad de la distribución *t* subyacente. Sin embargo, comenta el autor, la decisión acerca de cuán gruesas deben ser las colas no deja de ser subjetiva y quizás sea por esta razón que los modelos se basan comúnmente en la cópula normal: la cópula de Gauss se determina en forma única a partir del vector de esperanzas y de la matriz de covarianzas, de modo que la calibración sólo requiere que se determinen estos valores.

CAPÍTULO IV

EL RIESGO SISTEMÁTICO

El capital asignado debe ser igual al cuantil de la distribución de la pérdida de la cartera de créditos que se corresponde con la probabilidad de default deseada para la institución financiera (por ejemplo, 0,1%). Oldrich Vasicek demostró que la distribución sobre la base de un único factor sistemático converge, con el aumento del tamaño de la cartera, a un tipo límite, que tiene la siguiente forma analítica:

$$P\left[L_{\%} \leq \theta\right] = N\left[\frac{\sqrt{1-\rho}\ N^{-1}(\theta) - N^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}}\right]$$

donde :

$L_{\%}$: Pérdida porcentual condicional de la cartera

θ : Pérdida porcentual máxima

p : probabilidad de default de un préstamo cualquiera

ρ : coeficiente de correlación entre los activos de cualquier par de deudores

Citando a Emmer y Tasche[68], la existencia de una forma analítica para los modelos de factor único permite evitar los extensos cómputos que imponen las simulaciones de Monte Carlo. Por otra parte, la fórmula pone en evidencia la estructura de dependencia del modelo: "A menudo, los modelos de factor único admiten una descomposición de la pérdida de la cartera en una función monótona del factor único y en un residuo. La función monótona se denomina riesgo sistemático y el residuo, riesgo específico o idiosincrásico. Y en algunas ocasiones, la variable que representa la pérdida de la cartera converge a una función monótona del factor único. Esta circunstancia puede usarse como punto de partida para la aproximación analítica de los estadísticos importantes de la cartera, tales como los cuantiles (o value-at-risk) de la pérdida".

El default sobre la base del modelo de Merton

[68] EMMER S. y TASCHE D. "Calculating Credit Risk Capital Charges with the One-Factor Model".

El modelo de Merton asume que la empresa tiene una estructura de capital compuesta por capital accionario (S_t) que no paga dividendos y un instrumento de deuda con valor de mercado (B_t), valor nominal (B) y vencimiento único en la fecha (T):

$$A_T = B_T \ (B) + S_T$$

Si en el momento (T) el valor de los activos (A_T) excede el valor contractual de la deuda (B), los acreedores reciben el pago prometido y queda para los accionistas el valor residual. En cambio, si el valor contractual de las obligaciones excede el valor de los activos, los acreedores sólo se cobran hasta este valor y se produce el default de la empresa. Se asume que el valor de los activos sigue un movimiento geométrico browniano, cuya dinámica puede representarse como un proceso de Wiener logarítmico:

$dA_i = \mu_i A_i \, dt + \sigma_i A_i \, dx_i$.

Donde x_i, $i=1, 2, ...,n$ son procesos de Wiener con $dx_i = X_i \, (dt)^{1/2}$, $E(dx_i)^2 = dt$ y $E(dx_i)(dx_j) = \rho \, dt$, para $i \neq j$. En este proceso, X_i es una variable con distribución normal estándar; dx_i es una variable con distribución normal con media 0 y varianza igual a dt; y μ y σ^2 son constantes y representan la media y la varianza de la tasa instantánea de retorno de los activos de la empresa (dA_i / A_i)[69].

Por aplicación del lema de Ito, se tiene que el logaritmo de A_i también sigue un proceso de Wiener: $d(\ln A_i) = (\mu - \sigma^2/2) \, dt + \sigma \, dx_i$, con tasas de media y varianza constantes: $\mu - \sigma^2/2$ y σ^2. Es decir, A_i tiene una distribución lognormal y en la fecha T el valor de los activos de la empresa A_{it} es:

$$A_{iT} = A_{i0} \, e^{\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \sqrt{T} \, X_i \right]}$$

Probabilidad de default de un préstamo

La probabilidad de default del préstamo i hasta el momento T, $p_i = N(c_i)$[70], y el umbral de default (c_i)[71] son:

$$p_i = P[A_{iT} < B_i] = P[\ln A_{i0} + \mu_i T - \frac{1}{2}\sigma_i^2 T + \sigma_i \sqrt{T} X_i < \ln B_i] = P[X_i < c_i] = N(c_i)$$

$$c_i = \frac{\ln B_i - \ln A_{i0} - \mu_i T + \frac{1}{2}\sigma_i^2 T}{\sigma_i \sqrt{T}}$$

Si L_i es la pérdida porcentual bruta (antes del recupero) del préstamo i, de modo que $L_i=1$ si el deudor i incurre en default y $L_i=0$ en caso contrario, la pérdida porcentual bruta de la cartera es:

$$L_{\%} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} L_i$$

---

[69] El valor corriente de los activos de la empresa no puede ser observado en los hechos, por ello es difícil evaluar tanto su valor como su volatilidad. Como se vio, ambos pueden estimarse a partir del valor de mercado de las acciones emitidas por la empresa y de la volatilidad instantánea de ese valor.
[70] N es la función de distribución normal acumulada.
[71] Default-threshold.

Si los eventos de default de los préstamos de la cartera fueran independientes entre sí, por el teorema central del límite, la distribución de la pérdida convergería a la distribución normal con el crecimiento de la cartera. Aunque los defaults no son independientes, O. Vasicek demostró que la distribución converge, con el aumento del tamaño de la cartera, a una forma límite. Como se mencionó, X_i es una variable normal estándar con distribución conjunta y correlación entre pares igual a ρ. Por lo tanto, puede representarse de la siguiente manera:

$$X_i = Y\sqrt{\rho} + Z_i\sqrt{1-\rho}$$

En esta ecuación Y, Z_1, Z_2 ..., Z_n son variables normales estándares independientes. La variable Y puede interpretarse como un factor común al que está expuesta la cartera, tal como el estado de la economía representado por un índice. Entonces, el término $\rho^{1/2}Y$ representa la exposición del deudor al factor común y el término $(1-\rho)^{1/2} Z_i$ su riesgo específico.

La probabilidad de pérdida de la cartera, tal como lo explica O. Vasicek, es el promedio de las probabilidades de pérdida de la cartera para cada escenario de la economía ponderado por la probabilidad de que ocurra cada escenario. Para un escenario determinado, la probabilidad de pérdida condicional del préstamo i es $p_i(Y)$:

$$p_i(Y) = P[L_i = 1 | Y] = P\,[Y\sqrt{\rho} + Z\sqrt{1-\rho} < c_i] = N\left(\frac{N^{-1}(p_i) - Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

La probabilidad de default no condicional, p_i, es el promedio de las probabilidades condicionales ponderado en función de los escenarios.

La fórmula de Vasicek para la probabilidad de pérdida de la cartera

Condicional al valor de Y, las variables L_i son variables independientes idénticamente distribuidas con varianza finita. Por lo tanto, cuando $n \to \infty$, la pérdida de la cartera condicional a Y converge, por la ley de los grandes números, a su esperanza $p(Y)$. La demostración se encuentra en la publicación de O. Vasicek de 1987 “Probabilidad de pérdida de una cartera de préstamos”. Si se considera que la cartera está compuesta de n préstamos de igual monto y vencimiento en T, y p es la probabilidad de default de todos ellos, la probabilidad de que se produzcan k defaults en la cartera de n préstamos, con la consiguiente pérdida porcentual, es:

$$P_k = P\left[L = \frac{k}{n}\right] = \binom{n}{k} P\,\left[A_{iT} < B_i, ..., A_{kT} < B_k, A_{k+1T} \geq B_{k+1}, ..., A_{nT} \geq B_n\right]$$

$$= \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} P\,\left[A_{iT} < B_i, ..., A_{kT} < B_k, A_{k+1T} \geq B_{k+1}, ..., A_{nT} \geq B_n \middle| Y_T = y\right] \quad dP[Y_T < y]$$

$$= \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} P\Big[-c_1 + \sqrt{\rho}Y_T + \sqrt{1-\rho}Z_{iT} < 0, ..., -c_k + \sqrt{\rho}Y_T + \sqrt{1-\rho}Z_{kT} < 0; \ldots$$

$$-c_n + \sqrt{\rho}Y_T + \sqrt{1-\rho}Z_{nT} \geq 0 \Big| \; Y_T = y\Big] \quad dP[Y_T < y]$$

$$= \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \left(N\left(\frac{c-\sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}} \right) \right)^{k} \left(1 - N\left(\frac{c-\sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}} \right) \right)^{n-k} dN(Y)$$

$$= \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \left(N\left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \left(N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}\ Y \right) \right) \right)^{k} \left(1 - N\left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \left(N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}\ Y \right) \right) \right)^{n-k} dN(Y)$$

Aquí el integrando representa la distribución de probabilidad condicional de pérdida de la cartera. La probabilidad de que la pérdida porcentual de una cartera de *n* préstamos no exceda de θ es:

$$P\left[L_{\%} \leq \theta\right] = \sum_{k=0}^{[n\theta]} P_k$$

$$= \sum_{k=0}^{[n\theta]} \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \left(N\left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \left(N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}\ Y \right) \right) \right)^{k} \left(1 - N\left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \left(N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}\ Y \right) \right) \right)^{n-k} dN(Y)$$

Si [72] $s = N\left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \left(N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}\ Y \right) \right)$ y $W(s) = N\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\sqrt{1-\rho}\ N^{-1}(s) - N^{-1}(p) \right) \right)$

$$F_n(\theta) = \sum_{k=0}^{[n\theta]} \binom{n}{k} \int_{0}^{1} s^k \ (1-s)^{n-k}\, dW(s)$$

Por la ley de los grandes números:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{[n\theta]} \binom{n}{k} s^k \ (1-s)^{n-k} \quad \begin{array}{l} = 0 \ si\ \theta < s \\ = 1 \ si\ \theta > s \end{array}$$

Por lo tanto, cuando la cartera crece, la pérdida porcentual condicional a un estado de la economía *Y* converge a la esperanza s = E($L_{\%}$|Y) = *p(Y)*. Entonces, la función de distribución acumulada de las pérdidas de una cartera muy grande es:

$$W(\theta) = P\left[L_{\%} \leq \theta\right] = P\left[N\left(\frac{N^{-1}(p) - Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \right) \leq \theta \right] = N\left(\frac{\sqrt{1-\rho}\ N^{-1}(\theta) - N^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}} \right)$$

La distribución de la pérdida de la cartera condicional a Y converge a la forma límite *p(Y)* aun cuando los préstamos que la integran tengan distinta ponderación. Si w_i representa la ponderación del préstamo *i* y $\Sigma w_i = 1$, la pérdida de la cartera condicional es:

$$L_{\%} = \sum_{i=1}^{n} w_i L_i$$

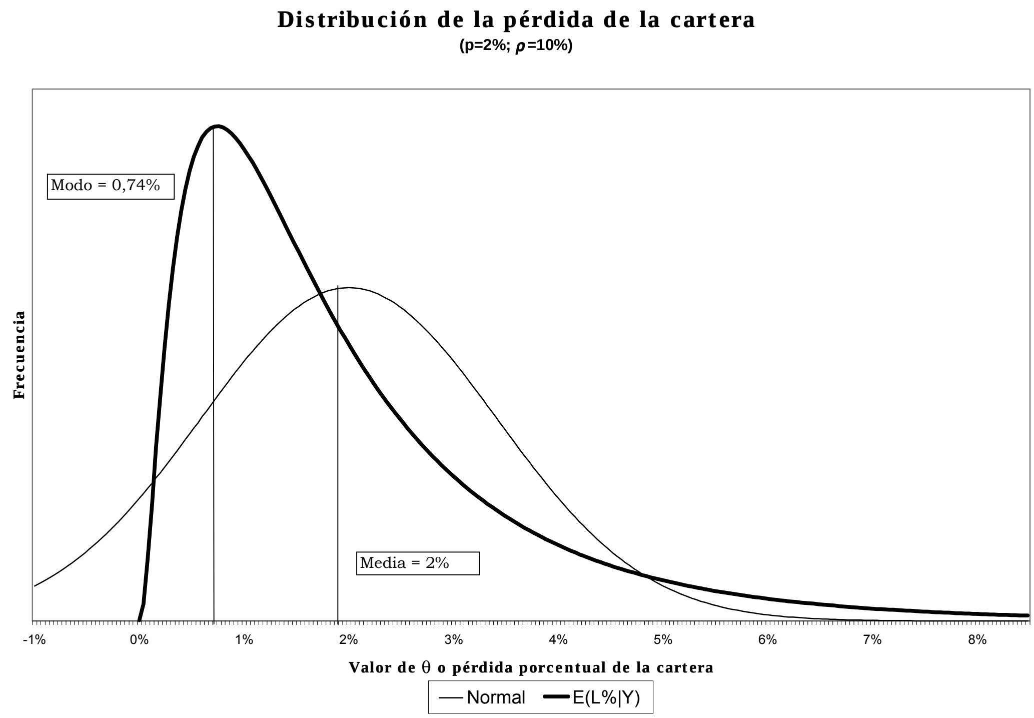
$L_{\%}$ converge a su esperanza *p(Y)*, si se cumple la condición, necesaria y suficiente:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \to 0$$

Este indicador, que mide la concentración, alcanza su valor mínimo (1/*n*) cuando la cartera es homogénea; es decir, cuando todos los préstamos tienen el mismo valor. Las carteras conformadas por un número grande de préstamos entre los que no existe un grupo que predomine sobre el resto se conocen como “carteras altamente granula rizadas”.

Propiedades de la distribución de pérdidas

La distribución de pérdidas es asimétrica y leptocúrtica, lo que determina una mayor exigencia de capital para el prestamista. A continuación puede apreciarse la diferencia con una distribución normal con idéntica media y desvío estándar:



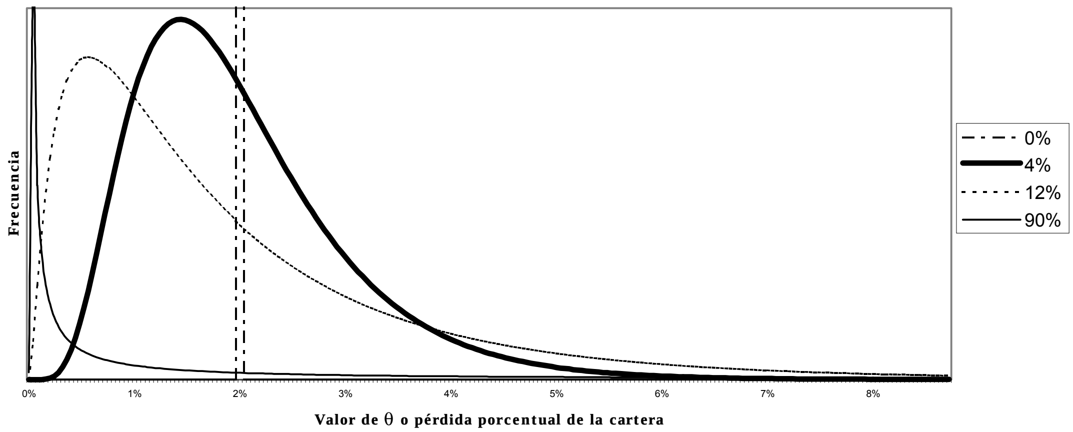
En “Loan Portfolio Value” O. Vasicek describe otras propiedades de la distribución:

$$F(\theta;p;\rho) = N\left(\frac{\sqrt{1-\rho}\;\;N^{-1}(\theta) - N^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}}\right)$$

1) Es una distribución continua en el intervalo $0 \le \theta \le 1$, con parámetros $0 < p, \rho < 1$. Cuando ρ tiende a 0, converge a una distribución puntual concentrada en $L = p$; y cuando tiende a 1, converge a una distribución de cero-uno (con probabilidades p y $1-p$).

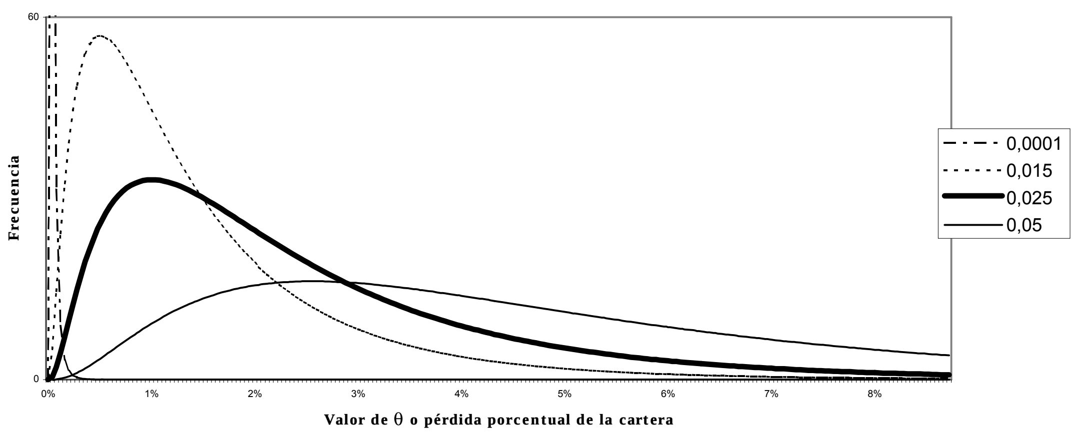
[72] Debe recordarse que $s = p\,(Y)$ es la probabilidad condicional de default de un préstamo, dado un estado de la economía representado por *Y*, en tanto que *p* es la probabilidad no condicional de default.

Distribución de la pérdida de la cartera según los valores de ρ
(p=2%)



A su vez, cuando *p* tiende a 0 la distribución se concentra en *L = 0*; y cuando tiende a 1, la distribución se concentra en *L = 1*.

Distribución de la pérdida de la cartera según los valores de *p*
(ρ =10%)



2) Es simétrica en el sentido de que F(*θ; p,ρ)*= 1- F(1-*θ;1-p,ρ).* Por lo visto en el capítulo sobre cópulas, la distribución conjunta de X_i e *Y* es radialmente simétrica respecto del punto determinado por la media de ambas[73]. Entonces, la función de distribución conjunta *H* es igual a la función de supervivencia: H(x,y) = $\overline{\text{H}}$(-x,-y).

La densidad es:

$$f(\theta;p;\rho)=\frac{d}{d\theta}F(\theta;p;\rho)=\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}\;e^{\left(-\frac{1}{2\rho}\left(\sqrt{1-\rho}\quad N^{-1}(\theta)-\quad N^{-1}(p)\right)^{2}+\frac{1}{2}\left(N^{-1}(\theta)\right)^{2}\right)}$$

[73] X_i e *Y* son variables con distribución normal estándar.

Cuando ρ< 1/2, la función de densidad es unimodal, con modo:

$$L_{\text{mod } o} = N\left(\frac{\sqrt{1-\rho}}{1-2\rho} N^{-1}(p) \right)$$

La media de la distribución es $E(L) = p$ y la varianza es:

$$Var(L) = N_2\left(N^{-1}(p), N^{-1}(p), \rho\right) - p^2$$ [74]

Capital mínimo

La inversa de la distribución P[$L_{\%} \leq \theta$], esto es el valor del cuantil α de $L_{\%}$, es el requisito de capital de Basilea II (con un nivel de confianza α = 99,9%)[75]:

$$q_\alpha(L) = F(\alpha; 1-p; 1-\rho) = N\left[\frac{\sqrt{\rho}\ N^{-1}(\alpha) + N^{-1}(p)}{\sqrt{1-\rho}} \right]$$

Puesto que una parte de dicho requisito se cubre con la previsión por incobrabilidad, el cargo, o capital mínimo, es:

$$\text{Cargo}(L_\alpha) = q_\alpha(L) - E[L]$$

El riesgo sistemático de la cartera

El modelo permite aproximar la distribución de la pérdida mediante una distribución basada sólo en el riesgo sistemático. Citando a Emmer y Tasche[76], la pérdida puede descomponerse en un componente sistemático (la esperanza condicional de $L_{\%}$ dado Y) y en un componente idiosincrásico:

$$L_{\%} = L_{\%} - \mathrm{E}(L_{\%}|Y) + \mathrm{E}(L_{\%}|Y)$$

Entonces, la varianza de la pérdida de la cartera también puede separarse en sus componentes sistemático e idiosincrásico:

$$\begin{aligned} Var(L_{\%}) &= E\left[Var[L_{\%} - E(L_{\%}|Y)|Y]\right] + VAR[E(L_{\%}|Y)] \\ &= E[Var(L_{\%}|Y)] + Var[E(L_{\%}|Y)] \end{aligned}$$

Bajo el supuesto de que, condicional al valor del factor Y, las variables L_i son variables independientes, idénticamente distribuidas y con varianza finita, el término E[VAR[$L_{\%}$|Y]] converge a cero cuando el número de préstamos de la cartera crece. Como el riesgo específico $L_{\%}$- E[$L_{\%}$|Y] es pequeño (y marginal) comparado al riesgo sistemático E[$L_{\%}$|Y], este último constituye la aproximación natural a $L_{\%}$ cuando la cartera es grande y diversificada. Si w_i es el factor de ponderación del préstamo i, la esperanza condicional de $L_{\%}$ dado Y es:

---

[74] N_2 es la función de distribución normal bivariada.
[75] F(α;1-p;1-ρ) es la representación cópula del modelo de Basilea II.
[76] EMMER S. Y TASCHE D. "Calculating credit risk capital charges with the one-factor model", septiembre de 2003.

$$E\left[L_{\%}\middle|Y\right]=\sum_{i=1}^{n} w_i P\left[I_{D_i}\middle|Y\right] = \sum_{i=1}^{n} w_i N\left(\frac{c_i-\sqrt{\rho_i}Y}{\sqrt{1-\rho_i}}\right)$$

La varianza de E[L|Y] es:

$$Var\left(E\left[L_{\%}\middle|Y\right]\right)=\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \; E\left[N\left(\frac{c_i-\sqrt{\rho_i}Y}{\sqrt{1-\rho_i}}\right)*N\left(\frac{c_j-\sqrt{\rho_j}Y}{\sqrt{1-\rho_j}}\right)\right]-\left(\sum_{i=1}^{n} w_i p_i\right)^2$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \; N_2\left(c_i, c_j; \sqrt{\rho_i \rho_j}\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} w_i p_i\right)^2$$

Por otra parte, la varianza condicional de $L_{\%}$ dado Y es:

$$Var\left(L_{\%}\middle|Y\right)=\sum_{i=1}^{n} w_i^2 P\left[I_{D_i}\middle|Y\right]\left(1-P\left[I_{D_i}\middle|Y\right]\right)=\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \; N\left(\frac{c_i-\sqrt{\rho_i}Y}{\sqrt{1-\rho_i}}\right)*\left(1-N\left(\frac{c_i-\sqrt{\rho_i}Y}{\sqrt{1-\rho_i}}\right)\right)$$

La esperanza de $Var\left[L_{\%}|Y\right]$ es:

$$E\left[Var\left(L_{\%}\middle|Y\right)\right]=\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \; \left(p_i - E\left[P\left[I_{D_i}\middle|Y\right]^2\right]\right)=\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \; \left(p_i - N_2\left[c_i, c_i; \rho_i\right]\right)$$

E[Var ($L_{\%}$|Y)] es despreciable si $\sum_{i=1}^{n} w_i^2$ es pequeño o, como p_i = N(c_i), cuando ρes cercano a 1. De este modo, si la cartera está bien diversificada o si la correlación es cercana a uno:

$$Var\left(L_{\%}\right)= \; Var\left[E\left(L_{\%}\middle|Y\right)\right]+E\left[Var\left(L_{\%}\middle|Y\right)\right]\approx Var\left[E\left(L_{\%}\middle|Y\right)\right]$$

Es decir, si la cartera está suficientemente diversificada la esperanza condicional de $L_{\%}$ dado Y explica la mayor parte de la varianza de la pérdida y por ello es posible aproximar la pérdida $L_{\%}$ mediante E($L_{\%}$|Y). La aproximación será tanto mejor cuanto mayor sea la correlación ρentre activos. En resumen, para cada estadístico de la cartera original hay un estadístico sistemático equivalente, que es el estadístico evaluado sobre la distribución de la pérdida sistemática. El requisito de capital de Basilea II se define como el valor del percentil 99,9% de la pérdida sistemática.

Distribución neutral al riesgo

En una economía con dos activos: el activo A_i de la firma i que sigue un movimiento geométricto browniano y una cuenta de money-market cuyo precio evoluciona en forma determinística a la tasa libre de riesgo r; el precio C_0 en el momento 0 de un derecho contingente que pague $C(A_T)$ en el momento T es:

$$C_0 = E^Q\left(e^{-rt} \; C_T\right)$$

Q es la medida de martingala (o medida neutral al riesgo) según la cual en la dinámica de A la tendencia μse reemplaza por r:

$$A_T = A_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}X\right)$$

O. Vasicek explica que para valuar los tramos de un CDO[77] es preciso usar la distribución de pérdidas neutral al riesgo, similar a la distribución de la pérdida de la cartera dada por P[$L_{\%} \leq \theta$], excepto por el hecho de que las probabilidades de default se evalúan bajo una medida neutral al riesgo *Q*, en la que la tasa de interés libre de riesgo *r* reemplaza a la tasa instantánea μ de rendimiento de los activos del deudor:

$$p^* = P^*[A_T < B] = N\left(\frac{\ln B - \ln A_0 - r\,T + \frac{1}{2}\sigma^2\,T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Como se mencionó en el capítulo II, la probabilidad neutral al riesgo se relaciona con la probabilidad real mediante la siguiente ecuación:

$$p^* = N\left(N^{-1}(p) + \lambda\,\rho_{AM}\,\sqrt{T}\right)$$

En esta expresión, $\lambda=(\mu_M - r)/\sigma_M$) es el precio de mercado del riesgo y ρ_{AM} es la correlación del valor del activo de la firma con el mercado. La distribución de la pérdida neutral al riesgo está dada por:

$$P^*[L_{\%} \leq \theta] = N\left(\frac{\sqrt{1-\rho}\;N^{-1}(\theta) - N^{-1}(p^*)}{\sqrt{\rho}}\right)$$

Por lo tanto, un tramo de CDO que en el momento *T* paga un monto contingente *C(L)*, que depende de la pérdida de la cartera, se valúa en función de la esperanza de *C(L)* respecto de la distribución de P* [$L_{\%} \leq \theta$]:

$$C_0 = e^{-rT}\;E^Q\;(C_T(L))$$

Por ejemplo, el precio de la protección frente a pérdidas que excedan de L_0 es:

$$C_0 = e^{-rT}\;E^Q\;(L - L_0)_+ = e^{-rT}\;\left(p^* - N_2\left(N^{-1}(p^*), N^{-1}(L_0); \sqrt{1-\rho}\right)\right)$$

LGD como variable dependiente del estado de la economía

Michael Pykhtin y Ashiesh Dev [78] desarrollaron el punto de vista de Jon Frye[79], de acuerdo con el cual el ciclo económico no sólo incide en el número de defaults sino también en el valor de las garantías y, por lo tanto, en el recupero de los préstamos. Como en el modelo de Vasicek, en una cartera el deudor *j* tiene una probabilidad de default p_j en el horizonte temporal. Para cada deudor existe una variable aleatoria D_j que toma un valor uno con probabilidad p_j y un valor cero en los restantes casos. La variable aleatoria que describe la solvencia financiera del deudor *j* en el horizonte temporal es:

---

[77] Collateralized Debt Obligations. La distribución de pérdidas real P[$L_{\%} \leq \theta$] se emplea para estructurar los tramos y para calcular la pérdida esperada de cada tramo mientras que la distribución de pérdidas neutral al riesgo se utiliza para valuar los tramos.
[78] PYKHTIN M. y DEV A."Analytical Approach to Credit Risk Modelling", Risk, marzo de 2002.
[79] FRYE JON "Collateral Damage" y "Depressing Recoveries", Risk, abril y noviembre de 2000.

$$X_j = a_j Y + \sqrt{1-a_j^2}\ Z_j$$

Cuando X_j es menor que determinado umbral X_j^D, se produce el default. Pero en este modelo exite una nueva variable aleatoria idénticamente distribuida, Q_j, que representa la fracción del valor nominal del préstamo que se pierde en caso de default del deudor *j*:

$$Q_j = \mu^Q + \sigma^Q W_j \qquad \text{y} \qquad W_j = -b_j Y + \sqrt{1-b_j^2}\ \xi_j$$

Esta variable Q_j es similar a la pérdida en caso de default convencional (LGD), excepto por el hecho de que en este modelo la pérdida porcentual es una función del valor de las garantías y éstas a su vez (como cualquier otro activo) dependen del estado de la economía. Frye las llamó LGD potencial (PLGD) ya que determinan cuál sería la pérdida en caso de que ocurriera el default. A diferencia de otros modelos en los que las variables LGD son independientes de las variables de default, las PLGD capturan el "collateral damage": los estados recesivos no sólo aumentan los defaults sino que también reducen el valor de las garantías.

En las expresiones anteriores, las variables Y, Z_j y ξ_j son variables independientes con una distribución normal estándar. La variable Y representa al factor sistemático y las variables Z_j y ξ_j aportan el riesgo idiosincrásico. La correlación entre el rendimiento de los activos de dos deudores es $\rho^X_{ij}= a_i * a_j$ y la correlación entre las PLGD es $\rho^Q_{ij}= b_i * b_j$. Q_j tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2. La variable W_j también tiene una distribución normal. Pykhtin y Dev mencionan que conservaron esta característica del modelo de Frye (aunque las variables se aparten de los valores que pueden adoptar las pérdidas porcentuales[80]) porque la distribución normal es más fácil de manejar y porque el efecto en los resultados es insignificante para valores realistas de los parámetros.

La pérdida porcentual de la cartera es:

$$L = \sum_{j=1}^{M} w_j Q_j D_j = \sum_{j=1}^{M} w_j \left[\mu^Q + \sigma^Q W_j\right] 1_{\{X_j < X_j^D\}}$$

La pérdida porcentual condicional a un estado de la economía, la pérdida esperada condicional[81] y la pérdida esperada no condicional son[82]:

$$L(Y) = \sum_{j=1}^{M} w_j Q_j(Y) D_j(Y) = \sum_{j=1}^{M} w_j \left[\hat{\mu}_j^Q(Y) + \sigma^Q \sqrt{1-b_j^2}\xi_j\right] 1_{\left\{Z_j < \hat{X}_j^D(Y)\right\}}$$

$$E(L|Y) = \sum_{j=1}^{M} w_j\, \hat{\mu}_j^Q(Y)\, \hat{p}_j(Y)$$

$$E(L) = E\left[E(L|Y)\right] = \sum_{j=1}^{M} w_j \left[\mu^Q\ p_j + \sigma^Q\ a_j b_j\ \phi\left(X_j^D\right)\right]$$

---

[80] En su trabajo Frye propone como alternativa una distribución beta para esta variable, de modo que adopte valores entre [0,1].

[81] Si la cartera es infinitamente grande, todo el riesgo idiosincrásico se diversifica y la pérdida condicional depende exclusivamente del estado de la economía.

[82] ϕ Es la densidad y N la función de distribución acumulada de la distribución normal.

Donde:

$\hat{\mu}^{Q}_{j}(Y) = \mu^{Q} - \sigma^{Q} b_{j} Y$ Es la PLGD esperada condicional del deudor *j*;

$\hat{p}_{j}(Y) = N\left(\hat{X}^{D}_{J}(Y)\right)$ es la probabilidad condicional de default del deudor *j*; y

$\hat{X}^{D}_{J}(Y) = \dfrac{X^{D}_{J} - a_{j}Y}{\sqrt{1-a_{j}^{2}}}$ es su umbral de default condicional a un estado de la economía.

En la expresión de *E(L)*, el último término dentro del paréntesis aparece debido a la dependencia común de las variables de default y de la PLGD respecto del estado de la economía *Y*.

Al igual que la probabilidad de default condicional en el modelo de Vasicek, la PLGD es una función decreciente de *Y*. Por lo tanto, la pérdida asintótica es una función decreciente de *Y*, y el percentil α de la distribución de pérdida está determinado por el percentil (1-α) de la economía:

$$q^{\infty}_{\alpha}(L) = \sum_{j=1}^{M} w_{j}\, \hat{\mu}^{Q}_{j}(Y_{1-\alpha})\, \hat{p}_{j}(Y_{1-\alpha})$$

El capital asintótico es la diferencia entre el percentil *a* de la distribución de pérdida asintótica y la pérdida esperada[83].

$$K^{\infty} = q^{\infty}_{\alpha}(L) - E(L) = \sum_{j=1}^{M} w_{j}\left[\mu^{Q}\left(\hat{p}_{j}(Y_{1-\alpha}) - p_{j}\right) + \sigma^{Q}\, b_{j}\left(Y_{\alpha}\, \hat{p}_{j}(Y_{1-\alpha}) - a_{j}\phi\left(X^{D}_{j}\right)\right)\right]$$

Como destacan Pykhtin y Dev, el capital asintótico es aditivo: el requisito de capital de la cartera es la suma ponderada del requisito marginal de los préstamos individuales.

Algunas cuestiones sobre el capital asintótico

En un trabajo sobre los fundamentos de los modelos de crédito, Michael Gordy[84] mostró que las reglas de capital basadas en la calificación de los deudores, incluidos el Acuerdo de Basilea de 1988 y la revisión que ahora se implementa, son compatibles con una clase general de modelos: los modelos de valor a riesgo. También demostró que la contribución de cada exposición al VAR es "invariante frente a la cartera"[85] sólo si (a) la dependencia entre las exposiciones se basa en un único factor de riesgo sistemático, y (b) ninguna exposición representa más que una proporción arbitrariamente pequeña de la cartera.

[83] En la expresión siguiente $Y_{1-\alpha} = -Y_{\alpha}$.
[84] Título del trabajo de Michael B. Gordy: "A risk-factor model foundation for ratings-based bank capital rules".
[85] O "porfolio-invariant". Esto significa que el capital necesario a partir de la incorporación de un nuevo préstamo depende sólo de las propiedades de dicho préstamo y es independiente de las características de la cartera y de los otros deudores. Los modelos comerciales en general no proporcionan requisitos de capital invariantes, puesto que establecen relaciones de dependencia respecto de múltiples factores de riesgo sistemáticos. En consecuencia, el requisito de capital marginal por la incorporación de un nuevo préstamo varía según su contribución a la diversificación de los restantes instrumentos que integran la cartera.

En la primera parte de su trabajo, Gordy se concentró en los modelos que definen la pérdida a partir de un criterio contable[86]: sólo se computa la pérdida si el deudor incurre en default y no se toman en consideración las variaciones del valor de mercado de los títulos de crédito originadas en los cambios de la calidad crediticia del emisor. En algunos de estos modelos se asume que la pérdida dado el default (LGD) es conocida y no estocástica. Los modelos VaR que admiten una LGD estocástica consideran al riesgo de recupero como puramente idiosincrásico, aunque en la práctica la LGD no sólo es incierta sino que puede estar sujeta al riesgo sistemático. Para dar lugar al riesgo de recupero, tanto sistemático como idiosincrásico, Gordy empleó como variable primitiva a la pérdida y no al default y consideró conocida y no estocástica a la exposición (A_i) con el deudor i. Gordy hace notar que las conclusiones de su trabajo se mantienen, sin embargo, si la incertidumbre sobre A_i es idiosincrásica, condicional al estado del deudor, y si su varianza es finita. En este caso, se interpreta a A_i como la exposición esperada (en unidades monetarias) en caso de default del deudor, en tanto que la variable estocástica U_i es la pérdida por unidad monetaria de exposición (se aplica a U_i el supuesto de independencia condicional, usual para los defaults). En caso de supervivencia, $U_i = 0$. En caso de default, U_i es equivalente a un porcentaje de LGD sobre el instrumento i, que se permite que sea negativo para dar lugar a las posiciones cortas. Para una cartera de n deudores, se define a la tasa L_n de pérdida de la cartera como la tasa de las pérdidas totales respecto de la exposición total:

$$L_n \equiv \frac{\sum_{i=1}^{n} U_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

Se denota como $\mathrm{VaR}_\alpha[L_n]$ al cuantil $q_\alpha(L_n)$:

$$VaR_\alpha [L_n] = q_\alpha (L_n) \equiv \inf\{l_n : \Pr(L_n \leq l_n) \geq \alpha\}$$

Sobre esta base, Gordy asume que:

<u>Supuesto (S-1)</u>: Las variables $\{U_i\}$ están definidas en el intervalo [-1,1] y, condicional a Y, son mutuamente independientes.

<u>Supuesto (S-2)</u>: Si un banco selecciona los préstamos de modo de garantizar que el riesgo idiosincrásico tienda a desaparecer a medida que se incorporan activos, A_i será una secuencia de constantes positivas tal que la participación de la exposición individual más grande en el total de la cartera tienda a 0 a medida que el número de exposiciones se incrementa. Entonces, bajo condiciones muy generales, la distribución condicional de L_n tiende a su esperanza condicional a medida que $n \to \infty$. De un modo más formal:

Proposición 1: Si (S-1) y (S-2) se cumplen, entonces condicional a $Y=y$, $L_n - E[L_n|y] \to 0$, casi con certeza.
Esta proposición dice que si la participación de cada activo en la cartera tiende a cero, el riesgo idiosincrásico de la pérdida del portafolio se diversifica y desaparece completamente. En el límite, la tasa de pérdida converge a una función fija del factor sistemático Y. La demostración se basa fundamentalmente en una ley fuerte de los grandes números. Gordy prueba la proposición 1 en el Apéndice A de su trabajo y llama la atención sobre dos cuestiones: 1) hasta aquí no se impusieron restricciones al número de factores sistemáticos o sobre su

[86] Definición de pérdida book-value o actuarial.

distribución conjunta, y 2) no hay ninguna restricción respecto de la relación entre A_i y la distribución de U_i. Por ejemplo, los préstamos de alta calidad pueden ser también los de mayor tamaño.

Proposición 2: Si (S-1) y (S-2) se cumplen, entonces $V[L_n] - V[E[L_n|Y]] \rightarrow 0$ (también en este caso la demostración se encuentra en el Apéndice A del trabajo de Gordy).

La siguiente proposición es más relevante y dice que el cuantil q_α de la distribución incondicional de la pérdida se aproxima al cuantil q_α de la distribución de $E[L_n|Y]$ a medida que $n \rightarrow \infty$. Aunque por razones técnicas Gordy debe restringir ligeramente el enunciado, en la práctica se cumple que:

$$q_\alpha(L_n) - q_\alpha(E[L_n|Y]) \rightarrow 0$$

Para F_n que denota la función de distribución acumulada de L_n, Gordy demuestra (en el Apéndice B de su trabajo) que:

Proposición 3: Si (S-1) y (S-2) se cumplen, entonces para todo $\varepsilon>0$.

$$F_n(q_\alpha(E[L_n|Y]) + \varepsilon) \rightarrow [\alpha,1]$$
$$F_n(q_\alpha(E[L_n|Y]) - \varepsilon) \rightarrow [0,\alpha]$$

Significa que si el capital es estrictamente mayor que el cuantil q_α de $E[L_n|Y]$, entonces se asegura que en el límite habrá de cubrir α o más de la distribución de pérdidas. En cambio, si el capital es estrictamente menor que el cuantil q_α de $E[L_n|Y]$, se asegura que en el límite no podrá cubrir α.

Esta proposición permite sustituir los cuantiles de la tasa de pérdida L_n, muy difíciles de calcular, por los cuantiles de $E[L_n|Y]$, que son relativamente fáciles de calcular. La relación se cumple sin grandes restricciones: los activos pueden tener tamaños, PD y LGD esperadas muy diferentes. La cartera no debe limitarse a los préstamos tradicionales, sino que puede incluir derivados de crédito, garantías y productos financieros estructurados tales como CDOs y ABSs. Si bien hay límites al dominio de U_i, no hay restricciones al comportamiento de las $E[U_i|y]$. Estas funciones pueden ser discontinuas y no monótonas y pueden tener distinta forma para cada deudor. Tampoco existen restricciones para el vector de factores de riesgo Y, que puede tener cualquier longitud finita y cualquier distribución (continua o discreta). Pero si se imponen dos restricciones adicionales, los cuantiles de $E[L_n|Y]$ toman una forma asintótica simple y deseable:

<u>Supuesto (S-3)</u>: El factor de riesgo sistemático Y es unidimensional. Esto implica imponer un único ciclo de negocios como fuente de toda dependencia entre las exposiciones.

<u>Supuesto (S-4)</u>: Si $E[U_i|y]$ es continua en y en el intervalo B, que contiene a $q_\alpha(Y)$, y $E[L_n|y]$ es no decreciente en y en dicho intervalo B, para todo $n > n_o$ (un número real menor a infinito) se asegura que la proximidad de q_α de $E[L_n|Y]$ está asociada a la proximidad del único cuantil q_α de Y. Sin este supuesto, los cuantiles de la cola de la distribución de pérdidas dependerían de cómo varía la pérdida esperada condicional de cada deudor en función de y. Se podría evitar este problema de un modo más restrictivo si se requiere que $E[U_i|y]$ sea no decreciente en y para todo i, pero de este modo se dejarían afuera a los instrumentos de cobertura (como los derivados de crédito) y a los deudores con riesgo contra cíclico. El supuesto (S-4) permite que algunas U_i estén asociadas en forma negativa con Y, siempre que en forma agregada y asintótica dichos instrumentos no alteren la

dependencia monótona de las pérdidas respecto del factor sistemático, cuando *Y* está cerca del evento relevante para la definición de la cola. Este supuesto permite que $E[L_n|y]$ sea discontinua o localmente no monótona en *y*, cuando *y* no está en la proximidad de $q_\alpha(Y)$.

Proposición 4: Si (S-3) y (S-4) se cumplen, entonces:

$$q_\alpha\left(E\left[L_n|Y\right]\right) = E\left[L_n|q_\alpha(Y)\right] \qquad para\ n > n_o$$

Gordy destaca que la importancia de este resultado radica en la linearidad del operador esperanza. Mientras puede ser difícil obtener $q_\alpha(E[L_n|Y])$, $E[L_n|q_\alpha(Y)]$ es simplemente el promedio de las pérdidas esperadas condicionales de los activos individuales ponderadas por su exposición.

Las proposiciones 1, 3 y 4 juntas permiten determinar el requisito de capital mediante una regla simple. A cada activo *i*, le corresponde un capital por unidad monetaria de valor de libros igual a $c_i \equiv E[U_i|q_\alpha(Y)]+\varepsilon$ para un ε arbitrariamente pequeño. El requisito de capital depende sólo de las características del instrumento *i* y, por lo tanto, la regla es invariante respecto de la conformación de la cartera. En el límite, el capital es tal que la probabilidad de ser superado por la pérdida de la cartera no es mayor que $1-\alpha$. Si se agregan otras condiciones de regularidad para eliminar la posibilidad de discontinuidades en los cuantiles deseados, la probabilidad de insolvencia converge a $1-\alpha$, para $\varepsilon=0$. Para ello, es preciso asegurar que la función asintótica de distribución acumulada de las pérdidas de la cartera sea suave y que tenga derivadas finitas en la proximidad del valor de su cuantil α. La siguiente condición es suficiente para sortear los límites impuestos por la proposición 3.

<u>Supuesto (S-5)</u>: En el intervalo *B* que contiene a $q_\alpha(Y)$, la función de distribución acumulada del factor *Y* es continua y creciente, $E[U_i|y]$ es diferenciable y existen números reales $\underline{a}$, $\bar{a}$ y $n_o<\infty$, tales que $0<\underline{a}\leq E'[L_n|y])\leq \bar{a}<\infty$ para todo $n> n_o$ (este supuesto permite que una parte no trivial de la cartera esté formada por instrumentos con cobertura o préstamos a deudores contra-cíclicos).

Proposición 5: Gordy demuestra que si también se cumple (S-5), entonces:

$$\Pr\left(L_n \leq E\left[L_n|q_\alpha(Y)\right]\right) \rightarrow \alpha \quad \text{y} \quad \left|q_\alpha(L_n) - E\left[L_n|q_\alpha(Y)\right]\right| \rightarrow 0$$

Por lo tanto, para una cartera “de granularizado infinitamente fino”, la regla de capital invariante respecto de la cartera da una probabilidad de solvencia exactamente igual a α.

Bajo los supuestos de la proposición 5, la condición $L_n = q_\alpha(L_n)$ es asintóticamente equivalente a $Y= q_\alpha(Y)$, lo que implica que el VaR marginal es igual a $E[U_i|q_\alpha(Y)]$. En conclusión, la invarianza respecto de la composición de la cartera depende de:

1) el supuesto de que la cartera está asintóticamente granularizada (S-2); y
2) la existencia de un único factor de riesgo sistemático (S-3).

Las carteras que no están asintóticamente granularizadas conservan riesgo idiosincrásico no diversificado y, entonces, las contribuciones marginales al VaR dependen de la composición del resto de la cartera. Gordy apunta que, desde un punto vista práctico, el riesgo idiosincrásico residual no impide que el requisito de capital se calcule en función de la calificación crediticia ya que los grandes bancos internacionalmente activos están usualmente cerca del ideal asintótico. Por otra parte, si la diversificación es insuficiente, existen técnicas que permiten corregir el cálculo a nivel del total de la cartera.

En cambio, el supuesto (S-3) es menos inocuo desde un punto de vista práctico y puede relajarse sólo levemente. Gordy ejemplifica este punto con el siguiente ejemplo: Si un grupo de deudores depende de un factor de riesgo "local", las variables $\{U_i\}$ dentro de ese grupo, condicionales al factor de riesgo global Y, ya no serán independientes entre sí, aunque se mantengan independientes de las variables $\{U_j\}$ que están fuera de su grupo. En tanto las exposiciones agregadas de los grupos representen un porcentaje trivial de la cartera (es decir, podrían sumarse como una exposición individual sin violar el supuesto S-2), la dependencia puede dejarse de lado[87]. Pero, como hasta los bancos más grandes tienen concentraciones de tipo industrial y geográfico, si estos grandes sectores no son perfectamente comonótonos se pierde la invarianza respecto de la cartera. Gordy supone el caso de dos factores de riesgo y de deudores que difieren en su sensibilidad a dichos factores. Las realizaciones (y_1, y_2) asociadas a un determinado cuantil de la distribución de pérdidas dependerían del conjunto particular de deudores que constituyan la cartera. De un modo intuitivo, el requisito de capital apropiado para un préstamo otorgado a un deudor muy sensible a Y_1 dependería de si los demás deudores son predominantemente sensibles a Y_1 (en cuyo caso el préstamo aportaría escasa diversificación) o a Y_2 (en cuyo caso la diversificación sería grande).

Distribución asintótica de la pérdida a valores de mercado

Gordy demostró que las proposiciones formuladas para el caso actuarial se mantienen para el caso de la valuación a mercado, con la salvedad de que como la tasa de pérdida valuada a mercado puede no tener límites, debe completarse el supuesto S-1 con la exigencia de que el momento segundo condicional de la pérdida, $E[U_i^2|y]$, exista y sea finito para todos los instrumentos. Al igual que en el caso actuarial, el capital asintótico que se aplica a los activos valuados a mercado es $\mu_i(q_\alpha(y))$.

CAPÍTULO V
EL RIESGO NO SISTEMÁTICO EN EL VaR

Como vimos, Vasicek mostró que cuando la cartera es grande y diversificada, la pérdida porcentual condicional a un estado de la economía Y converge a su esperanza, $p(Y)$, y que, por lo tanto, la función de distribución acumulada de la pérdida, $P[L_{\%} \leq \theta]$, y su inversa, el valor del percentil α de $L_{\%}$, o requisito de capital, pueden aproximarse mediante $p(Y)$ [88]. La convergencia a la forma límite $p(Y)$ se verifica aun cuando los préstamos no tengan la misma ponderación, siempre que la cartera esté suficientemente diversificada.

Esto se debe a que el modelo de factor único con distribuciones elípticas permite aproximar la distribución de la pérdida mediante una distribución basada sólo en el riesgo sistemático. Se vio que la esperanza de $L_{\%}$

[87] Gordy menciona que, como el acuerdo de Basilea II se va a aplicar sobre todo a los grandes bancos internacionales, el factor único va a representar al ciclo global. En consecuencia, el requisito de capital no va a capturar el efecto de los factores locales y es posible que la calibración del modelo a un único factor internacional lleve a subestimar el capital necesario para los bancos regionales o especializados.

condicional a *Y*, *p(Y),* es el componente sistemático de $L_{\%}$. Como la esperanza de $Var[L_{\%}|Y]$ tiende a cero cuando aumenta el número de préstamos de la cartera, la varianza de $L_{\%}$ puede aproximarse por la varianza de *p(Y)*, es decir, por la varianza de componente sistemático. No sólo la varianza puede aproximarse por *p(Y)* sino también otras medidas de riesgo, como la función cuantil o el "expected shortfall".

En este capítulo se presentan los conceptos centrales de trabajos muy conocidos relacionados con las carteras pequeñas o que no están suficientemente granularizadas, es decir aquellas carteras en las que está presente el riesgo no sistemático.

El ajuste por granularidad

En un trabajo titulado "Unsystematic Credit Risk", R. Martin y T. Wilde[89] compararon dos medidas del riesgo no sistemático: el ajuste por granularidad y la fórmula de contribución al riesgo a partir de una aproximación mediante el punto de silla. Ambos enfoques permiten calcular el cambio de los cuantiles debido a la incorporación de un nuevo riesgo a la cartera y el VaR o capital económico por la suma o concentración de riesgos.

El ajuste por granularidad fue presentado originalmente por Gordy[90] como un ajuste empírico en base a cálculos en los que empleó CreditRisk+. Luego Wilde[91] aportó la fórmula para el ajuste del modelo de un solo factor. De un modo muy simplificado, en el ajuste por granularidad el riesgo se asocia a la concentración de la cartera. Si se quiere calcular la distribución de pérdidas de una cartera no granularizada, primero se calcula el riesgo sistemático o riesgo presente en la cartera infinitamente granularizada y luego se adiciona el riesgo por concentración o ajuste por granularidad. El impacto marginal de este riesgo extra en los cuantiles de la distribución de pérdida puede evaluarse en forma analítica con gran precisión sobre la base de un estudio de Gourieroux, Laurent y Scaillet[92], en el que se mostró cómo hallar las derivadas primera y segunda del VaR para el riesgo de mercado.

Si tenemos $Y_\varepsilon = X+\varepsilon U$, donde X e *U* son variables aleatorias no necesariamente independientes, Y_ε es la "perturbación" de $X=Y_0$ originada por la incorporación de la cantidad ε de un nuevo riesgo representado por U (este nuevo riesgo puede interpretarse como el riesgo por concentración[93]). El VaR o $q_\alpha(Y_\varepsilon)$ es el cuantil de Y_ε al nivel de confianza $1-\alpha$, tal que $P(Y_\varepsilon \leq q_\alpha(Y_\varepsilon))=1-\alpha$. Por el Teorema A de Gourieroux, Laurent y Scaillet, la primera derivada del VaR es:

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon} q_\alpha(Y_\varepsilon)\right|_{\varepsilon=0} = E(U | X = q_\alpha(X))$$

[88] Se denomina "capital asintótico" al capital calculado mediante la fórmula analítica que corresponde a las carteras infinitas y diversificadas.
[89] MARTIN R. y WILDE T. "*Unsystematic Credit Risk*", Risk, diciembre de 2002.
[90] GORDY M. "*A Risk Factor Model Foundation For Ratings Based Capital Rules*", Federal Reserve Board, Washington, febrero de 2001.
[91] WILDE T. "*Probing Granularity*", Risk, agosto de 2001.
[92] GOURIEROUX C.; LAURENT J. Y SCAILLET O. "*Sensitivity Analysis of Values at Risk*", Journal of Empirical Finance, 2000.
[93] Gourieroux, Laurent y Scaillet enfocaron el problema en el marco del VaR para el riesgo de mercado y su objetivo era determinar el impacto marginal de agregar una nueva posición a la cartera existente, representada por la variable X. Pero el análisis se adapta al VaR para el riesgo de crédito. En tal caso, la cartera sistemática juega el rol de la cartera existente y el impacto marginal es el que produce el riesgo de concentración de todos los activos.

Es decir, agregar una pequeña cantidad de riesgo εU agrega su valor esperado al percentil, condicional a que X ya se encuentre en el percentil. Si E(U|X)=0, como ocurre para el riesgo de crédito, agregar U para el primer orden en □ no modifica el cuantil. Entonces, el efecto de U debe buscarse en el segundo orden. Esto es lo que sucede en el ajuste por granularidad, en el cual U representa el riesgo de concentración y satisface la condición de no ser sesgado: E(U|X)=0. En consecuencia, el ajuste por granularidad es un efecto de segundo orden. Por el Teorema B:

$$\left.\frac{d^2}{d\varepsilon^2} q_\alpha(Y_\varepsilon)\right|_{\varepsilon=0} = \left.-\frac{d}{dx}V(x) - \frac{d(\ln(f_x))}{dx}\,V(x)\right|_{x=q_\alpha(x)} = \left.-\frac{1}{f_x}\frac{d(V(x)\,f_x)}{dx}\right|_{x=q_\alpha(x)}$$

En esta expresión, V(x)=V(U|X=x) es la varianza de la variable aleatoria condicional U|X=x, y f_x es la función de densidad de X.

El análisis de Wilde, como el trabajo de Gouriéroux, se basa en el desarrollo de la fórmula de la función cuantil de la distribución de la pérdida de una cartera homogénea mediante la expansión de sus series de Taylor. Para ello debe cumplirse el requisito de que la varianza condicional V(U|x) sea localmente continua y diferenciable en x. La fórmula de Wilde del ajuste por granularidad para el modelo de un sólo factor tiene gran similitud con el Teorema B. Sea Y_n la distribución de pérdidas de la cartera Π_n. Cuando *n* tiende a infinito, Y_n tiende a X y la diferencia en términos de percentiles es el ajuste por granularidad. Si se introduce u=1/n, lo que implica que $\varepsilon = 1/n^{1/2} = u^{1/2}$, resulta que [94]:

$$\left.\frac{d\,q_\alpha}{d\,u}\right|_{u=0} = \left.-\frac{1}{2f_x}\frac{d}{d\,x}(V(x)\,f_x)\right|_{x=q_\alpha}$$

La aproximación mediante el punto de silla

En la aproximación por el punto de silla[95] el riesgo se asocia a un activo nuevo. Aunque no tiene relación directa con el ajuste por granularidad, Martin, Thompson y Browne emplearon esta técnica para calcular el impacto marginal de una nueva exposición dentro de la cartera. La fórmula de Martin, Thompson y Browne es:

$$\left.\frac{\delta\,q_\alpha(Y_u)}{\delta\,u}\right|_{u=0} = \left.\frac{1}{\hat{q}}\frac{\delta}{\delta\,u}\left(\ln \mathrm{M}_{Y_u}(s)\right)\right|_{u=0,\,s=\hat{q}}$$

En el cual el punto de silla, $\hat{q}$, es la solución a:

---

[94] Para una comprensión completa, ver MARTIN y WILDE "*Unsystematic Credit Risk*". Debe tenerse presente que $V(U_n|X=x)=V(x)/n$. Los autores hacen notar que aunque su fórmula de granularidad es una derivada primera, está tomada respecto de $u=\varepsilon^2$ y por esa vía se relaciona con la derivada segunda respecto de ε. La derivada primera respecto de ε desaparece para todo X.

[95] Saddlepoint method introducido por MARTIN R., THOMPSON K. y BROWNE C. en "*VAR: Who Contributes and How Much*", Risk, agosto de 2001.

$$\left.\frac{\delta\, \mathrm{M}_X(s)}{\delta\, s}\right|_{\hat{q}} = q_\alpha \mathrm{M}_\mathrm{X}(\hat{q})$$

Para evaluar la primera ecuación, se calcula la función generatriz de momentos de Y_u, $M_Y(s)$. Sustituyendo, se obtiene el equivalente al ajuste por granularidad de Wilde:

$$\left.\frac{\delta\, q_\alpha}{\delta\, u}\right|_{u=0} = \frac{1}{\hat{q}\ \mathrm{M}_X(\hat{q})}\left.\frac{\delta\, \mathrm{M}_{Y_u}(s)}{\delta\, u}\right|_{u=0, s=\hat{q}} = \frac{\hat{q}}{2\ \mathrm{M}_X(\hat{q})}\int_{-\infty}^{\infty} V(x)\, e^{\hat{q}X}\, \mathrm{f}(x)\, \mathrm{d}x$$

A pesar de su apariencia similar, el método de punto de silla y la fórmula de Wilde dan, en general, resultados diferentes. Sin embargo, Martin y Wilde mencionan un caso en el que ambas fórmulas coinciden: el modelo CreditRisk+ con un solo sector, en el cual la varianza condicional V(Y│X=x) es proporcional a la variable sistemática X[96] y esta última tiene una distribución gamma, f(x) ∝ $X^{□-1}e^{-X/□}$, con media igual a la pérdida media de la cartera □□□□ y varianza □□^{2}, por lo que el punto de silla es

:

$$\hat{q} = \frac{1}{\beta} - \frac{\alpha}{q_\alpha}$$

El ajuste por granularidad según el punto de silla es:

$$\left.\frac{\delta\, q_\alpha}{\delta\, u}\right|_{u=0} = \frac{\hat{q}\,\dfrac{\sigma_{US}^2}{\mu}}{2\ \mathrm{M}_\mathrm{X}(\hat{q})}\int_{-\infty}^{\infty} X\ e^{\hat{q}X}\, \mathrm{f}(x)\, \mathrm{d}x = \frac{\sigma_{US}^2 (q_\alpha - \mu)}{2\,\mu\,\beta}$$

A igual resultado se llega mediante la fórmula de ajuste de Wilde:

$$\left.\frac{\mathrm{d}q_\alpha}{\mathrm{d}u}\right|_{u=0} = -\frac{\sigma_{US}^2}{2\mu\, f_x}\left.\frac{d(X\ f_x)}{dx}\right|_{x=q_\alpha} = -\frac{\sigma_{US}^2}{2\mu} X^{1-\alpha} e^{X/\beta}\left.\frac{d\left(X^\alpha\ e^{-X/\beta}\right)}{dx}\right|_{x=q_\alpha} = \frac{\sigma_{US}^2 (q_\alpha - \mu)}{2\,\mu\,\beta}$$

En conclusión, Martin y Wilde muestran que, salvo en el caso de CreditRisk+, el resultado de ambos métodos difiere. Explican que el punto de silla da una mejor aproximación a la forma de la distribución mientras que el

[96] V(Y)=□$^2_{US}$ X/□ , donde □$^2_{US}$ es el componente no sistemático de la varianza.

ajuste por granularidad es muy bueno en la cola en la que X es significativa. En el ajuste por granularidad el percentil buscado $q_{\alpha}[Y]$ puede no coincidir con la suma de sus series de Taylor, aunque éstas sean convergentes. Sin embargo, como en la práctica sólo se busca una buena aproximación al percentil y no un ajuste perfecto, el ajuste por granularidad resulta apropiado ya que siempre da una medida muy precisa del riesgo de concentración.

Aplicación del ajuste por granularidad al capital regulatorio

Michael Gordy se ocupó del ajuste por granularidad cuando analizó la base teórica de las reglas de capital[97]: Las carteras del mundo real tienen un número finito de deudores y tienen concentraciones de distinto tamaño (sólo las carteras de préstamos para consumo pueden acercarse al ideal asintótico). Para las carteras de grandes préstamos comerciales debe encontrarse una metodología que permita evaluar el riesgo idiosincrásico residual. Gordy partió de la cartera homogénea, en la cual todos los préstamos tienen el mismo tamaño y la misma función de pérdida esperada condicional $\mu(y)$. Bajo determinados supuestos:

$$q_{\alpha}(L_n) = \mu(q_{\alpha}(Y)) + O(n^{-1})$$

Es decir, la diferencia entre el VaR de una cartera homogénea finita y la aproximación asintótica es proporcional a $1/n$. Decir que la tasa de convergencia es $1/n$ es decir que para un n suficientemente grande, la diferencia entre el VaR y su aproximación asintótica se achica a la mitad cuando n se duplica. Por otra parte, a menos que se corra un modelo de crédito, no hay modo de asegurar cuándo n es suficientemente grande para que esta relación se cumpla. Para ver si la regla $1/n$ funciona para valores realistas de n, Gordy examinó el comportamiento del VaR para una versión de CreditRisk+ que permite una solución analítica del problema[98]. Mediante este procedimiento, calculó el VaR (α=99,5%) como puntos porcentuales para 5 grados de calidad crediticia y carteras de 200, 500, 1000, 2000, 5000 e infinitos préstamos homogéneos y encontró que incluso para las carteras de 200 deudores el incremento por granularidad es pequeño en sentido absoluto (siempre menor a 0,6%). Sin embargo, como el capital asintótico es menor para los deudores con mejor clasificación crediticia[99], el incremento relativo puede ser grande para los deudores investment grade. Para una cartera homogénea de 200 deudores con clasificación A, el incremento por granularidad es prácticamente igual al capital asintótico.

También probó que el ajuste por granularidad es una función lineal de $1/n$. Para una cartera de baja calidad (CCC) la relación lineal se mantiene hasta n=200. Para una cartera de regular calidad (BB), hay apartamientos de la relación lineal visibles pero pequeños cuando n<500. Para una cartera de calidad (A) los apartamientos son visibles para n=1000. En conclusión, el ajuste por granularidad sobrestima el incremento teórico óptimo para las carteras pequeñas y de alta calidad.

El cálculo del ajuste por granularidad para la cartera no homogénea es más complejo. Una alternativa es "mapear" la cartera real en una cartera homogénea comparable, haciendo coincidir los momentos de la distribución de la pérdida. Luego el ajuste por granularidad de la cartera comparable se aplica a la exigencia de

[97] GORDY M. "*A risk-factor model foundation for ratings-based bank capital rules*", 2003.
[98] Mediante una fórmula que generaliza el trabajo de Wilde ya mencionado.
[99] En el ejemplo, la exigencia porcentual de capital es del 0,364% para un deudor A y del 37,117% para un deudor CCC.

capital de la cartera real. En términos generales, se divide la cartera real en sub-carteras[100] y luego se construye una cartera comparable con *n** préstamos de tamaño y parámetros iguales (p.ej. probabilidad de default, dependencia respecto del factor sistémico, LGD, y contribución de los riesgos sistemático e idiosincrásico a la varianza). Cada uno de los parámetros de la cartera comparable se obtiene como un promedio ponderado de los parámetros de las sub-carteras. El número de préstamos de la cartera comparable *n** puede interpretarse como la inversa de la medida de concentración dada por el índice Herfindahl[101], en el que v_i es el tamaño de cada préstamo. Cuanto más alto es el índice, más concentrada es la exposición.

$$IndiceHerfindahl = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)^2}$$

Gordy pensaba que la información necesaria para emplear el método del mapeo imponía una carga mínima a los bancos, ya que el único requisito adicional, el índice Herfindahl de las sub-carteras, puede calcularse a partir del tamaño de las exposiciones individuales. Sin embargo, de acuerdo con Martín y Wilde[102], el ajuste por granularidad fue criticado en los comentarios sobre la propuesta de Basilea II de 2001, ya que muchos bancos lo encontraron demasiado complejo para un esquema de capital regulatorio. Efectivamente, el ajuste por granularidad existía en la propuesta original (párrafo 456 del Consultative Document "The Internal Ratings-Based Approach", de enero de 2001). Posteriormente el tratamiento del riesgo de crédito fue trasladado del Pilar 1 al Pilar 2, y limitado a la recomendación de que los bancos estructuren políticas internas y sistemas y controles que permitan identificar, medir, monitorear y controlar las concentraciones. Sin embargo, la evaluación del riesgo no sistemático sigue siendo importante para la gestión del riesgo y el cálculo del capital económico.

El ajuste por granularidad en el modelo con variables estándares normalmente distribuidas

Emmer y Tasche[103] desarrollaron fórmulas para calcular la contribución al VaR, tanto a partir del ajuste por granularidad de Gordy y Wilde, como a partir de un enfoque semi-asintótico. Si se suponen las variables *L* e *Y*, la primera de las cuales denota la pérdida de la cartera y la segunda el factor sistemático, la esperanza condicional de *L* dado el factor *Y* puede escribirse como $E[L \mid Y] = g \circ Y$. La función g es continua y estrictamente creciente o decreciente y la distribución de *Y* es continua para todo *y*. Entonces, para $\alpha \in (0,1)$, el cuantil de *L* es:

$$q_\alpha(L) = \inf\{l : \mathrm{P}[L \le l] \ge \alpha\}$$

Entonces, el ajuste por granularidad resulta ser una expansión de Taylor de segundo orden:

$$q_\alpha(L) = q_\alpha\left(E(L|Y) + h(L - E(L|Y))\right)\Big|_{h=1}$$

[100] Los préstamos de cada sub-cartera tienen los mismos parámetros (PD, LGD, dependencia del factor sistemático, etc.). Sólo se permite que difieran los tamaños de los préstamos.
[101] En economía el Indice Herfindahl es un indicador de la concentración en una industria. Se define como la suma del cuadrado de la participación en el mercado de cada firma individual. Tiene un rango de 0 a 10.000. A menor valor, mayor competencia.
[102] MARTIN R. y WILDE T. "*Unsystematic Credit Risk*", Risk, diciembre de 2002.
[103] EMMER S. Y TASCHE D. "*Calculating credit risk capital charges with the one-factor model*", septiembre de 2003.

$$\approx q_\alpha\left(E(L|Y)\right) + \frac{\delta\, q_\alpha}{\delta\, h}\left(E(L|Y) + h\left(L - E(L|Y)\right)\right)\Big|_{h=0} + \frac{1}{2}\frac{\delta^2\, q_\alpha}{\delta\, h^2}\left(E(L|Y) + h\left(L - E(L|Y)\right)\right)\Big|_{h=0}$$

Donde la derivada primera de q_α se anula y la derivada segunda es (ver el Teorema B):

$$\frac{\delta^2\, q_\alpha}{\delta\, h^2}\left(E(L|Y) + h\left(L - E(L|Y)\right)\right)\Big|_{h=0} =$$

$$= -\frac{\delta\, V\left[L|Y = g^{-1}(y)\right]}{\delta\, y}\Bigg|_{y=g(q_{1-\alpha}(Y))} - \frac{V\left[L|Y = q_{1-\alpha}(Y)\right]}{f_L\left(\mathrm{g}(q_{1-\alpha}(Y))\right)}\frac{\delta\, f_L}{\delta\, y}(y)\Bigg|_{y=g(q_{1-\alpha}(Y))}$$

En esta expresión f_L es la densidad de E[L|Y] y, como en el modelo de factor único g es una función decreciente de Y[104], el cuantil α de L_n se corresponde con el cuantil 1-α de *Y*. Específicamente, en el modelo de Vasicek[105]:

$$g_n(y) = \sum_{i=1}^{n} w_i\; N\left(\frac{c_i - \sqrt{\rho_i}\; y}{\sqrt{1-\rho_i}}\right)$$

Como g_n es decreciente, la densidad f_L de $E[L_n|Y]$ es:

$$f_{L_n}(y) = -\frac{\phi\left(g_n^{-1}(y)\right)}{g_n'\left(g_n^{-1}(y)\right)}$$

Si c y ρ son únicos, la aproximación del cuantil $q_\alpha(L_n)$ de la pérdida es:

$$q_\alpha(L_n) \approx N\left(\frac{c - \sqrt{\rho}\; q_{1-\alpha}(Y)}{\sqrt{1-\rho}}\right) - \left(2\sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}}\;\phi\left(\frac{c - \sqrt{\rho}\; q_{1-\alpha}(Y)}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} w_i^2$$

$$\left\{\left(\sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}}\;\phi\left(\frac{c - q_{1-\alpha}(Y)\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right)\left(1 - 2\,\mathrm{N}\left(\frac{c - q_{1-\alpha}(Y)\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)\right) + \left(q_{1-\alpha}(Y) - \sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}}\frac{c - q_{1-\alpha}(Y)\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right)\mathrm{N}\left(\frac{c - q_{1-\alpha}(Y)\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right)\mathrm{N}\left(\frac{q_{1-\alpha}(Y)\sqrt{\rho} - c}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right\}$$

Si la cartera es homogénea, w_i=1/n para todo *i*. En caso contrario, como ya se vio $(\Sigma w_i^2)^{-1}$ (o inversa del índice Herfindahl), es el tamaño aproximado de la cartera que se necesita para construir una cartera homogénea equivalente. En el caso de la cartera asintótica Σw_i^2 tiende a 0, entonces $q_\alpha(L_n)$ se reduce al primer término de la expresión anterior.

El requisito de capital de cada préstamo individual

En el caso de la cartera infinitamente granularizada, como el requisito de capital de la cartera es lineal respecto de w_i, el requisito de cada préstamo individual es:

[104] La prosperidad económica reduce la probabilidad de default de los deudores. Debe tenerse presente que en la formulación de Martin y Wilde, Y_ε es una función creciente de X.
[105] En las expresiones siguientes, ϕ es la densidad y N la función de distribución de la distribución normal estándar.

$$q_{\alpha,i} \approx w_i \; N\left(\frac{c_i - \sqrt{\rho_i}\; q_{1-\alpha}(Y)}{\sqrt{1-\rho}_{\,i}}\right)$$

Puesto que $q_\alpha(L_n)$ es una función homogénea positiva de orden 1 respecto de w_i, para las carteras con riesgo sistemático Emmer y Tasche proponen representar el requisito de capital a nivel de transacción como la derivada parcial ponderada de $q_\alpha(L_n)$[106]:

$$q_{\alpha,i} = w_i \, \frac{\delta\, \mathrm{q}_\alpha(w)}{\delta\, w_i}$$

La contribución al riesgo de cada transacción interviene en el cálculo de una conocida herramienta de gestión: el RORAC o rendimiento del capital ajustado por riesgo[107], que es el coeficiente entre el rendimiento esperado del activo y el requisito de capital individual:

$$RORAC_i = \frac{w_i \; r_i}{q_{\alpha,i}}$$

La función $q_\alpha(L_n)$ a su vez puede representarse como la suma ponderada de sus derivadas parciales. De este modo, la suma de los requisitos individuales permite una asignación completa del VaR[108]. A diferencia del capital asintótico, la aproximación mediante derivadas parciales no es invariante respecto de la composición de la cartera. Sin embargo, según los autores esta característica no sería una desventaja, habida cuenta de que la invarianza respecto de la composición de la cartera implica ausencia de sensibilidad ante las concentraciones. Este modo de calcular el requisito de capital responde a un enfoque "*top-down*":

$$q_\alpha(L_n) = \sum_i w_i \, \frac{\delta\, \mathrm{q}_\alpha(L_n)}{\delta\, w_i}$$

Los autores advierten que la precisión de este enfoque está sujeto a que se cumpla que Σw_i^2 tiende a 0 cuando *n* es grande; en caso contrario es más apropiado el enfoque semi-asintótico.

El capital semi-asintótico

A diferencia del supuesto de Basilea II, en el cual todas las exposiciones se suponen infinitamente pequeñas, en el caso del capital semi-asintótico se supone que hay una exposición fija, mientras que las restantes sí cumplen con el requisito de diversificación. El préstamo singular tiene una exposición porcentual *w* respecto de la cartera, un umbral de default ***a*** y correlación τ. Entonces, la pérdida de la cartera puede representarse como[109]:

---

[106] Por aplicación del teorema de Euler. Ver el desarrollo de la fórmula en EMMER y TASCHE "*Calculating credit risk capital charges with the one-factor model*".
[107] RORAC: Return on Risk Adjusted Capital.
[108] El VaR no es subaditivo (aunque con los supuestos necesarios para lograr la invarianza de las carteras infinitamente granularizadas se preserva la subaditividad). Gordy destaca que si L_A y L_B son las pérdidas de las carteras de los bancos A y B, no necesariamente $VaR_\alpha[L_A+L_B] \leq VaR_\alpha[L_A] + VaR_\alpha[L_B]$, lo que implica que la fusión de ambos bancos podría incrementar el VaR. La subaditividad es uno de los 4 requisitos de las medidas de riesgo coherentes.
[109] $\sum_{i=2}^{n} w_i = 1$

$$L_n = w\,1_{\left\{\sqrt{\tau}\;Y+\sqrt{1-\tau}Z\le a\right\}} + (1-w)\sum_{i=2}^{n} w_i\,1_{\left\{\sqrt{\rho}Y+\sqrt{1-\rho}Z_i\le c\right\}}$$

Cuando en esta cartera n→∞, se obtiene la función de pérdida porcentual semi-asintótica:

$$L(w) = w\,1_D + (1-w)\;p(Y)$$

Con $D = \sqrt{\tau}\;Y + \sqrt{1-\tau}Z \le a$ y $p(Y) = P[L=1|Y] = P\left[Z \le \dfrac{c-\sqrt{\rho}\;Y}{\sqrt{1-\rho}}\right]$

El requisito de capital semi-asintótico del préstamo con exposición *w* y default D, al nivel de confianza α, es:

$$q_{\alpha,i=1}(w) = w\;P[D|L(w) = q_\alpha(L(w))]$$

El requisito de capital definido por L(*w*) debe calcularse como la suma de los requisitos de capital individual previamente determinados (*bottom up approach*). Debe notarse que L(*w*) no es invariante: la dependencia respecto de la exposición *w* no es sólo lineal, ya que el factor $P[D|L(w)=q_\alpha(L(w))]$ también depende de *w*. Es decir, el capital semi-asintótico toma en cuenta la concentración de la cartera.

Emmer y Tasche muestran que el capital semi-asintótico puede producir resultados contra intuitivos. Por ejemplo, si la probabilidad de default del préstamo bajo análisis es muy pequeña, P[D]<1-α, de acuerdo con el capital semi-asintótico sería preferible concentrar toda la exposición en dicho préstamo[110]:

$$\lim_{w\to 1} P[D|L(w) = q_\alpha(L(w))] = \begin{cases} 1, & p > 1-\alpha \\ 0, & p < 1-\alpha \end{cases}$$

En realidad, esta es una deficiencia que presenta el VaR como medida de riesgo: concentrar la exposición en un evento con baja probabilidad de ocurrencia puede reducir drásticamente la exigencia de capital. Gordy ejemplifica este punto mostrando que si se divide la cartera se puede manipular el VaR: Una cartera compuesta de un solo préstamo con probabilidad de default menor a 1-α tiene un VaR_α=0, pero el mismo préstamo hace una contribución positiva al VaR si se lo computa dentro de una cartera infinitamente granularizada. Por otra parte, el VaR no da información sobre la distribución de la pérdida más allá del cuantil que se fija como objetivo.

Expected shortfall

Para evitar estos fenómenos, Emmer y Tasche sugieren emplear otras medidas de riesgo, como por ejemplo el *expected shortfall* (*ES*) o Conditional Value-at-Risk (CVaR). Dados una variable aleatoria *Z* y un nivel de confianza α, el CVaR puede definirse como:

$$CVaR_\alpha(Z) = \mathrm{E}[Z|Z \ge q_\alpha(Z)]$$

Gordy muestra que si se cumplen las condiciones que hacen que el VaR sea invariante frente a la cartera, el *ES* también es invariante[111]. El *ES* asintótico puede expresarse como:

$$\mathrm{ES}_\alpha\left[E\left[L_n \middle| Y\right]\right]=\frac{\sum_i c_i A_i}{\sum_i A_i} \qquad \text{y} \qquad c_i = E\left[L_i \middle| Y \geq q_\alpha(Y)\right]$$

Donde c_i es la exigencia de capital por unidad monetaria de exposición en *i*. Como c_i depende sólo de la relación de dependencia entre L_i e *Y*, el *ES* es invariante frente a la composición de la cartera.

El enfoque semi-asintótico en el contexto del CVaR fue analizado por Tasche y Theiler[112] . La definición de *CVaR* aplicada a nuestra variable L(*w*) resulta en:

$$CVaR_\alpha(L(w)) = w\,\mathrm{P}\left[D \middle| L(w) \geq q_\alpha(L(w))\right] + (1-w)\,\mathrm{E}\left[p(Y) \middle| L(w) \geq q_\alpha(L(w))\right]$$

En consecuencia, el requisito de capital CVaR semi-asintótico del préstamo con exposición *w* y default D, al nivel de confianza α, es:

$$CVaR_{\alpha, i=1}(w) = w\,P\left[D \middle| L(w) \geq q_\alpha(L(w))\right]$$

Este requisito CVaR no es invariante. En consecuencia, debe ser calculado en forma separada para cada activo y también en este caso el requisito total de la cartera se determina con un enfoque *bottom-up*. Igual que el VaR semi-asintótico, tiene la ventaja de ser sensible a los efectos de la concentración de la cartera.

Tasche y Theiler muestran mediante un ejemplo numérico la contribución al riesgo de un préstamo con muy baja probabilidad de default (0,2%) respecto de una cartera de menor calidad (con una probabilidad de default del 2,5%). Esta contribución relativa es medida de manera diferente según el esquema que se utilice: Basilea I produce una contribución relativa proporcional a *w* (o ponderación del préstamo respecto de la cartera) en tanto que Basilea II (VaR) muestra una contribución relativa menor que Basilea I (el VaR produce la impresión errónea de que el riesgo de la cartera mejora con una exposición arbitrariamente alta en el préstamo de mayor calidad). En cambio, con el CVaR el beneficio respecto de Basilea I cesa cuando la concentración en esta exposición de mejor calidad excede determinada proporción.

Expected excess loss

Otra medida alternativa es el *expected excess loss* (*EEL*). Para una variable aleatoria *Z* y un objetivo de tasa de pérdida θ>0 es:

$$\mathrm{EEL}_\theta[Z] \equiv \inf\left\{z : E[Z-z]^+ \leq \theta\right\}$$

---

[110] Los autores hacen notar que la probabilidad condicional $P[D|L(w)=q_{1-p}(L(w))]$ puede ser indefinida para w>1/2. Por tal motivo, no hay un límite para el caso α=1-p.

[111] $\left|\mathrm{ES}_\alpha(L_n) - \mathrm{ES}_\alpha\left[E\left[L \middle| Y\right]\right]\right| \to 0$

[112] TASCHE D. Y THEILER U. "*Calculating Concentration-Sensitive Capital Charges with Conditional Value-at-Risk*", 2003, papel de trabajo.

Bajo este esquema, el capital debe ser tal que la pérdida esperada en exceso del capital sea menor o igual que la tasa de pérdida fijada como objetivo. Es decir, el requisito de capital $EEL_{\theta}[L_n]$ se expresa como porcentaje de la exposición total. El *EEL* es sensible a la cola de la distribución de pérdidas, de modo que comparte las ventajas del *ES*. En opinión de Gordy, es una medida relevante para las agencias de seguros de depósito, ya que la tasa θ puede representar la pérdida esperada que deben soportar en caso de falencia de un banco. Sin embargo, el *EEL* no es un requisito de capital invariante frente a la composición de la cartera: Si se tienen dos carteras homogéneas[113], *a* y *b*, $E[L_a|y]$ es la pérdida esperada de la cartera *a* condicional a $Y=y$; y:

$$E\left[(L_a - y)^+\right] \rightarrow E\left[\left(E[L_a|y] - y\right)^+\right]$$

El capital asintótico *EEL* para la cartera *a*, c_a, se fija de modo de alcanzar el objetivo θ. Igual procedimiento se cumple para la cartera *b*. Si el capital asintótico *EEL* fuera invariante frente a la composición de la cartera, $c_m=(c_a+c_b)/2$ haría que $E[(E[L_m|y]-c_m)^+]=\theta$. Por la construcción de la cartera mixta, tenemos que:

$$E[L_m|y] = \frac{E[L_a|y] + E[L_b|y]}{2}$$

Pero como en general, el umbral de *Y* al que $E[L_a|y]=c_a$ no es igual al umbral de la cartera b, en la mayoría de los casos la siguiente inecuación es estricta:

$$E\left[\left(E[L_m|y] - c_m\right)^+\right] \leq E\left[\left(\frac{E[L_a|y] - c_a}{2}\right)^+\right] + E\left[\left(\frac{E[L_b|y] - c_b}{2}\right)^+\right] = \theta$$

Esto implica que c_m es una exigencia de capital muy elevada para la cartera mixta asintótica. Gordy efectuó el cálculo del capital asintótico para dos carteras y encontró que el exceso que produce c_m es pequeño cuando los ratings crediticios de las carteras son adyacentes. Sin embargo cuando la calificación crediticia de las carteras que se fusionan es muy diferente, c_m sobrestima el capital asintótico de manera significativa.

Cuantificación del ajuste por granularidad

Si seguimos a Michael Pykhtin y Ashiesh Dev[114], cada vez más bancos usan el enfoque VaR para la administración del riesgo de crédito. La mayoría genera la distribución de pérdidas de las carteras mediante simulaciones Monte Carlo, pero estos resultados tienen un “ruido inherente” cuya magnitud decrece muy lentamente a medida que crece el número N de corridas en la simulación[115]. En consecuencia, el tiempo de computación que se requiere para reducir este ruido a un nivel aceptable es muy grande. Las expresiones analíticas permiten calcular fácilmente el capital asintótico pero, salvo para el caso de la cartera infinitamente granularizada, no constituyen una buena aproximación a la verdadera distribución de la pérdida incondicional.

El ajuste por granularidad, G, es la diferencia entre el verdadero requisito de capital y el capital asintótico. M. Pykhtin y A. Dev analizaron los resultados que se obtienen con los diferentes enfoques que se emplean para

[113] Ver la demostración en GORDY MICHAEL: “*A risk-factor model foundation for ratings-based bank capital rules*”, 2003.
[114] PYKHTIN M. y DEV A.“*Analytical Approach to Credit Risk Modelling*”, Risk, marzo de 2002.

[115] A una tasa de $\left(\sqrt{N}\right)^{-1}$

calcular el ajuste por granularidad sobre la base de los siguientes parámetros: α=99,5%; ρ=20% y LGD=50%[116]. Dichos enfoques son:

1) Escalamiento por los desvíos estándar, de Tom Wilde[117]. En este enfoque, σ representa al desvío estándar de la pérdida porcentual de la cartera, tanto finita (con N préstamos) como infinita. El ajuste por granularidad es:

$$G = K^{N} - K^{\infty} = K^{\infty} \frac{\sigma_L^N - \sigma_L^{\infty}}{\sigma_L^{\infty}}$$

2) Basilea II. El ajuste era:

$$G = (0{,}4 + 1{,}2\ LGD)\left(0{,}76 + 1{,}10\frac{p}{F}\right)\frac{1}{N}$$

Aquí F es el requisito de capital: F=N(N^{-1}(p)+□$^{1/2}$ N^{-1}(□))/(1-□)$^{1/2}$-p, bajo los supuestos de α=99,5% y ρ=20%. El ajuste por granularidad, que debía sumarse al requisito de capital, se basaba en el trabajo de Gordy sobre el comportamiento de G respecto de N.

3) Fórmula de ajuste de T. Wilde[118]:

$$G = -\frac{1}{2\ M\ f(y_{1-\alpha})}\frac{d}{dy}\left[\frac{(V(y)\ f(-y))}{d\mathrm{E}(L|Y)/dy}\right]_{y=y_{1-\alpha}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

Con los supuestos de Basilea II y α=99,5% y ρ=20%, resulta en:

$$G = (0{,}4 + 1{,}2\ LGD)\left(0{,}32 + 4{,}19\frac{p}{F}\right)\frac{1}{N}$$

Este enfoque se basa en el supuesto de que la varianza condicional es una función lineal de la probabilidad condicional de default. En su trabajo, M. Pykhtin y A. Dev corrigieron el supuesto sobre la varianza condicional, de modo que el ajuste por granularidad resulta ser:

$$G = (0{,}4 + 1{,}2\ LGD)\left(0{,}32 + 4{,}19\frac{p}{F}\right)\frac{1}{N} - 1{,}6\ LGD\,(F + p)\left(0{,}0075 + 4{,}19\frac{p}{F}\right)\frac{1}{N}$$

La comparación de las aproximaciones con el cálculo exacto del ajuste por granularidad realizado en base al caso de la cartera homogénea dio los siguientes resultados:

---

116 El requisito de capital se puede calcular en forma analítica para carteras de cualquier tamaño, en tanto sean homogéneas (ya que la pérdida total depende sólo del número de defaults, con prescindencia de cuáles son los deudores que incurren en default). Pykhtin y Dev calcularon el requisito de capital de este modo y lo compararon con los resultados que se obtienen mediante los diferentes métodos que existen para calcular el ajuste por granularidad.

117 WILDE T. "*IRB Approach Explained*", Risk, mayo de 2001

118 WILDE T., "*Probing Granularity*", ecuación5 y PYKHTIN y DEV "*Analytical Approach*...", ecuación 25, con Y en el primero igual a –Y en el segundo. Cuando E[L|Y]=Y, se obtiene la fórmula de Wilde en "*Unsystematic Credit Risk*".

1) El escalamiento por los desvíos estándar sobrestima en un 20% el ajuste por granularidad necesario y la función de ajuste es más cóncava que el resultado exacto.

2) La fórmula de Basilea proporcionaba un ajuste inadecuado, especialmente para las probabilidades de default más bajas, debido a que el capital asintótico fue calculado con el modelo de Vasicek y el capital de la cartera finita con una versión de CreditRisk+.

1) El enfoque de T. Wilde produce un resultado adecuado sólo para las probabilidades de default pequeñas. Pero si se ajusta la varianza condicional del modo propuesto por Pykhtin y Dev, el enfoque produce un ajuste casi idéntico al cálculo exacto del ajuste por granularidad.

BIBLIOGRAFÍA

BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION; "*Convergencia internacional de medidas y normas de capital*"; 2004; www.bis.org.

BOWERS N. y otros; "*Actuarial Mathematics*"; USA; The Society of Actuaries; 1997.

BLUHM C., OVERBECK L. y WAGNER C. "*An Introduction to Credit Risk Modeling*", Chapman & Hall/CRC, USA, 2003.

CROUHY M., GALAI D. y MARK R; "*Risk Management*"; USA; Mc.Graw-Hill; 2001.

DAYKIN C, PENTIKAINEN T. Y PESONEN M. "*Aplicaciones prácticas de la Teoría del Riesgo para Actuarios*", Biblioteca Die Kölnische Rüc, Buenos Aires, Argentina, 1996.

DUFFIE D. y SINGLETON K. "*Modeling term structures of defaultable bonds*", Review of Financial Studies 12(4): pág. 687-720.

ERVIN D. y WILDE T.; "*Pro-cyclicality in the New Basel Accord*"; Risk; **(*)**.

EMBRECHTS P., MCNEIL A. y STRAUMANN D; "*Correlation and Dependency in Risk Management: Properties and Pitfalls*"; en: Risk Management: Value at Risk and Beyond, ed. M.A.H. Dempster, Cambridge University Press; Cambridge, 2002; pág. 176-223.

FRYE JON; "*Collateral Damage*"; Risk; abril de 2000 **(*)**.

FRYE JON; "*Depressing Recoveries*"; Risk; noviembre de 2000 **(*)**.

GORDY MICHAEL; "*A risk-factor model foundation for ratings-based bank capital rules*"; Board of Governors of the Division of Research and Statistics, Board of Governors of the Federal Reserve System; Washington DC; USA; 2003; www.defaultrisk.com.

GOURIEROUX, C.; LAURENT J.P. y SCAILLET O.; "*Sensitivity Analysis of Values at Risk*"; Journal of Empirical Finance, 7; 2000; y en www.ires.ucl.ac.be/DP/IRES_DP/2000-2.pdf.

HEATH D.; JARROW R. Y MORTON A.; "*Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology*"; Econometrica; 1992.

HUGHSTON L. y TURNBULL S. "*Credit Derivatives Made Simple*"; Risk **(*)**.

HULL JOHN; "*Options, Futures and Other Derivatives*"; USA; Prentice Hall; 1997.

JORION PHILIPPE; "*Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*"; USA; Mc.Graw-Hill; 2001.

JOUANIN J., RIBOULET G. y RONCALLI T.; "*Financial Applications of Copula Functions*"; julio de 2003; http://gro.creditlyonnais.fr/content/rd/home_copulas.htm

LANDO David; "*Credit Risk Modeling – Theory and Applications*"; USA; Princeton University Press; 2004.

MARTIN R. y WILDE T. "*Unsystematic Credit Risk*", Risk, diciembre de 2002 **(*)**.

MERTON ROBERT; "*On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates*"; Journal of Finance, 29, pp. 449-70.

NELSEN ROGER; "*An introduction to Copulas*"; New York; Springer; 1999.

PYKHTIN M. y DEV A.; "*Analytical Approach to Credit Risk Modelling*"; Risk; marzo de 2002 **(*)**.

SOBERHART J. y KEENAN S.; "*The Need for Hybrid Models*"; Risk **(*)**.

TASCHE D. y EMMER S; "*Calculating credit risk capital charges with the one-factor model*"; 2003; www-m4.mathematik.tu-muenchen.de/m4/pers/tasche

TASCHE D. y THEILER U.; "*Calculating Concentration-Sensitive Capital Charges with Condicional Value-at-Risk*"; 2003;
www-m4.mathematik.tu-muenchen.de/m4/pers/tasche

TASCHE DIRK; "*The single factor approach to capital charges in case of correlated loss given default rates*"; 2004; www-m4.mathematik.tu-muenchen.de/m4/pers/tasche

VASICEK OLDRICH; "*Loan portfolio value*"; 2002; en **(*)** y
www.moodyskmv.com/conf04/pdf/papers/dist_loan_port_val.pdf

VASICEK OLDRICH; "*Probability of loss on loan portfolio*"; 1987;
www.moodyskmv.com/research

VASICEK OLDRICH; "*Limiting loan loss probability distribution*"; 1991;
www.moodyskmv.com/research

WILDE TOM "*IRB Approach Explained*", Risk, mayo de 2001**(*)**.

WILDE TOM "*Probing Granularity Risk*", Risk, agosto de 2001**(*)**.

(*) También en GORDY M. y otros; "*Credit Risk Modelling – The Cutting-edge Collection – Technical Papers published in Risk 1999-2003*"; Londres; Risk Books; 2003.