9
Análisis de portafolio

"No debes poner todos los huevos en una sola canasta"
Refrán popular

Un inversionista racional trata de maximizar su rentabilidad y minimizar el riesgo asociado. Ese decisor se enfrenta a un problema clásico de cómo repartir una suma de dinero entre diferentes opciones de inversión; en particular, cuando se trata de inversiones en la Bolsa. Aquí él debe escoger un grupo de papeles o acciones para conformar lo que se conoce como un **portafolio de inversión**. El problema de la **selección de portafolio** surge porque la rentabilidad (básicamente determinada por la diferencia entre el precio de venta y el precio de compra[1]) de las acciones depende de muchos factores por fuera del control del decisor. Aquí surge un problema de decisión bajo riesgo. Intuitivamente, un inversionista evitará configurar su portafolio con una sola acción, de manera que comprará un cierto número de acciones diferentes; así mismo, evitará configurar su portafolio con acciones que se comporten de manera similar; cuando todas las acciones aumentan su rentabilidad, le va a ir muy bien, pero cuando todas bajen a la vez, puede quebrarse. El inversionista trata entonces de hacer lo que dice la sabiduría popular, o sea, que no pone "todos los huevos en una misma canasta". Por intuición, pues, tratará de diversificar de manera que cuando la pérdida que pueda experimentar en una(s) acción(es), se compense con la ganancia en otra(s) acción(s). La manera como se puede conformar un portafolio de manera que se diversifique y que por lo tanto, se obtenga una alta rentabilidad, con un riesgo aceptable (no todo el riesgo se puede eliminar), se conoce como selección de portafolio. Para abordar este tema es necesario tener a la mano algunos conceptos básicos de Probabilidad y Estadística, por lo tanto se recomienda al lector la lectura del Apéndice dedicado a repasar los conceptos básicos sobre esos temas.

Riesgo de un portafolio: riesgo sistemático y no sistemático

---

[1] Estrictamente hay que incluir los dividendos: $R_j = \frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_t} - 1$

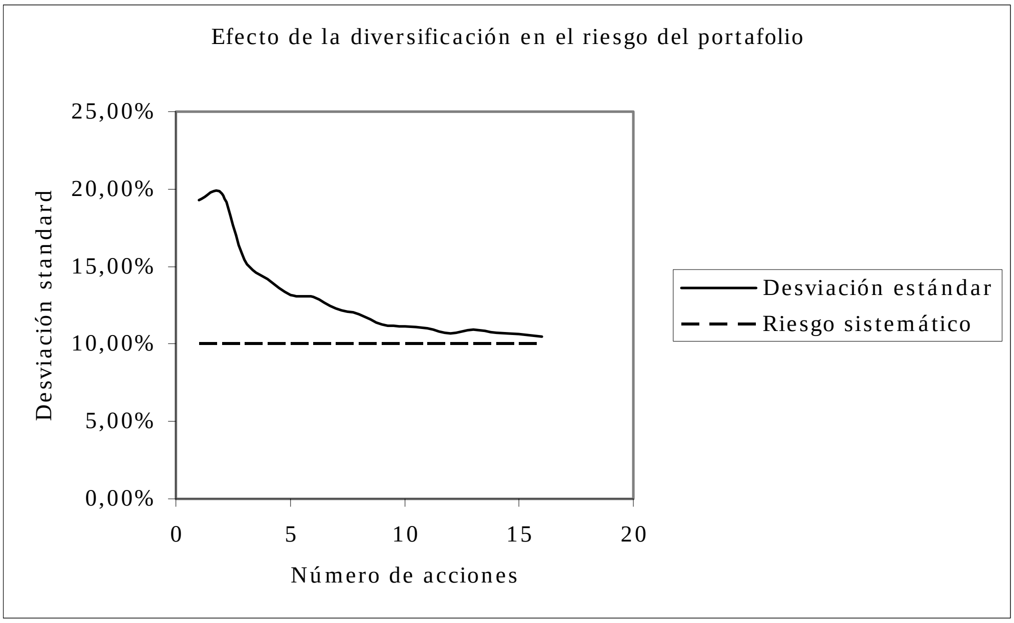
Los precios de las acciones varían por razones diversas. Estas variaciones implican riesgo para el inversionista. Se pueden distinguir dos clases de riesgo asociados a una acción: el **riesgo sistemático** y el **riesgo no sistemático**. El primero se debe a lo que se conoce como el riesgo del mercado y está asociado a los cambios en la economía por factores internos o externos, cambios en las políticas de los países asociados, guerras, etc.; esto significa que es un riesgo que no puede compensarse adquiriendo una cierta diversidad de acciones. Esto es, es un **riesgo no diversificable**. El segundo, el riesgo no sistemático, se debe a factores propios o internos de la firma; es único de esa compañía y es independiente de los factores económicos, políticos o sociales. A este tipo de riesgo se asocian factores tales como huelgas, competencia, cambios tecnológicos, etc. Al ser intrínsecos de una acción, es posible compensar sus efectos comprando acciones de diversas firmas, de manera tal que si una firma se ve afectada por unas causas negativas, se espera que a las otras no les suceda lo mismo y pueda compensarse el efecto negativo. Esto es, es un **riesgo diversificable**. La diversificación de un portafolio permite entonces, ***reducir*** el riesgo no sistemático. Es importante enfatizar que por lo general, la diversificación *reduce* el riesgo -el no sistemático- pero no lo elimina totalmente, pues el riesgo sistemático no se puede eliminar.

Riesgo total de una acción
= riesgo sistemático (de mercado, no diversificable) + riesgo no sistemático (no relacionado con el mercado, diversificable)

A medida que se aumenta el número de acciones en un portafolio, el riesgo no sistemático se reduce de manera asintótica. Cuando se seleccionan entre 15 y 20 acciones de manera aleatoria, el riesgo no sistemático se reduce casi a cero. Este resultado fue presentado por Evans y Archer en 1968. Se estima que en una acción el 30% del riesgo se debe a causas sistemáticas, no diversificables.

La diversificación no reduce el riesgo sistemático. Esto se puede apreciar en la siguiente tabla y la correspondiente gráfica. Se combinaron el número de acciones en el portafolio y la medida de riesgo del portafolio por medio de su desviación estándar. Las acciones utilizadas en este ejemplo son de la Bolsa de Bogotá y cotizadas entre enero de 1990 y abril de 1997.

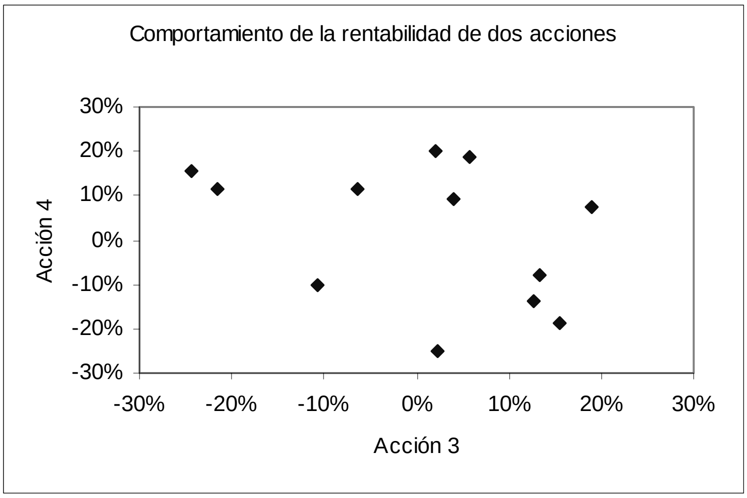
N de acciones	Desviación estándar
1	19,27%
2	19,72%
3	15,42%
4	14,19%
5	13,14%
6	13,04%
7	12,30%
8	11,92%
9	11,24%
10	11,15%
11	11,00%
12	10,70%
13	10,91%
14	10,70%
15	10,62%
16	10,48%



Para ilustrar el efecto de la diversificación, se puede calcular el riesgo, medido por la varianza, de dos y cuatro acciones[2]. Así:

Mes	Acción 3	Acción 4
1	18,87%	7,59%
2	13,42%	-7,83%
3	2,32%	-25,11%
4	-10,81%	-10,08%
5	-21,58%	11,54%
6	12,57%	-13,72%
7	15,42%	-18,73%
8	-6,32%	11,50%
9	5,71%	18,72%
10	4,00%	9,25%
11	2,12%	20,02%
12	-24,44%	15,72%
Media	0,94%	1,57%
Varianza	1,83%	2,26%
Desviación estándar	13,54%	15,03%

Gráficamente se observa una cierta tendencia a que los resultados de las rentabilidades son contrarios. Cuando una sube, la otra baja.



---

2 Los datos de precios de acciones utilizados para los ejemplos, fueron recopilados por Marcela Tirado, estudiante de X semestre de la Carrera de Economía de la Universidad Javeriana.

Cuando se calcula la covarianza de estas dos acciones, el resultado confirma el indicio visual que se tuvo.

La covarianza está definida como:

$$COV_{ij} = \sum_{1}^{m}\sum_{1}^{m}\frac{\left(R_i - \overline{R_i}\right)\left(R_j - \overline{R_j}\right)}{n}$$

En Excel esta función se encuentra en las funciones Estadísticas:

=COVAR(matriz1;matriz2) matriz1 son los datos de la variable j y matriz2 son los de la variable j.

En el caso de estas dos acciones, la covarianza es -0,7581%

La varianza de la combinación de dos variables está definida como:

$VAR_{ij} = \alpha_1^2 VAR_1 + \alpha_2^2 VAR_2 + 2\alpha_1\alpha_2 COV_{12}$

Si estas dos acciones se combinan en un portafolio en proporción de 50% y 50%, entonces la varianza del portafolio está dada por:

VARp = (0,5)2x1,83% +(0,5)2x2,26% -0,5x0,5x0,7581% = 0,6437%

Obsérvese aquí el papel que juega la covarianza negativa. Esta es la idea estadística básica detrás de la diversificación. Un decisior en forma intuitiva buscará las acciones que tengan covarianza negativa (por ejemplo, no invertirá todo su dinero en una sola acción o en acciones de un mismo sector.) Obsérvese también que la varianza de la combinación de las dos acciones (el portafolio) es menor que la varianza individual de cada acción. Aquí opera la diversificación.

El modelo de selección de portafolio

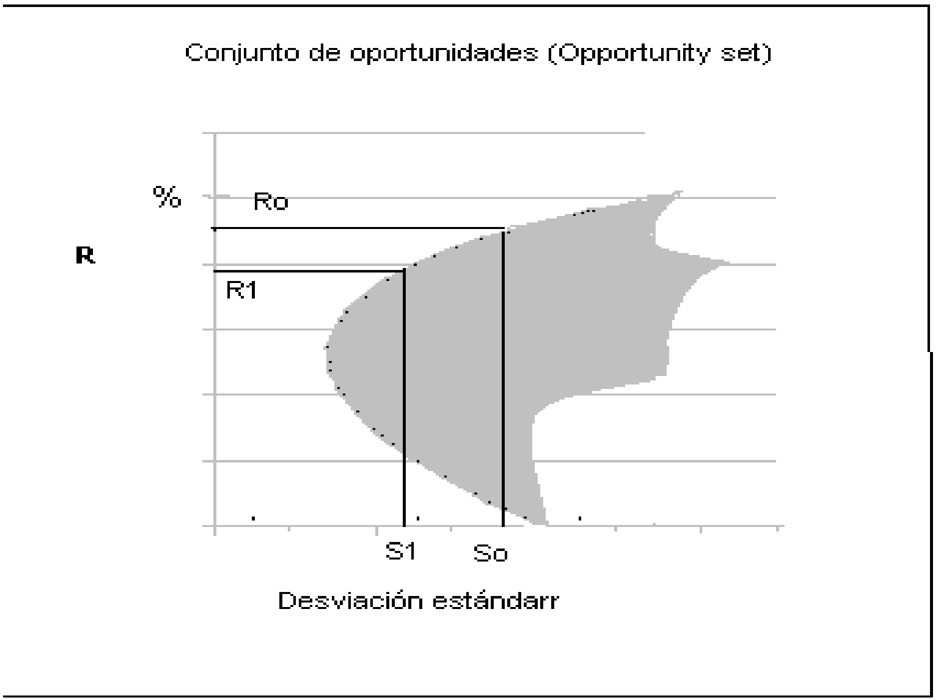
A la solución del problema de selección de portafolio contribuyeron varios pioneros. El primero de ellos fue Harry Markowitz desde 1952; después de ese importante aporte, se sucedieron, entre otros, Fama y Miller, Tobin y en cuanto se refiere al modelo CAPM, Sharpe, Lintner, y Fama. Todas estas lecturas son bastante densas y se van a utilizar los conceptos ya "procesados" que se encuentran en muchos libros de Finanzas (en particular se hace referencia a Levy y Sarnat y a Van Horne).

Markowitz propuso desde 1952, la regla del "valor esperado-varianza" (en la literatura en inglés se conoce como la regla E-V (por ***e****xpected* ***v****alue-***v****ariance*). Según esta regla un decisor preferirá un proyecto A sobre un proyecto B si alguna de estas afirmaciones es válida:

- La rentabilidad esperada de A es mayor o igual a la de B **y** la varianza de A es menor que la de B
- La rentabilidad esperada de A es mayor que la de B **y** la varianza de A es menor o igual a la de B

La genialidad de Markowitz fue utilizar estas ideas y los conceptos básicos de Estadística presentados arriba y aplicarlos al problema de cómo dividir una suma de dinero en inversiones de acciones de manera que se minimizara la varianza total del portafolio compuesto de cierto número de acciones; esto debía lograrse de manera que la suma de la proporción de cada acción fuera igual al total del monto que se deseaba invertir, esto es las proporciones debían sumar 1. Por el otro lado, el promedio ponderado de las rentabilidades de todas las acciones consideradas debía ser igual a una cifra prestablecida. La solución de este problema hasta hace algunos años, era en realidad, numéricamente complicado y parece ser que ese hecho convirtió el tema en tabú; hoy es posible resolverlo en segundos, con la ayuda de una buena hoja de cálculo.

La combinación de todas las posibilidades de las acciones producía un infinito número de combinaciones (conjunto de oportunidades, *opportunity set*), que al limitarlas estableciendo las condiciones estipuladas, este conjunto infinito de posibilidades tenía una frontera. (Ver figura)

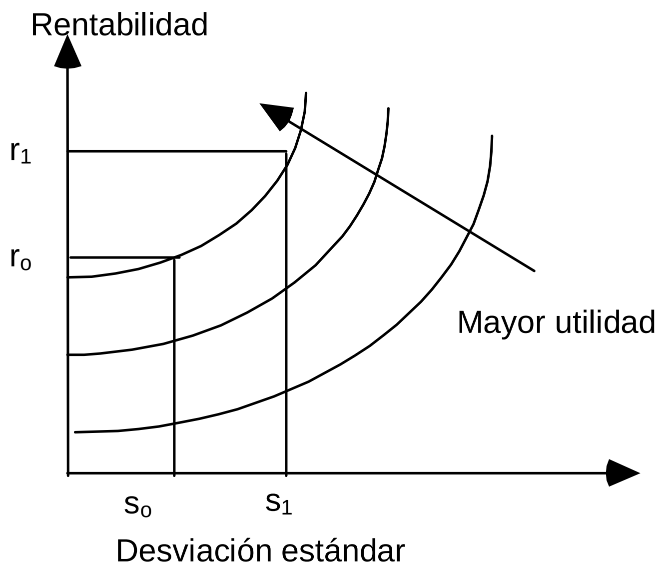


Un decisor racional que esté dispuesto a aceptar un nivel de riesgo (desviación estándar) s_1, no escogerá ninguna de las combinaciones que se sitúen debajo de r_1; así mismo, un decisor racional que desee una rentabilidad r_o, no escogerá ninguna combinación que se encuentre a la derecha de s_o.

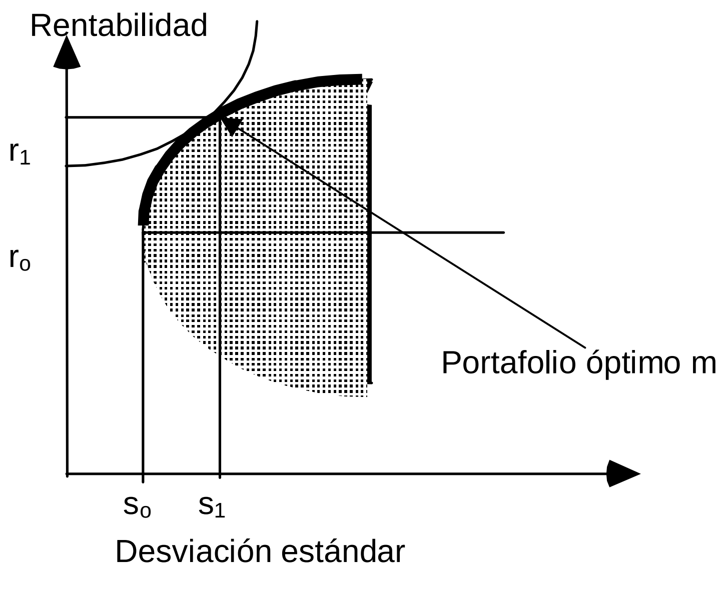
Todo esto significa que el decisor escogerá una combinación (portafolio), que se encuentre en la línea punteada de la figura. Esta línea se llama **frontera eficiente** porque no hay ningún portafolio que presente mayor rentabilidad, dado un nivel de riesgo (desviación estándar), ni ninguno que presente menor nivel de riesgo (desviación estándar) dado un nivel de rentabilidad. Esto descarta entonces todas las combinaciones por debajo y a la derecha de esta frontera eficiente. El problema ahora es determinar cuál será el punto en esa línea que deberá escoger el decisor.

Cuando se trata de escogencia bajo riesgo, ya se sabe que el decisor no maximiza su valor esperado monetario, sino el valor esperado de su utilidad. Con un poco de análisis y observación de la realidad, se puede concluir, de manera intuitiva que una persona estará dispuesta a asumir más riesgo si recibe una rentabilidad más que proporcionalmente mayor que el riesgo incremental asumido.

En estas condiciones, supone que la relación entre riesgo y rentabilidad es, gráficamente, la siguiente:



Un decisor que hiciera intercambios entre riesgo y utilidad, moviéndose a lo largo de una de esas curvas, obtendría la misma utilidad (léase siempre satisfacción en el sentido más amplio). Teóricamente, pues, era obvio suponer que el portafolio óptimo para un decisor sería aquel punto común de una curva de indiferencia y la frontera eficiente. Sólo que no es fácil (y no lo era hasta hace algunos años) definir la frontera eficiente y la curva de indiferencia.



Ahora que se tiene una visión intuitiva del problema y su solución, se puede abordar de manera formal y analítica.

El problema planteado por Markowitz establecía que debía escogerse un portafolio que minimizara la varianza total, sujeto a un valor preestablecido de la rentabilidad y que la suma de las proporciones de cada una de las acciones escogidas sumara 1.

En forma matemática, entonces, es:

$$
\begin{aligned}
&Min\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\alpha_k\alpha_j\sigma_{jk} \\
&s.a \\
&\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 1 \\
&\sum_{i=1}^{m}\alpha_i R_i = R
\end{aligned}
$$

Obsérvese que la función objetivo que se desea minimizar no es lineal. Esto hizo difícil su solución, hasta hace unos años. Nótese también que no se restringe el valor de α_i en cuanto a signo, lo cual significa que se puede incluir en el portafolio acciones que no se tienen, pero que se venden a futuro; un valor negativo de la proporción significa que en lugar de comprar esa acción, se vende; pero si no se tiene, se vende a futuro, con lo cual se recibe el dinero ahora, que se utiliza para comprar acciones con proporción positiva para después venderlas y con ese dinero comprar las acciones que se vendieron a futuro y cumplir así el compromiso. Esta posibilidad permite reducir la varianza mucho más que si se restringieran las proporciones a valores positivos. Esto es cierto, en teoría, pues en la práctica no existen mecanismos ágiles para vender a futuro. Cuando se acepta que estas ventas a futuro no son posibles, entonces hay que añadir la restricción a las proporciones α_i de ser mayores o iguales a cero.

En la función objetivo está expresada una operación de matrices. El vector (matriz) de proporciones α_i multiplica dos veces a la matriz σ_{ij}. Esta matriz de covarianzas se calcula a partir de las rentabilidades de las acciones y pretende medir qué tan al unísono se mueven las acciones del portafolio. Así,

$$\begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \dots & \dots & \sigma_{n1} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \sigma_{nn-1} \\ \sigma_{1n} & \dots & \dots & \sigma_{n-1n} & \sigma_{nn} \end{matrix}$$

La curva entonces, se construye calculando esta optimización para varios valores de R, hasta cuando se pueda trazar la curva.

Para cuatro acciones, se tiene:

Mes	Acción 1	Acción 2	Acción 3	Acción 4
1	18,25%	19,13%	18,87%	7,59%
2	2,03%	2,14%	13,42%	-7,83%
3	-11,15%	-5,27%	2,32%	-25,11%
4	-14,50%	-6,27%	-10,81%	-10,08%
5	21,37%	4,01%	-21,58%	11,54%
6	14,28%	4,00%	12,57%	-13,72%
7	11,50%	9,40%	15,42%	-18,73%
8	-6,11%	-4,04%	-6,32%	11,50%
9	-2,81%	-1,07%	5,71%	18,72%
10	-14,23%	-8,56%	4,00%	9,25%
11	-10,71%	-8,83%	2,12%	20,02%
12	15,15%	10,22%	-24,44%	15,72%
Media	1,92%	1,24%	0,94%	1,57%
Varianza	1,68%	0,68%	1,83%	2,26%
Desviación estándar	12,95%	8,23%	13,54%	15,03%
Proporción	25%	25%	25%	25%

La covarianza de estas cuatro acciones se calcula a partir de la definición original y usando matrices. Se calcula primero el excedente de rentabilidad sobre la media de cada acción, por ejemplo, para la acción 1 en el mes 1, el excedente será (18,25%-1,92% = 16,33%)

La matriz de excedentes de rentabilidad es:

Mes	Acción 1	Acción 2	Acción 3	Acción 4
1	16,33%	17,89%	17,93%	6,02%
2	0,11%	0,90%	12,48%	-9,40%
3	-13,07%	-6,51%	1,38%	-26,68%
4	-16,42%	-7,51%	-11,75%	-11,65%
5	19,45%	2,77%	-22,52%	9,97%
6	12,36%	2,76%	11,63%	-15,29%
7	9,58%	8,16%	14,48%	-20,30%
8	-8,03%	-5,28%	-7,26%	9,93%
9	-4,73%	-2,31%	4,77%	17,15%
10	-16,15%	-9,80%	3,06%	7,68%
11	-12,63%	-10,07%	1,18%	18,45%
12	13,23%	8,98%	-25,38%	14,15%

Ahora, como se deben encontrar todas las combinaciones, según la fórmula original para encontrar el producto de "todas con todas", entonces se debe trasponer esa matriz. La transposición de matrices se hace con la función =TRANSPONER(Matriz original) y se encuentra en las funciones de Búsqueda y referencia. El resultado será un error de Valor, pero se elimina marcando el área en la cual quedará la matriz, editando la función y oprimiendo en forma simultánea las teclas CTRL-SHIFT-ENTER.

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Acción 1	16,33%	0,11%	-13,07%	-16,42%	19,45%	12,36%	9,58%	-8,03%	-4,73%	-16,15%	-12,63%	13,23%
Acción 2	17,89%	0,90%	-6,51%	-7,51%	2,77%	2,76%	8,16%	-5,28%	-2,31%	-9,80%	-10,07%	8,98%
Acción 3	17,93%	12,48%	1,38%	-11,75%	-22,52%	11,63%	14,48%	-7,26%	4,77%	3,06%	1,18%	-25,38%
Acción 4	6,02%	-9,40%	-26,68%	-11,65%	9,97%	-15,29%	-20,30%	9,93%	17,15%	7,68%	18,45%	14,15%

Ahora se multiplica la matriz transpuesta por la original y se divide por el número de observaciones (n=12, en este ejemplo) y la matriz de covarianzas es:

	Acción 1	Acción 2	Acción 3	Acción 4
Acción 1	0,01676831	0,00936991	-0,00042371	0,00097519
Acción 2	0,00936991	0,00677348	0,00213887	-0,00038209
Acción 3	-0,00042371	0,00213887	0,01833034	-0,00758114
Acción 4	0,00097519	-0,00038209	-0,00758114	0,02258129

La varianza del portafolio es, para el caso de un portafolio con proporciones iguales de cada acción:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n^2} \sum_i \sum_j \sigma_{ij}$$

donde

n= número de acciones

$\sigma^2 =$ varianza del portafolio

$\sigma_{ij} =$ covarianza de las acciones i y j

En este caso,

$$\sigma^2 = \frac{0.01676831 + 0.00677348 + 0.01833034 + 0.02258129}{16}$$
$$+ \frac{2 \times (0.00936991 - 0.0004237 + 0.00213887 + 0.00097519 - 0.0003821 - 0.0075811)}{16} = 0.45\%$$

La desviación estándar del portafolio es $\sigma = 6.74\%$

La media del portafolio es $\mu = 1.42\%$

Obsérvese cómo se comparan las estadísticas del portafolio con las de cada acción. Si bien la rentabilidad media del portafolio es menor que dos de las acciones que lo conforman, la varianza y la desviación estándar son substancialmente menores que el de cada acción individual. Esto significa que se ha sacrificado un poco de rentabilidad, pero se ha disminuido mucho el riesgo. Aquí se puede ver de manera palpable la ventaja de la diversificación.

Si se aplica el modelo de Markovitz, entonces hay que fijar una rentabilidad deseada para encontrar el portafolio que produzca esa rentabilidad con la mínima varianza posible.

Para el ejemplo de las cuatro acciones, con una rentabilidad deseada de 1,5%, entonces se debe:

1. Definir un vector de participación para cada acción.

Acción 1	Acción 2	Acción 3	Acción 4
25%	25%	25%	25%

2. Definir la rentabilidad promedio del portafolio. Es el producto escalar de los vectores de participación y de rentabilidad de las acciones. Usando Excel, se aplica la función SUMAPRODUCTO. Para este nivel de participación, la rentabilidad promedio del portafolio es 1,42%.
3. Se multiplica el vector de participación por la matriz de covarianzas de las acciones. En Excel se utiliza la función MULT. En el ejemplo, el resultado es

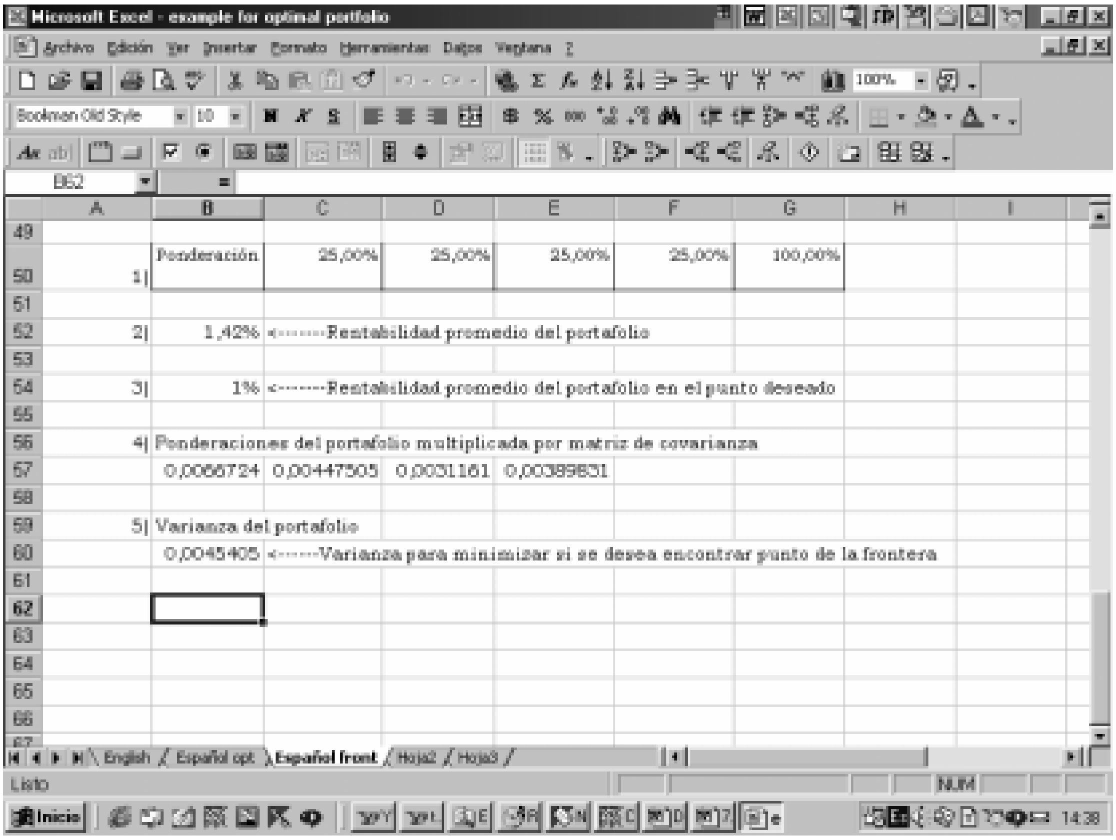
Vector de participación x matriz de covarianza	0,00667243	0,004475046	0,00311609	0,00389831

4. La varianza del portafolio se calcula como el producto escalar del vector de participación por el vector obtenido en 3. En este ejemplo, la varianza del portafolio es 0,00454047. En Excel se usa =SUMAPRODUCTO(Vector participación x matriz covarianza;vector participación). Con estos datos (todos escritos como valores dependientes de celdas), se utiliza Solver de Excel para minimizar la varianza, con la condición de que las participaciones sumen 1, que la rentabilidad promedio del portafolio sea igual a 1,5% y que las participaciones no sean negativas (se puede eliminar esta restricción y en ese caso se considera que se está en posición corta). Al aplicar este procedimiento al ejemplo se encuentra que la rentabilidad es 1,5% y la varianza es 0,00495647, lo cual significa que la desviación estándar del portafolio es 7,04%. Esto define un punto de la frontera eficiente. El portafolio que produce este resultado consta ahora de la siguiente composición:

	Acción 1	Acción 2	Acción 3	Acción 4
Participación	35,90%	2,39%	30,07%	31,65%

Visualizado como una operación de Excel, se tiene:

Planteamiento del problema



Solución en Solver

Cuando se oprime el botón *Resolver*, se obtiene la solución indicada arriba.

5. Este proceso de identificar la varianza mínima (y la desviación estándar) con una rentabilidad deseada, permite determinar cierto número de puntos que conformarían la frontera eficiente.

Aquí lo importante para tener en cuenta es que mientras el coeficiente de correlación entre las acciones sea menor que 1, la desviación estándar (varianza) será menor que el promedio ponderado de las desviaciones estándar (varianzas) de cada una de ellas. Esto es lo que hace que la diversificación disminuya el riesgo. En otras palabras, el riesgo de un portafolio está en función de la desviación estándar de cada acción (su riesgo) y de la relación entre ellas.

Por ejemplo, si se tienen dos acciones A y B con los siguientes parámetros,

Rentabilidad media		Desviación estándar	
Acción 1	Acción 2	Acción 1	Acción 2
5,43%	5,01%	30,00%	40,00%

Los resultados del cálculo de la rentabilidad y la varianza del portafolio en función de la proporción de cada una, de sus varianzas , medias y coeficiente de correlación están dados por

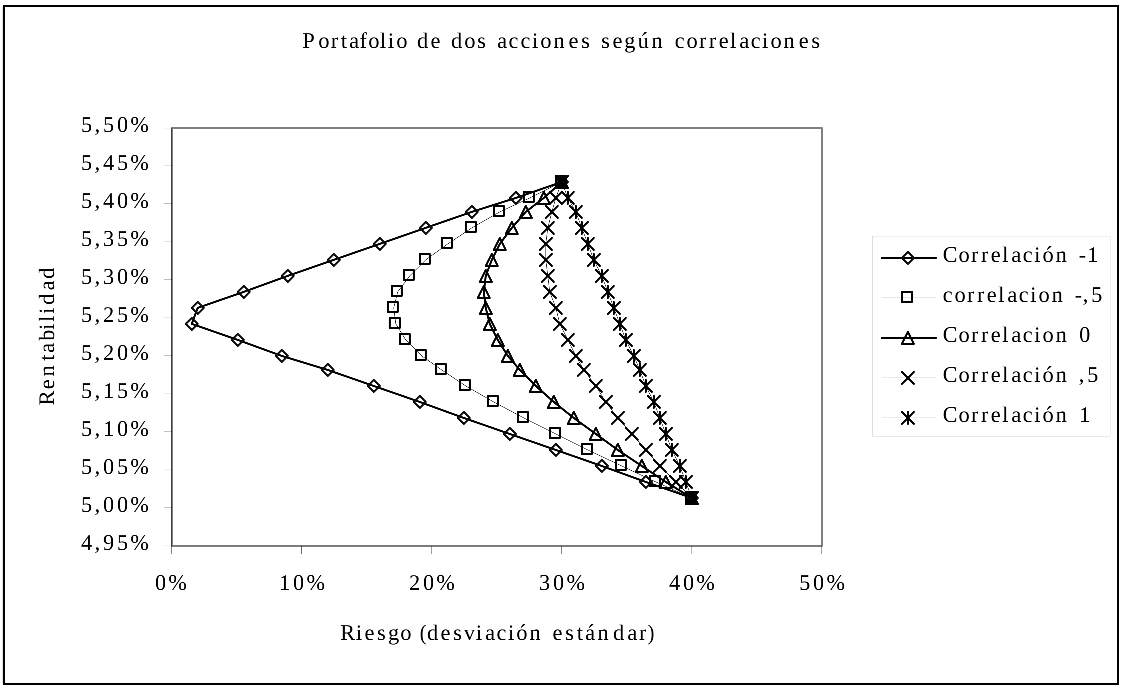
Varianza del portafolio = $\alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$

Desviación estándar del portafolio: $\sqrt{\alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}$

Los resultados son

α_1	α_2	Media del portafolio	ρ_{12}= -1 σ_{port}	ρ_{12}= -0,5 σ_{port}	ρ_{12}= 0 σ_{port}	ρ_{12}= 0,5 σ_{port}	ρ_{12}= 1 σ_{port}
0%	100%	5,01%	40,0%	40,0%	40,0%	40,0%	40,0%
5%	95%	5,03%	36,5%	37,3%	38,0%	38,8%	39,5%
10%	90%	5,06%	33,0%	34,6%	36,1%	37,6%	39,0%
15%	85%	5,08%	29,5%	32,0%	34,3%	36,5%	38,5%
20%	80%	5,10%	26,0%	29,5%	32,6%	35,4%	38,0%
25%	75%	5,12%	22,5%	27,0%	30,9%	34,4%	37,5%
30%	70%	5,14%	19,0%	24,8%	29,4%	33,4%	37,0%
35%	65%	5,16%	15,5%	22,7%	28,0%	32,5%	36,5%
40%	60%	5,18%	12,0%	20,8%	26,8%	31,7%	36,0%
45%	55%	5,20%	8,5%	19,2%	25,8%	31,0%	35,5%
50%	50%	5,22%	5,0%	18,0%	25,0%	30,4%	35,0%
55%	45%	5,24%	1,5%	17,3%	24,4%	29,9%	34,5%
60%	40%	5,26%	2,0%	17,1%	24,1%	29,5%	34,0%
65%	35%	5,28%	5,5%	17,4%	24,0%	29,1%	33,5%
70%	30%	5,31%	9,0%	18,2%	24,2%	28,9%	33,0%
75%	25%	5,33%	12,5%	19,5%	24,6%	28,8%	32,5%
80%	20%	5,35%	16,0%	21,2%	25,3%	28,8%	32,0%
85%	15%	5,37%	19,5%	23,1%	26,2%	29,0%	31,5%
90%	10%	5,39%	23,0%	25,2%	27,3%	29,2%	31,0%
95%	5%	5,41%	26,5%	27,6%	28,6%	29,6%	30,5%
100%	0%	5,43%	30,0%	30,0%	30,0%	30,0%	30,0%

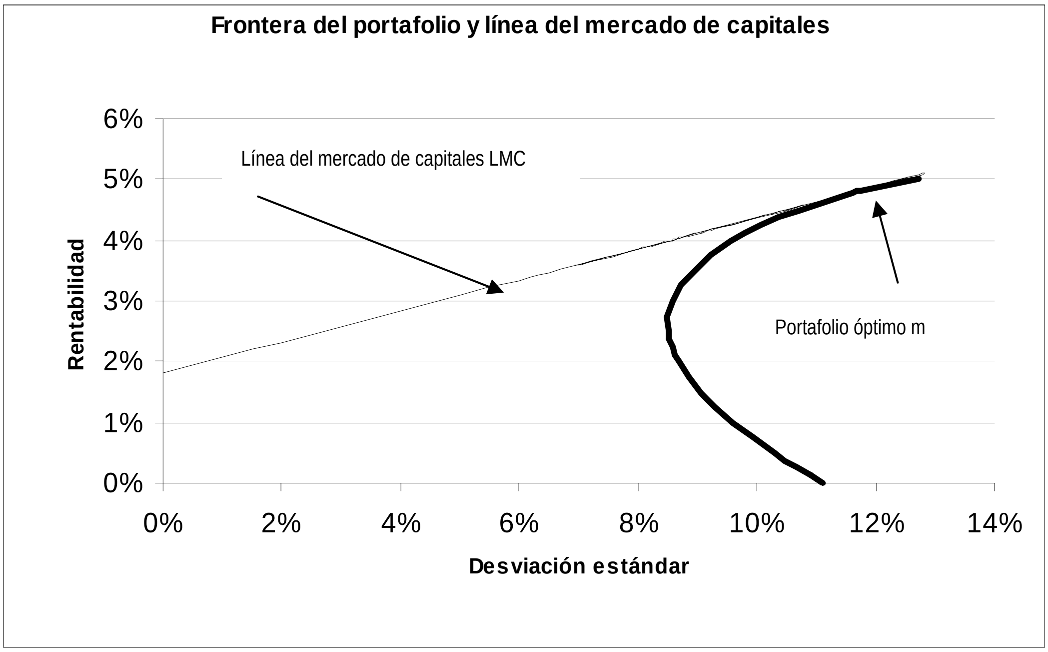
Gráficamente,



El modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model)

El aporte a esta idea genial de Markowitz hecho por Sharpe, Lintner, Fama y Tobin fue también extraordinariamente ingenioso y plantearon lo que se conoce como el **modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model).** Ellos demostraron que ese punto óptimo **-m-** era el portafolio de **todas** las acciones del mercado ponderadas por el valor total transado de cada una y que cualquier decisor escogería siempre ese portafolio (a esto se le llama **teorema de separación**, planteado por Tobin en 1958). El decisor podrá hacer combinaciones entre ese portafolio y otros papeles libres de riesgo (por ejemplo, papeles emitidos por el gobierno) y esto es todo lo que debe hacer el decisor en cuanto a sus preferencias. Estas decisiones de escogencia del portafolio óptimo se plantean sin necesidad de determinar las funciones de preferencia hacia el riesgo del decisor.

Gráficamente,



La línea del mercado de capitales

La recta que une el punto de la rentabilidad de cero riesgo (libre de riesgo) y el portafolio **m**, se llama la **línea del mercado de capitales (LMC)**. A la izquierda del punto **m**, significa que el decisor tiene en su portafolio una fracción en papeles libres de riesgo, **r**, (esto es, da dinero en préstamo al emisor de esos papeles) y el resto en el portafolio del mercado. A la derecha del punto **m**, el inversionista o decisor pide prestado para invertir más de lo que actualmente tiene en el portafolio de mercado. Mientras en el primer caso invierte una fracción α**,** menor que 1, en **r**, y **1-**α en **m**, en el segundo caso invierte más de 100% de su capital disponible (por el préstamo que recibe) en **m**. Esto significa que ¡la frontera eficiente ha cambiado! y ya no se moverá a través de la curva gruesa, sino ¡a través de la **línea del mercado de capitales (LMC)!**

La rentabilidad de un portafolio

La rentabilidad de un portafolio cualquiera se puede calcular con la Línea del Mercado de Capitales así:

$$R_p = pR + (1-p)R_m$$

donde R_p es la rentabilidad del portafolio, p es la fracción del portafolio que se invierte en papeles libres de riesgo, R es la rentabilidad libre de riesgo, (1-p) es la fracción del portafolio que se invierte en el portafolio de mercado y R_m es la rentabilidad del portafolio de mercado.

La desviación estándar de un portafolio

La variabilidad de un portafolio es una relación lineal entre la desviación estándar de los papeles libres de riesgo (0) y la del mercado, así

$$\sigma_p = px0 + (1-p)\sigma_m$$

donde σ_m es la desviación estándar del portafolio de mercado y σ_p es la desviación estándar del portafolio escogido.

Otra forma de LMC

Relacionando la rentabilidad del portafolio y su desviación estándar se puede decir que:

$R_p = pR + (1-p)R_m$

Cálculo del portafolio óptimo

Hay un procedimiento simple propuesto por Black (1972), Merton (1973) y más tarde en sus textos, por Levy y Sarnat (1982), Elton y Gruber (1995) y Benninga (1997). Se propone que el portafolio óptimo se puede encontrar maximizando la pendiente de la recta que une el punto de la rentabilidad libre de riesgo y la frontera eficiente. Cuando se alcanza este valor máximo, la línea es la línea del Mercado de capitales (LMC) (ella es tangente a la frontera eficiente). Este es un procedimiento simple que no requiere siquiera calcular la frontera eficiente. Y es muy fácil hacerlo con una hoja de cálculo como Excel y la opción Solver. Es simplemente un punto de la frontera eficiente. Se presenta a continuación un ejemplo.

Ejemplo

Suponga cuatro acciones con las siguientes rentabilidades:

Mes	Acción 1	Acción 2	Acción 3	Acción 4
1	18,25%	19,13%	18,87%	7,59%
2	2,03%	2,14%	13,42%	-7,83%
3	-11,15%	-5,27%	2,32%	-25,11%
4	-14,50%	-6,27%	-10,81%	-10,08%
5	21,37%	4,01%	-21,58%	11,54%
6	14,28%	4,00%	12,57%	-13,72%
7	11,50%	9,40%	15,42%	-18,73%
8	-6,11%	-4,04%	-6,32%	11,50%
9	-2,81%	-1,07%	5,71%	18,72%
10	-14,23%	-8,56%	4,00%	9,25%
11	-10,71%	-8,83%	2,12%	20,02%
12	15,15%	10,22%	-24,44%	15,72%
Promedio	1,92%	1,24%	0,94%	1,57%
Varianza	1,68%	0,68%	1,83%	2,26%
Desviación estándar	12,95%	8,23%	13,54%	15,03%
Peso	25%	25%	25%	25%

¿Qué es un portafolio óptimo? Un portafolio óptimo, a la luz del modelo CAPM, es aquél que pertenece a la frontera eficiente, que combinado con una proporción de inversión sin riesgo y dado un determinado nivel de riesgo deseado, maximiza la rentabilidad. Esta definición es válida aun si el nivel de riesgo deseado es menor que el establecido como mínimo por la frontera eficiente. Ahora la pregunta que debe responderse es, ¿cómo se determina el portafolio óptimo? Ese portafolio óptimo es simplemente el punto de tangencia entre la Línea del Mercado de Capitales y la frontera eficiente. Como este portafolio óptimo debe quedar en la frontera eficiente, entonces el punto de tangencia está localizado en la recta con máxima tangente entre esa recta y la horizontal. Esta solución es muy buena y elegante porque no es fácil determinar las curvas de indiferencia que requiere el modelo de Markowitz. Sin embargo, como se dijo arriba, no es necesario generar esas curvas de indiferencia y ni siquiera la frontera eficiente, dado el Teorema de Separación propuesto por Tobin.

Si se conoce la tasa de interés libre de riesgo, ¿cómo se determina la pendiente de la recta? En otras palabras, otra vez se plantea el problema de determinar *m*. Este problema existe porque no es fácil en la práctica determinar las curvas de indiferencia de un decisor; sin embargo, por lo que se dijo arriba, no es necesario calcular estas curvas y puede encontrarse una forma alterna de determinar *m*, lo cual se presenta más adelante.

Gráficamente, se puede determinar como aquella recta que pasa por *r* y tiene la máxima pendiente sin salirse de la frontera eficiente determinada al comienzo.

En resumidas cuentas, el decisor siempre estará, según la teoría, con una fracción, con todo o con más de lo que tiene en la actualidad, invertido en el portafolio *m*.

Para hallar el portafolio *m*, lo que hay que hacer es darse cuenta de que la pendiente de la recta que pasa por *m* y por *r* es la máxima posible, y de que corresponde a otro problema de optimización. De acuerdo con la teoría del Capital Asset Pricing Model (CAPM), el inversionista preferirá una posición en el "portafolio de mercado" sea con o sin deuda. Entonces, el portafolio óptimo está dado por la solución a un problema de optimización.

En este caso se trata de maximizar:

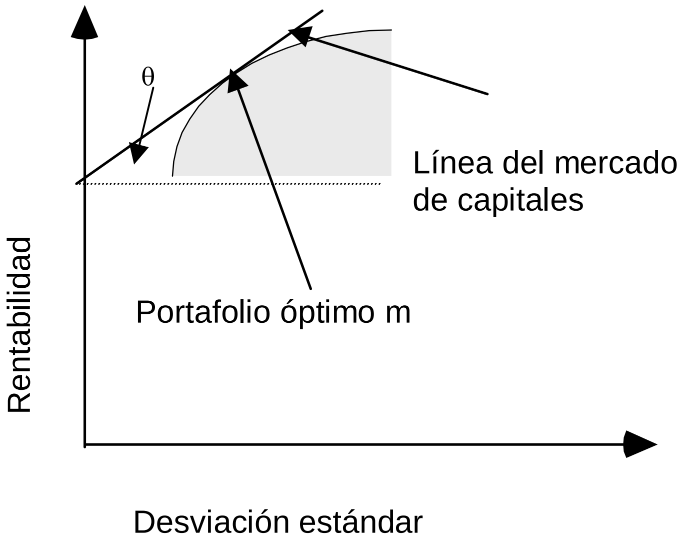
$$Maxtn\theta = \frac{R_m - r}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\alpha_k \alpha_j \sigma_{kj}}}$$

$$s.a \qquad (7.10)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 1$$

Donde α_i es la participación de la acción *i* en el portafolio, σ_{kj} es la covarianza entre las acciones *k* y *j*, R_m es la rentabilidad del portafolio, *r* es la rentabilidad libre de riesgo y m es el número de acciones que se estudian. La restricción de que las α's sean positivas se puede incluir. En este caso no hay lo que se llama posición corta.

Esta idea se puede ver en la siguiente figura:



Línea del Mercado de Capitales, frontera eficiente y portafolio óptimo.

La solución de este problema produce las α_i y con ellas se puede calcular el valor de R_m y el valor de la varianza (desviación estándar del portafolio). Hecho esto, el decisor tomará la decisión de reducir aún más su riesgo —sacrificando algo de rentabilidad— combinando ese portafolio con papeles libres de riesgo. Debe recordarse que el *teorema de separación* propuesto por *Tobin* dice que este portafolio *m* será el escogido por el decisor independientemente de su función de utilidad.

He examinado la solución de portafolio óptimo con base en datos históricos de la Bolsa de Bogota y el portafolio óptimo resultante se compone de muy pocas acciones (en algunos casos la solución óptima sólo tiene una acción). Esto aparentemente contradice la teoría detrás de la selección de portafolio: diversificar. Sin embargo, cuando se compara con lo que ocurre en la práctica, tal y como lo hacen los corredores de bolsa, se encuentra que ellos de manera intuitiva configuran portafolio s de muy pocas acciones, predominantemente con una o dos acciones.

Supongamos que se cuenta con 4 acciones, se escoge una tasa libre de riesgo de acuerdo con lo que ocurre en la economía, por ejemplo 1,5%, y se utiliza *Solver* de *Excel*. En este caso, se maximiza la tangente conformada por la rentabilidad promedio del portafolio menos la rentabilidad libre de riesgo y la desviación estándar del portafolio. Las restricciones son que las participaciones sumen 1 y que las participaciones no sean negativas (se puede eliminar esta restricción y en ese caso se considera que se está en posición corta). Con este procedimiento se obtiene el portafolio óptimo.

Suponga que las rentabilidades de las cuatro acciones son:

Mes	Acción 1	Acción 2	Acción 3	Acción 4
1	18.25%	19.13%	18.87%	7.59%
2	2.03%	2.14%	13.42%	-7.83%
3	-11.15%	-5.27%	2.32%	-25.11%
4	-14.50%	-6.27%	-10.81%	-10.08%
5	21.37%	4.01%	-21.58%	11.54%
6	14.28%	4.00%	12.57%	-13.72%
7	11.50%	9.40%	15.42%	-18.73%
8	-6.11%	-4.04%	-6.32%	11.50%
9	-2.81%	-1.07%	5.71%	18.72%
10	-14.23%	-8.56%	4.00%	9.25%
11	-10.71%	-8.83%	2.12%	20.02%
12	15.15%	10.22%	-24.44%	15.72%
Promedio	1.92%	1.24%	0.94%	1.57%
Varianza	1.68%	0.68%	1.83%	2.26%
Desviación standard	12.95%	8.23%	13.54%	15.03%
Peso	25%	25%	25%	25%

La matriz de exceso de rentabilidad sobre el promedio es:

Mes	Acción 1	Acción 2	Acción 3	Acción 4
1	16.33%	17.89%	17.93%	6.02%
2	0.11%	0.90%	12.48%	-9.40%
3	-13.07%	-6.51%	1.38%	-26.68%
4	-16.42%	-7.51%	-11.75%	-11.65%
5	19.45%	2.77%	-22.52%	9.97%
6	12.36%	2.76%	11.63%	-15.29%
7	9.58%	8.16%	14.48%	-20.30%
8	-8.03%	-5.28%	-7.26%	9.93%
9	-4.73%	-2.31%	4.77%	17.15%
10	-16.15%	-9.80%	3.06%	7.68%
11	-12.63%	-10.07%	1.18%	18.45%
12	13.23%	8.98%	-25.38%	14.15%

La matriz transpuesta se encuentra con la función de Búsqueda y referencia = =TRANSPONER(Matriz) de Excel. Se muestran los porcentajes.

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Acción 1	16.33	0.11	-13.07	-16.42	19.45	12.36	9.58	-8.03	-4.73	-16.15	-12.63	13.23
Acción 2	17.89	0.90	-6.51	-7.51	2.77	2.76	8.16	-5.28	-2.31	-9.80	-10.07	8.98
Acción 3	17.93	12.48	1.38	-11.75	-22.52	11.63	14.48	-7.26	4.77	3.06	1.18	-25.38
Acción 4	6.02	-9.40	-26.68	-11.65	9.97	-15.29	-20.30	9.93	17.15	7.68	18.45	14.15

Por multiplicación de matrices y dividiendo por el número de observaciones (n=12), entonces la matriz de covarianza es:

	Acción 1	Acción 2	Acción 3	Acción 4
Acción 1	0.01676831	0.00936991	-0.00042371	0.00097519
Acción 2	0.00936991	0.00677348	0.00213887	-0.00038209
Acción 3	-0.00042371	0.00213887	0.01833034	-0.00758114
Acción 4	0.00097519	-0.00038209	-0.00758114	0.02258129

El procedimiento a seguir es:

1. Defina un vector de proporciones que indique el peso de cada acción.

Acción 1	Acción 2	Acción 3	Acción 4
25%	25%	25%	25%

2. Calcule la rentabilidad promedio del portafolio. Es el producto escalar del vector de proporciones por el vector de rentabilidades (el vector de rentabilidades es la rentabilidad promedio de cada una de las acciones en la primera tabla). En Excel use SUMAPRODUCTO. Para este vector de proporciones (25% cada una) la rentabilidad del portafolio es 1,42%.
3. Multiplique el vector de proporciones por la matriz de covarianza (obtendrá como respuesta un vector). Use la función de Excel para multiplicar matrices. En el ejemplo,

	Acción 1	Acción 2	Acción 3	Acción 4
Vector de pesos x matriz de covarianza	0.00667243	0.004475046	0.00311609	0.00389831

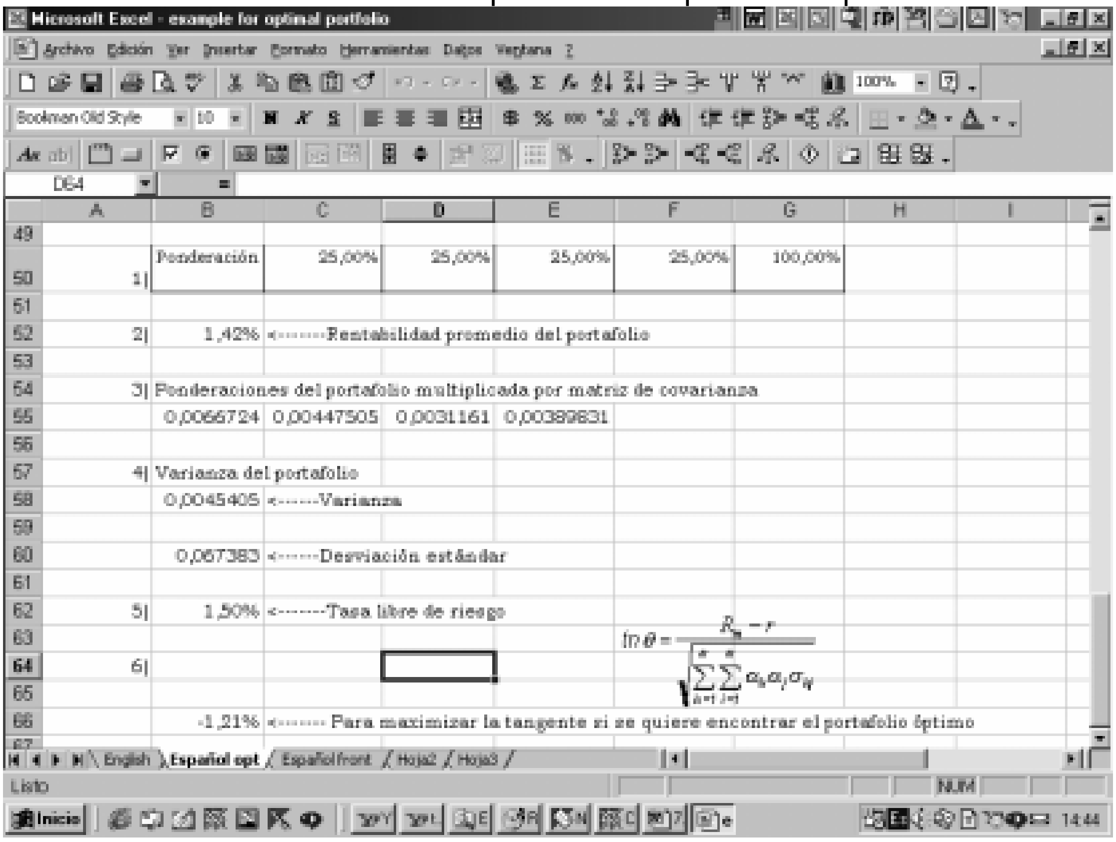
4. La varianza del portafolio se calcula como el producto escalar del vector de proporciones o pesos por el vector que se obtiene en 3. En este ejemplo la varianza del portafolio es 0,00454047. La desviación estándar del portafolio es la raíz cuadrada de la varianza.
5. Si se supone que la tasa libre de riesgo es 1,5%, entonces se construye la expresión para la tangente:

$$tn\,\theta = \frac{R_m - r}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\alpha_k\alpha_j\sigma_{kj}}}$$

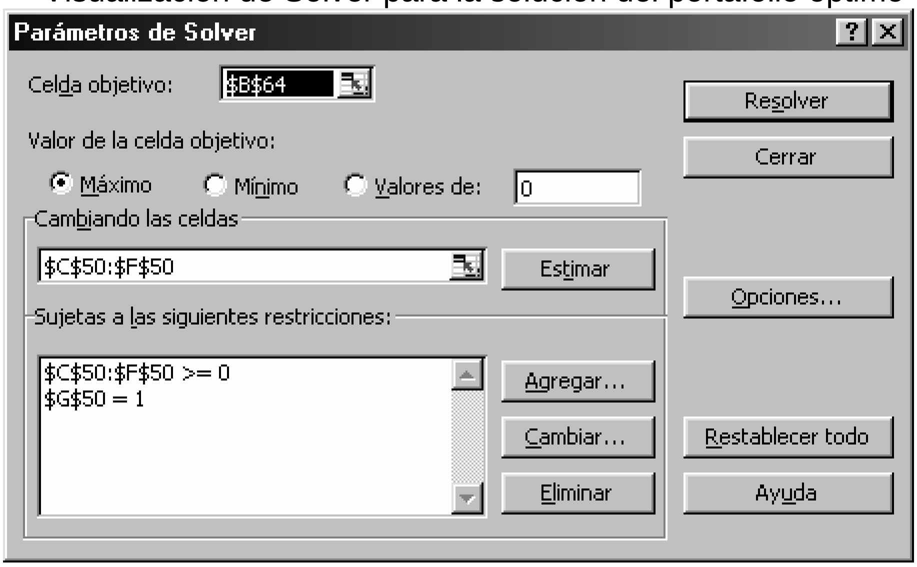
6. Use Solver para maximizar la tangente, sujeta a las condiciones que la suma de las proporciones o pesos sea igual a 1 y que las proporciones o pesos sean no negativos.

7. En las figuras 2 y 3 se ve la operación en Excel.

Planteamiento del problema del portafolio óptimo



Visualización de Solver para la solución del portafolio óptimo



8. Cuando se oprime el botón Resolver se obtiene la composición del portafolio óptimo.

	Acción 1	Acción 2	Acción 3	Acción 4
Pesos	92,18%	0,00%	0,00%	7,82%

Esto produce una rentabilidad para el portafolio de 1,90% y una varianza de 0,12052486.

Es necesario hacer una precisión acerca del uso de esta metodología. En un trabajo de grado, Botero y Rosas (2002)[3] examinaron el comportamiento de este procedimiento para seleccionar el portafolio óptimo y lo compararon con dos modelos ingenuos (naïve). Un modelo ingenuo consistió en utilizar igual proporción de todas las acciones que se estudiaron y el otro en seleccionar de cada sector la acción que presentara máximo valor de la relación rentabilidad/varianza y utilizar una proporción idéntica para cada acción seleccionada.

Los resultados indicaron consistentemente que para el universo de datos estudiados (entre 1995 y 2001), se obtenía mejor rentabilidad y riesgo de portafolio utilizando el segundo método ingenuo, seguido del primero mencionado arriba.

Eficiencia del mercado

Para que todo lo anterior funcione deben cumplirse ciertas condiciones (que se estudiarán más adelante) y en especial una que dice que los mercados deben ser eficientes. Eficiencia de mercado significa que los precios de un papel que se negocia en bolsa (acciones, bonos, etcétera) reflejan el valor que el mercado le asigna. Este precio o valor refleja la información que recibe el mercado de las firmas, en diferentes formas. Se dice entonces, que el mercado es informativamente eficiente.

Una información importante que se supone que el mercado incorpora en el precio de las acciones, por ejemplo, es la de *ver* que la firma hace inversiones, que se supone que tienen un VPN positivo y que por tanto, añaden valor a la firma. Los compradores al enterarse de nuevos proyectos de la firma tratarán de poseer acciones de ellas y elevarán el precio hasta

[3] Botero Bustillo, Carlos Andrés y Efraín Rosas Díaz, Selección de portafolios óptimos: El caso colombiano, 2002, Trabajo de grado Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá.

cierto límite. Se supone que el mercado ajusta el precio de una manera eficiente y rápida.

¿Se puede adivinar el precio? Se podría, pero en promedio no se obtendría ventaja alguna. Los precios de las acciones siguen lo que se conoce como movimiento browniano o caminos aleatorios (random walks) y paradójicamente, esta característica es una de las condiciones para que exista un mercado eficiente.

Varias formas de eficiencia

La realidad no es tan elegante como los modelos. La eficiencia del mercado pocas veces es perfecta, de manera que se encuentran grados de eficiencia. Así,

se presentan tres clases de eficiencia de mercado: Eficiencia de mercado débil, eficiencia de mercado semi fuerte y eficiencia de mercado fuerte

Eficiencia débil

La rentabilidad futura no está correlacionada con los precios históricos. Es decir, el mercado no tiene memoria. Así mismo, los precios actuales del mercado reflejan toda la información histórica disponible sobre volúmenes y precios. Al tener incorporada toda la información histórica, nadie obtendría ventaja al poseer información histórica de los precios, puesto que ya está incorporada al precio. El estudio de los datos históricos a través de gráficas, tendencias, ciclos, etcétera, se conoce como análisis técnico. Esto por supuesto, es inútil en un mercado con eficiencia débil. Tener esa información no le da ventajas a ningún comprador.

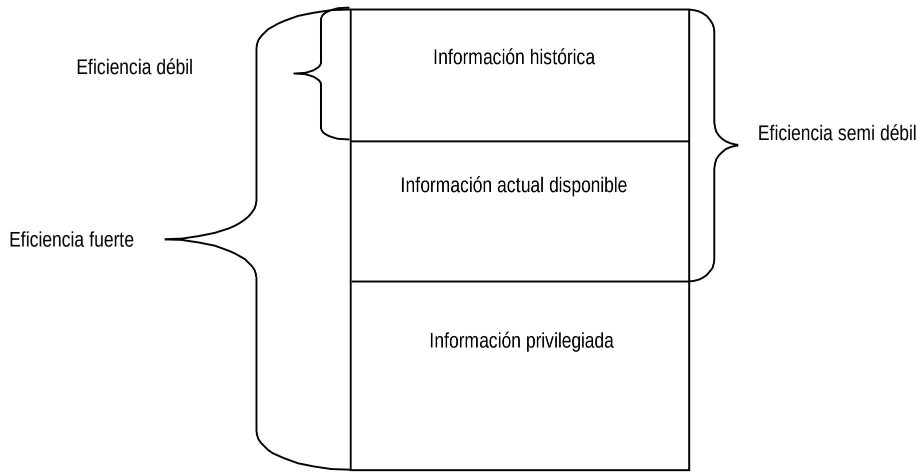
Eficiencia de mercado semi fuerte

La rentabilidad futura no está correlacionada con la información de las empresas disponible al público. Esto es, que toda la información pública actual disponible está involucrada en los precios. Por tanto, tener esa información no le otorga ventaja a nadie, puesto que ya el mercado la involucró en el precio. A esto se conoce como análisis fundamental. Poseer información de balances, razones financieras, anuncios de nuevos proyectos, fusiones, adquisiciones, etcétera, es inútil en un mercado con eficiencia semi fuerte. El mercado ya ha asimilado toda esa información y la incorporó en los precios.

Eficiencia de mercado fuerte

La rentabilidad futura no está correlacionada con ninguna información, ni histórica, ni disponible al público, ni disponible a los funcionarios de la firma. Aquí se supone que toda la información, aun la privilegiada o interna ha sido involucrada por el mercado en los precios. Ni siquiera los funcionarios de una firma obtendrían ventaja al poseer esa información privilegiada.

Las diferentes clases de eficiencia se implican en forma consecutiva: una eficiencia semi débil (semi fuerte) implica que el mercado tiene eficiencia débil y una eficiencia fuerte implica eficiencia débil y eficiencia semi débil (semi fuerte). Esto se puede ilustrar de manera gráfica.



Aquí se presenta una paradoja: Los mercados de valores serán eficientes si los compradores creen lo contrario y se comportan de acuerdo con esa creencia. Esto es, ¡creen que pueden predecir los precios futuros y la rentabilidad!

Cuando un decisor se enfrenta a dos alternativas que le producen el mismo beneficio, escogerá la menos costosa. A esto se llama eficiencia de arbitraje. Si se trata de inversiones en bolsa, tratará de vender la más costosa, ahora o a futuro y comprará la menos costosa. Como se supone que los compradores son racionales, entonces todos harían lo mismo hasta que los precios y las rentabilidades asociadas se nivelen.

El mercado bursátil (de acciones) en Colombia es tan pequeño y tan concentrado, que no hay eficiencia de mercado fuerte. Caicedo (1997), sostiene que "existen evidencias de la eficiencia del mercado en su forma semifuerte [semidébil] y débil, pero no en su forma fuerte". Esta situación es típica de los mercados de países emergentes.

La concentración de la riqueza (del mercado bursátil) existe no sólo por situaciones históricas, sino que la reforma del Código de Comercio de 1995 la estimula al exigir una mayoría del 78% para repartir menos del 50% de las utilidades. Ver Informe Misión de Estudios del Mercado de Capitales, 1996.

Supuestos del modelo CAPM

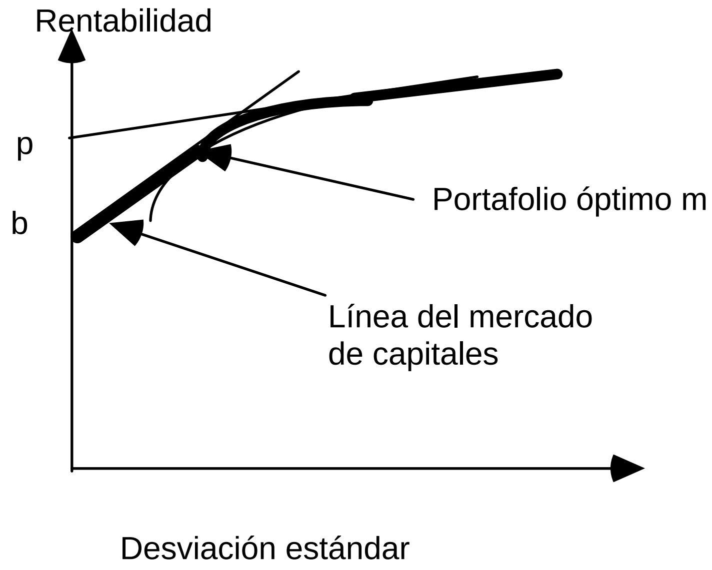
¿Qué supuestos hay detrás de este modelo? Hay muchos y muy fuertes. A saber:

- El mercado es eficiente, lo cual significa que el **precio de mercado** de la acción representa el consenso de ese mercado acerca del **valor de la acción** (nótese el énfasis para diferenciar conceptualmente **precio** de **valor**). Esto implica que los precios reflejan toda la información disponible tanto sobre la economía y el mercado bursátil, como sobre la empresa en particular.
- También se supone que el mercado es capaz de ajustar el precio de la acción muy rápidamente a medida que hay nueva información disponible. Ello implica que los precios de las acciones fluctúan alrededor de su verdadero valor, de manera aleatoria y en la realidad no es posible predecirlos. La mejor forma de predecir el movimiento del precio de una acción es estando dentro de la firma y conociendo los planes y estrategias que pueden hacer mover el precio de la acción en el mercado, sin embargo, como ya se estudió, en un mercado totalmente eficiente (eficiente en forma fuerte) esto tampoco es posible.
- Se supone que toda la información pertinente a las acciones es de libre disponibilidad y que todos los inversionistas tienen acceso a ella.
- Se supone que el comportamiento futuro del mercado y de cada acción en particular, repite lo ocurrido en el pasado.
- Se supone también que los inversionistas (decisores) son aversos al riesgo. Si así no fuera, su curva de indiferencia sería convexa y no se podría determinar el portafolio óptimo. En el proceso de decisión utilizan la regla valor esperado-varianza (E-V).

- El decisor tiene acceso a un portafolio donde están todas las opciones. Aquí habría que entender que **todas** las opciones son no sólo acciones sino también otro tipo de inversiones (tierra, bonos, oro, monedas, obras de arte, capital humano, etc.).
- Se supone que el decisor puede dar en préstamo (comprar bonos libres de riesgo) a la misma tasa a la cual puede recibir préstamos. Además que cualquier inversionista puede prestar o recibir en préstamo cualquier suma de dinero, sin que se afecte la tasa de interés.
- Se supone que el período de inversión es igual para todos los inversionistas (por ejemplo, un año).
- Se supone que no hay costos de transacción, ni impuestos.
- Se supone también que no hay un solo inversionista capaz de afectar, por sus operaciones, el precio de la acción en el mercado.
- Se supone, que al existir un mercado eficiente, todos los actores están de acuerdo con los precios y niveles de riesgo de las diferentes acciones, de manera que la frontera eficiente será la misma para todos.

Tasa de colocación y de captación son diferentes

Obviamente, estas condiciones no se dan en la realidad. Por ejemplo, se sabe que las tasas de colocación del inversionista (tasa a la cual él da prestado o sea, que compra bonos libres de riesgo) es menor que la tasa a la cual a él le prestan (para estar en la LMC, a la derecha de portafolio de mercado, **m**). En este caso, la frontera eficiente no sería esa línea recta sino una línea compuesta, así.



En esta gráfica, **b** significa la tasa **r** ya mencionada, de los bonos libres de riesgo y **p** es la tasa a la cual el inversionista recibe los préstamos.

La línea característica y los coeficientes beta

Cuando se diversifica un portafolio el riesgo que se elimina o reduce es el riesgo no sistemático, o sea el intrínseco o particular de esa firma. Siempre queda un riesgo asociado al portafolio (desviación estándar del portafolio, riesgo sistemático) que no se elimina por la diversificación. Este riesgo sistemático está asociado a los vaivenes de la economía nacional o externa.

Ahora bien, hay acciones que responden más o menos a esos factores externos (exógenos dicen algunos). Se supone que el mercado (el portafolio del mercado) responde directamente a esas variaciones. Esto significa que una acción en particular puede contribuir de manera positiva o negativa al riesgo de un portafolio.

Si se grafica el excedente de una acción en relación con la tasa libre de riesgo contra el excedente del portafolio del mercado sobre la misma tasa libre de riesgo, se puede apreciar qué tanta relación hay entre los dos. O lo que es lo mismo, si se hace una gráfica entre la rentabilidad de la acción y la diferencia entre la rentabilidad del mercado, se aprecia una relación lineal. En otras palabras, se puede establecer la siguiente relación:

$$R_i = r + (R_m - r)\beta_i$$

donde

β_i =beta de la acción i

R_m =rendimiento del portafolio de mercado **m**

r =rendimiento de los bonos libres de riesgo

R_i = rendimiento esperado de la acción

Esta recta se denomina **línea característica**. La conformación de esta ecuación parece contradecir lo propuesto por Fisher en el sentido de mantener una relación multiplicativa y no aditiva de las componentes de una tasa de interés. No hay tal. Si se parte del supuesto de que una acción tiene más o menos riesgo que el mercado (por el coeficiente beta), entonces se puede mostrar que esta formulación es coherente con lo propuesto por Fisher.

Si la rentabilidad del mercado contiene un elemento de riesgo, entonces este elemento se puede calcular así:

Riesgo de invertir en el mercado = $((1+R_m)/(1+r)-1)$

Riesgo de una acción = Beta acción x $((1+R_m)/(1+r)-1)$

Rentabilidad de la acción = $(1+r)$x(1+ Beta acción x $((1+R_m)/(1+r)-1))-1$

= (1+ Beta acción x $((1+R_m)/(1+r)-1)$) + r(1+ Beta acción x $((1+R_m)/(1+r)-1))-1$

=1+ Beta acción x $((1+R_m)/(1+r)-1)$ + r + r Beta acción x $((1+R_m)/(1+r)-1)$ - 1

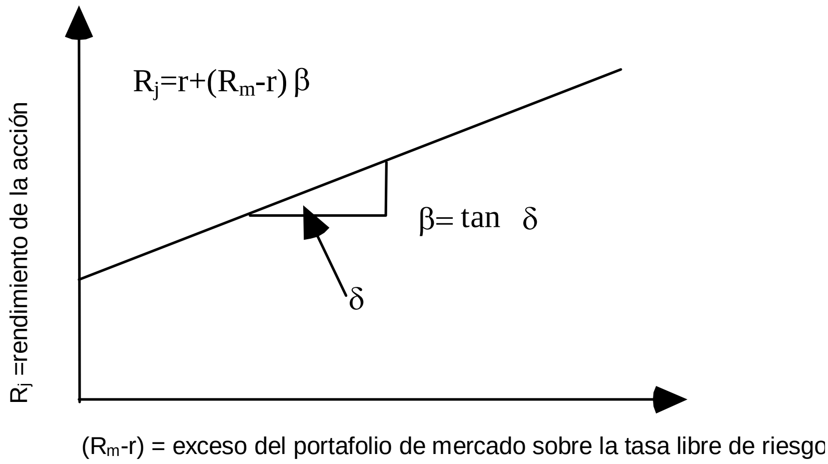
Factorizando beta de la acción

= Beta acción x$((1+R_m -1-r)/(1+r)+r((1+R_m-1-r)/(1+r)))$ +r

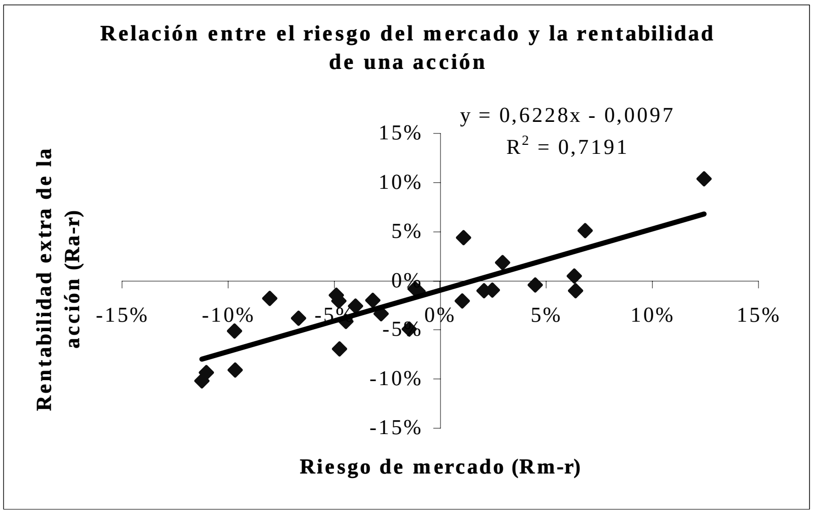
= Beta acción x$((R_m -r)/(1+r)+r((R_m-r)/(1+r)))$ +r

factorizando $(R_m -r)/(1+r)$

=r+ Beta acción $(R_m -r)/(1+r)$x((1+r)= r + Beta acción $(R_m -r)$



Para la acción de Suramericana de Seguros entre febrero de 1995 y marzo de 1997, comparada con el IBB (Índice de la Bolsa de Bogotá).



Dice que el rendimiento de una acción está compuesto de la tasa libre de riesgo, más una fracción del riesgo sistemático que hay en el portafolio de mercado (**R_m-r**). La fracción de ese riesgo sistemático está medido por β_j. Beta es la pendiente de la línea característica. Esta ecuación se puede interpretar como que el valor esperado de la rentabilidad de una acción está compuesto de la tasa libre de riesgo, **r**, y (**R_m-r**)β_j, que es una prima de riesgo.

Una forma de calcular β_j es "correr" una regresión lineal entre el exceso de rentabilidad de la acción particular y la tasa libre de riesgo y el exceso entre la rentabilidad del portafolio de mercado (medido por ejemplo, con el IBB) y la misma tasa. El IBB (Indice de la Bolsa de Bogotá) es un indicador del precio de las acciones transadas. Es un índice que muestra la variación del precio de una canasta de acciones. Tiene en cuenta el precio de las acciones transadas, ponderado por la cantidad vendida. En Colombia hay varios índices: El IBB (Índice de la Bolsa de Bogotá), el IBO (Índice de la Bolsa de Occidente) y el IBOMED (Índice de la Bolsa de Medellín). En el ámbito internacional existen muchos, como por ejemplo, el Índice de las 500 de Standard & Poor, el Índice Compuesto de la Bolsa de Nueva York, el NASDAQ (agrupa las acciones de alta tecnología), el Índice Nikkei de Tokyo, etc.

La pendiente de esa línea de regresión será el coeficiente β_j de la acción, comúnmente denominado beta.

Cuando beta se calcula a partir de los excedentes de rentabilidad de la acción y del mercado sobre la tasa libre de riesgo, entonces la línea característica debe cruzar por cero. A veces no es así. En esos casos, el valor donde la recta cruza el eje R_j-r se llama alfa. La pendiente de esa línea de regresión será la de la acción. Las alfas son el punto de corte con el eje del exceso de rentabilidad de la acción sobre la tasa libre de riesgo.

El coeficiente alfa

¿Qué mide alfa? Aunque alfa siempre debería ser cero, un alfa positiva indicaría un exceso de rentabilidad sobre la rentabilidad del mercado. Todos los inversionistas desearían comprar esa acción y la harían subir de precio hasta cuando el exceso de rentabilidad desapareciera (alfa igual a cero). Si alfa fuera negativa nadie desearía tal acción y trataría de deshacerse de ella y el precio bajaría hasta cuando el exceso de rentabilidad desapareciera (alfa igual a cero).

El coeficiente beta

La beta de una acción mide la sensibilidad de la misma respecto de los cambios en la rentabilidad del mercado. Como la beta mide la pendiente de la línea característica, entonces habrá betas mayores que 1, iguales a 1 y menores que 1. Las betas miden el riesgo sistemático (no diversificable) de una acción.

Acciones "agresivas"

Hay acciones que aumentarían el riesgo de un portafolio (beta mayor que 1, las llaman "agresivas"). Si la rentabilidad del mercado aumenta o disminuye, estas acciones aumentan o disminuyen más que el mercado. Al incluirlas en el portafolio aumentan su riesgo.

Acciones neutras

Son acciones que no alteran el riesgo del portafolio (beta igual a 1) y se mueven con el mercado. Su cambio en la rentabilidad es directamente proporcional con el cambio en la rentabilidad del mercado. No alteran el riesgo del portafolio.

Acciones "defensivas"

Son acciones que disminuyen el riesgo de un portafolio (beta menor que 1, las llaman "defensivas".) Si la rentabilidad del mercado aumenta o disminuye, estas acciones aumentan o disminuyen menos que el mercado. Disminuyen el riesgo de un portafolio cuando se incluyen en él.

¿Dónde obtener las betas?

Existen empresas que calculan las betas de las acciones y venden esa información. En Colombia esa información es gratuita y se encuentra en la página de la Superintendencia de Valores. Se puede tener acceso a ella en www.javeriana.edu.co/cursad/finanzas1 en la opción Información útil.

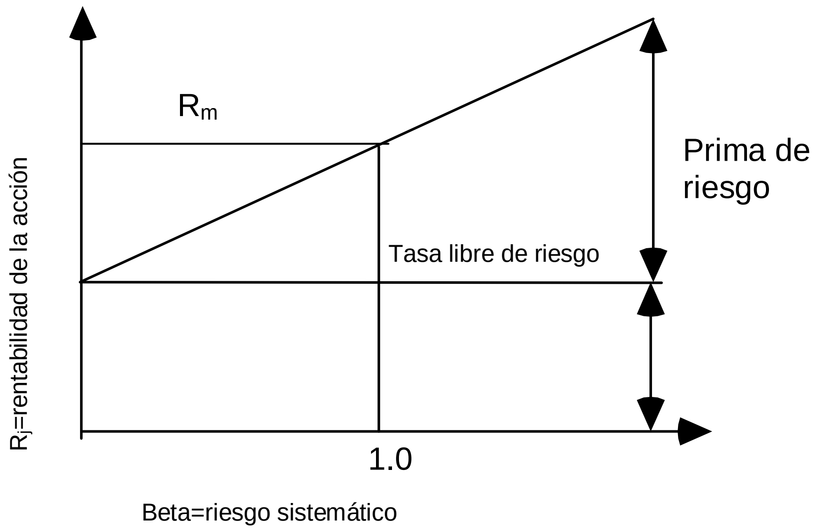
La línea de las acciones del mercado (LAM)

Si se grafican las betas de las acciones del mercado versus el rendimiento de cada acción (esto es, el riesgo sistemático versus la rentabilidad de la acción) se encuentra que esta relación es lineal. Esta relación se conoce como la **línea de las acciones del mercado (LAM)** y todas las rentabilidades de las acciones deben estar ubicadas allí, según el modelo CAPM.

En forma matemática,

$$R_j = r + (R_m - r)\ \beta_j$$

Esto significa que si un decisor adquiere un portafolio de sólo una acción, dado que no ha diversificado, asumirá el riesgo total (el sistemático más el no sistemático) pero la rentabilidad que recibirá estará relacionada únicamente con el riesgo sistemático, que es lo que aparece en la línea de las acciones del mercado. El riesgo no sistemático no es "recompensado" por el mercado porque puede eliminarse por medio de la diversificación, por lo tanto, la única prima de riesgo que reconoce el mercado es la del riesgo sistemático, que no puede ser eliminada por la diversificación. Esta ecuación no debe confundirse con la línea característica. En la LAM la variable independiente es β_j , en la línea característica la variable independiente es (R_m - r).



Intuitivamente se pueden identificar acciones de moderado riesgo sistemático, tales como aquellas de empresas muy ligadas al movimiento de la economía; por ejemplo, en Colombia, Cadenalco, cuya beta entre enero de 1990 y diciembre de 1995, fue de 0.84[4]. Este riesgo sistemático tiende a ser igual al del mercado, o sea que su beta sería 1. Algunos han utilizado el volumen de empaques vendidos en el país para medir, como un "proxy", el crecimiento de la economía de manera aproximada, pero inmediata; esto implicaría que las acciones de Cartón de Colombia deberían tener un beta

[4] Superintendencia de Valores, **Coeficientes Beta, diciembre de 1995 OEE-IE-96**, Bogotá: mayo de 1995, 12 pp. Para Burbano (1997) este valor fue de 0.99 si se calcula con índices bursátiles (IBB, por ejemplo) y 0.93 si se utiliza el promedio de las rentabilidades de todas las acciones transadas ponderadas por el volumen. Burbano, Antonio, El modelo CAPM en Colombia, **Monografías**, Bogotá: Universidad de los Andes, abril 1997, p. 15. En documento aparte no publicado se hizo un cálculo similar con el IBB; en este caso, la beta de Cadenalco con datos entre enero de 1995 y abril de 1997 fue de 1.11; este dato tiene un problema de representatividad estadística por tratarse de un número de observaciones tan reducido.
.

cercano a 1; sin embargo, debido a su diversificación hacia otros productos, su beta, entre enero de 1990 y diciembre de 1995, fue de 0.58.

Relación entre la LMC y los coeficientes beta

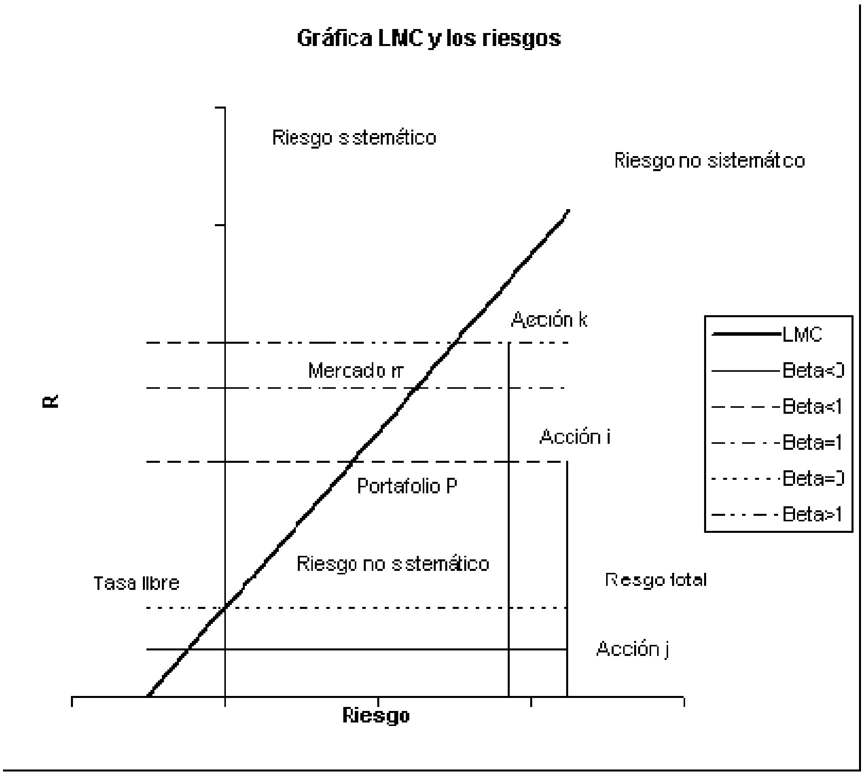
Existe una relación entre la LMC y las betas de una acción.

Puede ocurrir que una acción tenga un alto riesgo total y bajo riesgo sistemático y otra un bajo riesgo total y mayor riesgo sistemático; por lo tanto, al diversificar en forma adecuada, el riesgo resultante será muy bajo en la primera y alto en la segunda, ya que el remanente de riesgo es el sistemático.

Las betas y las desviaciones estándar

El riesgo sistemático de una acción es $\beta_i \sigma_m$

El riesgo no sistemático de una acción es $\sigma_i - \beta_i \sigma_m$ (Ver gráfica adelante[5])



La relación entre la LMC y el riesgo se puede estudiar si se miran en la gráfica las rentabilidades, la LMC y el conjunto de oportunidades y de allí se puede deducir que si la rentabilidad es:

1. Mayor que la del mercado, beta mayor que 1

[5] Adaptada de Levy, Haim y Marshall Sarnat, **Capital Investment and Financial Decisions**, 2nd Ed., Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1982

2. Igual que la del mercado, beta igual a 1
3. Menor que la del mercado, beta menor que 1
4. Igual a la tasa libre de riesgo, R, beta igual a 0
5. Menor que R, beta negativa

¿Cómo usar la gráfica anterior?

El riesgo sistemático de una acción es en la gráfica, la distancia entre el eje vertical (riesgo cero) hasta la LMC. El riesgo no sistemático de una acción es en la gráfica, la distancia entre LMC y el punto que indica la acción o el portafolio. Con esto se explica las betas negativas (acción j, en la gráfica.) ¿Betas negativas? Esta gráfica ayuda a entender la existencia de coeficientes beta negativos. Una beta negativa implica que la acción mejora (disminuye) el riesgo de un portafolio. Le da más estabilidad, aunque contribuye a disminuir la rentabilidad del portafolio.

Sobre y subvaloración de acciones

Si se calcula la rentabilidad esperada de una acción (basada en los dividendos futuros y su precio futuro) es posible que pueda encontrarse por encima o por debajo de LAM. Una rentabilidad por encima de la LAM, significa que el mercado la está subvaluando (al tener un precio menor que el "real", su rentabilidad es mayor) Una rentabilidad por debajo de la LAM significa que el mercado la está sobrevalorando (al tener un precio mayor que el "real", su rentabilidad es menor). Esto supone que las proyecciones son correctas y el precio de mercado no.

¿Cuánto durará esto? Poco. Una acción subvalorada (precio inferior, rentabilidad sobrevalorada) será atractiva para el mercado, por tanto su demanda aumentaría y su precio debería subir hasta que su rentabilidad, descienda hasta el valor indicado por la LAM. En caso contrario (precio sobrevalorado, rentabilidad subvalorada), no será atractiva para el mercado y su precio deberá bajar, hasta alcanzar el precio que ubique su rentabilidad, en el valor indicado por la LAM.

Como ya se dijo, según el modelo CAPM, todas las acciones del mercado deben tener su rentabilidad sobre esta línea. Sin embargo, es posible que en la realidad estas rentabilidades puedan encontrarse por encima o por debajo de esa línea. Cuando una rentabilidad está por encima de la LAM, significa que el mercado la está subvaluando (al tener un precio menor que el "real", su rentabilidad es mayor). Por el contrario, una rentabilidad por debajo de la LAM significa que el mercado la está sobrevalorando (al tener un precio mayor que el "real", su rentabilidad es menor). Esta situación, en teoría, no debe permanecer por mucho tiempo, ya que una acción subvalorada (precio inferior, rentabilidad sobrevalorada) deberá ser atractiva para el inversionista, por lo tanto su demanda debería aumentar; al aumentar la demanda de la acción, su precio deberá subir hasta cuando su rentabilidad, ahora por debajo de la LAM, ascienda hasta el valor indicado por la LAM. En el caso contrario (precio de la acción sobrevalorado, rentabilidad subvalorada), esta acción no será atractiva al inversionista y no la comprarán, por lo tanto, su precio deberá bajar, hasta alcanzar el precio que ubique su rentabilidad, ahora por arriba de la LAM, en la misma LAM.

Con los datos de la Superintendencia de Valores, ya mencionados, se calculó la LAM, pero no hay consistencia con el modelo presentado[6]. Por otro lado, se analizaron las rentabilidades en relación con la misma LAM (para determinar si están o no sub o sobrevaloradas) y se compararon con la *q* de Tobin, sin encontrar relación significativa entre el exceso (o defecto) de rentabilidad o sobrevaloración (subvaloración) y q>1 (q<1). De hecho, la correlación resultó mínima y negativa (R^2=0.01364012 y coeficiente de correlación = -0.1167909).[7] Esto puede obedecer a varias causas, entre otras: la rentabilidad y las betas la calcularon como un promedio sobre 6 años, mientras que la *q* de Tobin se calculó para diciembre de 1995; por otro lado, es posible que los valores en libros no reflejen el valor real del patrimonio, a pesar de que para esa fecha ya era obligación legal hacer ajustes por inflación.

---

[6] Los resultados fueron: r = 43.90% y R_m-r = -4.12%, pero R_m = 49.58% (calculado como el promedio anual del IBB y del Ibomed)

[7] Se considera válido suponer que la sobrevaloración (subvaloración) se debe a un mayor (menor) precio actual (diciembre de 1995) ya que los datos de rentabilidad del estudio mencionado son globales para todo el lapso del estudio y se anualizaron. Esto hace comparable, en cierta medida, la rentabilidad de la acción con la *q* de Tobin (que está calculada para diciembre de 1995).

Uso del modelo CAPM para calcular el costo del capital propio

Uno de los problemas más complejos de las finanzas es el de calcular la tasa de descuento para tomar decisiones de inversión. En otro trabajo se planteaba que la tasa de descuento era la máxima entre el costo de oportunidad del dinero y el costo de capital. El costo de capital se ha calculado como un ponderado de los costos de las diferentes fuentes de fondos, haciendo énfasis en que se debe tratar de determinar este promedio sobre la base de los flujos de caja de las financiaciones futuras y no de los datos pasados (contables), ya que precisamente se trata de evaluar inversiones que tienen flujos de caja hacia el futuro. Así mismo, se ha hecho especial énfasis en la dificultad de medir el costo de capital de los accionistas.

Pues una forma de hacerlo es medir el $\mathbf{R_j}$ basado en la rentabilidad del portafolio de mercado y el beta de la acción.

$$R_j = r + \beta_j(R_m - r)$$

Ahora bien, no siempre es posible medir la beta de la acción debido a que no se transa con frecuencia en el mercado, o sencillamente, porque es una acción no inscrita en la bolsa. En este caso, que es el más común en el medio colombiano, hay que hacer una aproximación y se debe utilizar una beta calculada para una o varias compañías (o sector) más cercano, que aquí se va a llamar "proxy". Se debe enfatizar que lo que se debe hacer es medir o predecir las betas futuras, ya que al usar los datos históricos para predecir beta, se está suponiendo que el pasado se repite y esto puede no ser cierto.

Este enfoque es posible siempre que el endeudamiento de la empresa (o empresas, sector) sea idéntico al de la empresa cuyo costo de las acciones se desea estimar. En caso de no ser así, deberá hacerse un ajuste por endeudamiento. Esto es particularmente importante si la empresa para la cual se hace el estimativo debe pagar impuestos (es posible que esté exenta o que en los primeros años no produzca utilidades, en caso de un proyecto nuevo).

Hamada ha demostrado que, debido a que los pagos de interés son deducibles de impuestos, (aquí habría que hacer un ajuste también para el caso del arriendo financiero), entonces la rentabilidad R_j de una acción se modifica así:

$$R_j = r + \left(\frac{R_m - r}{\sigma_m^2}\right)\left(\rho_{jsd,m}\sigma_{jsd}\sigma_m\right)\left[1 + \frac{D}{P}(1-T)\right]$$

donde

R_j = rentabilidad de la acción j que se va a usar como aproximación ("proxy")

R_m = rentabilidad del portafolio de mercado

r = tasa de interés libre de riesgo

σ_m = desviación estándar del portafolio de mercado

σ_m^2 *= varianza del portafolio del mercado*

$\rho_{jsd,m}$ *= coeficiente de correlación entre la* ***rentabilidad de la acción j (proxy) sin deuda*** *y el portafolio de mercado*

σ_{jsd} *= desviación estándar de la rentabilidad de la acción j ("proxy")* ***sin deuda***

$\frac{D}{P}$ *= endeudamiento de la firma "proxy" (pasivos sobre* ***patrimonio*** *en términos del* ***valor de mercado de la acción "proxy"****)*

T = tasa de impuestos

Esta expresión ya es conocida en parte y se puede por lo tanto, rescribir así:

$$R_j = r + (R_m - r)\beta_{jsd}\left[1 + \frac{D}{P}(1-T)\right] = r + (R_m - r)\beta_{jsd} + (R_m - r)\beta_{jsd}\frac{D}{P}(1-T)$$

donde

β_{jsd} = es la beta de la acción **sin deuda**. O sea, la beta del costo de capital del accionista cuando la firma no está apalancada. En la literatura se indica con diferentes siglas, por ejemplo ρ (letra griega rho), K_u o K_A.

La última parte de esta expresión mide el riesgo financiero:

$$(R_m - r)\beta_{jsd}\left[\frac{D}{P}(1-T)\right]$$

La beta observado es β_j y tiene incluidos ambos riesgos, o sea, que

$$\beta_j = \beta_{jsd}\left[1+\frac{D}{P}(1-T)\right]$$

despejando β_{jsd} se tiene,

$$\beta_{jsd} = \frac{\beta_j}{\left[1+\frac{D}{P}(1-T)\right]}$$

Cuando la firma que está tratando de determinar su beta tenga endeudamiento, hay que hacer un ajuste en el sentido contrario al resultado de esta expresión, así:

$$\beta_{jcd} = \beta_{jsd}\left[1+\frac{D}{P}(1-T)\right]$$

donde

β_{jcd} = beta de la firma con su deuda

β_{jsd} = beta sin endeudamiento, que se calculó a partir de otra firma "proxy"

$\frac{D}{P}$ = endeudamiento de la firma para la cual se desea hacer el estimativo del beta

De aquí se puede deducir la relación entre una acción en bolsa y otra que no lo esté. Esa relación se da a través del endeudamiento, así:

$$\beta_{anb} = \beta_{ab}\frac{\left[1+\frac{D_{anb}}{P_{anb}}(1-T)\right]}{\left[1+\frac{D_{ab}}{P_{nb}}(1-T)\right]}$$

Donde, β_{anb} es la beta de la acción no registrada en bolsa; β_{ab} es la beta de la acción registrada en bolsa; D_{anb} es la deuda de la acción no registrada en bolsa, P_{anb} es el patrimonio de la acción no registrada en bolsa; D_{ab} es la deuda de la acción registrada en bolsa, P_{ab} es el patrimonio de la acción registrada en bolsa

Por ejemplo, si se tiene una acción en bolsa con una β_{ab} de 1,3; con una deuda D_{ab} vale 80, P_{ab} vale 100, y se desea estimar la beta de una acción no registrada en bolsa de D_{anb} 70 y con un patrimonio P_{anb} de 145 y una tasa de impuestos de 35%, entonces la beta de la acción no registrada en bolsa β_{anb} será de

$$\beta_{anb} = \beta_{ab}\frac{\left[1+\frac{D_{anb}}{P_{anb}}(1-T)\right]}{\left[1+\frac{D_{ab}}{P_{nb}}(1-T)\right]} = 1{,}3\frac{\left[1+\frac{70}{145}(1-35\%)\right]}{\left[1+\frac{80}{100}(1-35\%)\right]} = 1{,}12$$

Aquí hay que hacer una advertencia: cuando se calcula el costo del capital de las acciones para ser usado en la determinación del costo del capital promedio de la firma y de allí estimar la tasa de descuento, se está suponiendo de manera implícita que no se hace un análisis del riesgo explícito de la inversión que se desea evaluar con esta tasa de descuento. Esto es, que se "descuenta" el riesgo al aumentar la tasa de descuento, vía la prima de riesgo que existe en el costo de capital de las acciones. Si se hace un análisis del riesgo de manera explícita deberá utilizarse la tasa libre de riesgo r, la cual debería poderse estimar como

$$r= (1+i_r)(1+i_f)-1$$

donde

i_r= tasa real de interés

i_f= componente inflacionaria en la tasa libre de riesgo

Una posición alterna sería considerar que la empresa debe reconocer esa tasa de interés a los accionistas y que **el riesgo que está incluido en ella es del accionista** y que por ello "cobra". En este caso debería utilizarse ese valor como **libre de riesgo para la empresa**, e incorporarlo al costo promedio de capital.

Implicaciones de la diversificación en la selección de alternativas de inversión

Todo lo aquí estudiado indica que el tradicional análisis del máximo VPN (mayor que cero) como criterio para escoger alternativas pierde su validez. Será posible y recomendable, escoger proyectos con VPN negativos siempre y cuando al combinarse con otros positivos, mejoren el nivel de riesgo siempre que el riesgo asociado a esos proyectos sea el no sistemático; es decir, si las variables que afectan a un proyecto están relacionadas únicamente con la economía en general, se está hablando entonces de riesgo sistemático, el cual no se puede reducir por diversificación. Debe aclararse que se deben estudiar, inclusive, las combinaciones de proyectos nuevos con otros ya existentes en la firma, puesto que esa consideración puede llevar a un menor riesgo.

Como esta situación ideal no siempre ocurre, entonces el criterio de escogencia deberá seguir siendo el del VPN positivo, pero en este caso lo que se trataría de maximizar es la relación heurística -coeficiente de variación modificado- entre VPN y probabilidad de fracaso del proyecto, así:

$$CV = \frac{VPN}{\Pr(fracaso)}$$

En caso de proyectos mutuamente excluyentes se escogería aquél proyecto con mayor CV. En caso de proyectos independientes, se escogería la combinación de proyectos que presenten la suma máxima de sus CV. En caso de proyectos condicionales (uno exige la realización de otro, "encadenados"), se podría pensar en la misma expresión, pero sumando los VPN's y dividiendo por la probabilidad de fracaso[8], así:

$$CV_{cond} = \frac{\sum_{i=1}^{n} VPN_i}{\prod_{i=1}^{n} \Pr(fracaso)_i}$$

donde

CV_{cond} = coeficiente de variación modificado para proyectos condicionales (uno depende de otro)

Estos indicadores tipo coeficiente de variación son útiles para casos (que se pueden construir), en donde la regla valor esperado-varianza (E-V) funciona.

[8] Se suponen que son alternativas de inversión independientes (estadísticamente independientes)

Algunos aspectos prácticos e ideas para investigar

Como es imposible que un decisor pueda invertir en **todas** las opciones del mercado; de hecho, sin tener evidencia empírica estadísticamente aceptable, se puede "ver" que los inversionistas invierten en sólo algunas acciones, por lo tanto se alejan de uno de los supuestos de estos modelos. En otras palabras, en la práctica se trabaja con portafolios reducidos, con pocas acciones. Queda de todas maneras planteada la pregunta de cómo asignar las proporciones a las acciones que se están estudiando. Una posibilidad entonces es trabajar por ejemplo, con las acciones más transadas (en el caso colombiano son cerca de 20 y hacen parte del indicador IBB de la Bolsa de Bogotá) y diseñar, a partir de allí, un portafolio "óptimo". Se utilizaría como rentabilidad del portafolio del mercado el rendimiento calculado a partir de las variaciones del IBB.

Sin embargo, también en la práctica 20 acciones parece ser un portafolio demasiado grande y parece que la gente mantiene portafolios de un número mucho menor de acciones. Se puede entonces, utilizar una aproximación heurística y escoger una acción de cada sector por medio de la maximización de un índice que relacione la rentabilidad promedio con el riesgo sistemático (beta) de cada acción así:

$$\underset{i}{Max}\ \frac{R_i}{\beta_i}$$

esto se haría para cada sector y con esas acciones se procedería a diseñar el portafolio óptimo.

Otra posibilidad es la de trabajar con las 20 acciones más transadas, pero escoger el portafolio que minimice, dada una tasa mínima de rentabilidad aceptable, el producto entre la probabilidad de que esa rentabilidad no se alcance y la desviación estándar del portafolio. Se construiría una tabla que relacione esas variables así:

- Rentabilidad del portafolio tomada de la frontera eficiente (1)
- Desviación estándar del portafolio tomada de la frontera eficiente (2)
- Probabilidad de que ese portafolio no logre cierta rentabilidad mínima (se calcularía con la distribución normal con rentabilidad del portafolio como media y varianza igual al cuadrado de la desviación estándar). (3)

- Minimizar el valor resultante de (2)x(3)[9]

Estas propuestas tratan de responder a la necesidad de escoger un cierto portafolio cuando las condiciones del modelo no se cumplen o los resultados no son coherentes, tal y como se mencionó en el aparte de la línea de acciones del mercado (LAM). Todas estas propuestas son ideas que podrían definir proyectos de investigación y trabajos de grado. Algunas otras podrían ser:

- Diseñar y validar un método para estimar el costo de capital de los accionistas a través de empresas "proxy".
- Verificar cómo diseñan su portafolio los inversionistas colombianos, incluido el tamaño del mismo.
- Verificar si la tasa libre de riesgo es o ha sido la relación entre interés real e inflación (actual o expectativa), esto es si $r=(1+i_r)(1+i_f)-1$, donde i_r es la tasa real de interés (6%), i_f es la componente inflacionaria y r es la tasa libre de riesgo.
- Verificar la validez del modelo CAPM en el mercado colombiano, examinando si, por ejemplo, al evaluar la LAM se llega a determinar una r consistente con los datos del mercado[10]. En particular, se podría examinar un conjunto de betas, calculado para cierto período de tiempo y establecer una regresión del tipo

$$x_i = d_o + d_1\beta_i$$

donde

x_i = valor de la rentabilidad de la acción i

d_o = deberá coincidir con la tasa libre de riesgo

d_1 = deberá coincidir con el exceso de la rentabilidad del portafolio de mercado sobre la tasa libre de riesgo

β_i= beta de la acción i

- Con base en trabajos anteriores (Cabal, Mejía) convertir la función de utilidad-dinero en una función de utilidad rentabilidad-riesgo (desviación estándar)

[9] Ver ilustración de este procedimiento en el Apéndice.
[10] Ver comentarios y resultados en el aparte donde se presentó la LAM.

- Verificar y validar la identificación del portafolio de mercado a través de la maximización de la tangente del ángulo de la LMC.
- Verificar la relación entre acciones subvaluadas y sobrevaloradas comparando la rentabilidad con la indicada por la LAM y calculando la q de Tobin.[11]
- Desarrollar y validar un modelo para seleccionar pequeños portafolios
- Explorar la capacidad de "predicción" del modelo de Markowitz y de otros, examinando el comportamiento histórico de las acciones (20 años, por ejemplo), y construir portafolios que se evaluarían con los resultados del período siguiente.
- Explorar este tipo de modelo para papeles de renta fija.
- Explorar otros criterios de optimización además de los aquí esbozados, sin ventas a futuro, esto es, α_i no negativos y siempre $\Sigma\alpha_i=1$, como por ejemplo,
    - Maximizar el valor esperado de la rentabilidad del portafolio, sujeto a P(R>=t.d.)>d, d sería una constante (percentile, por ejemplo) determinada por el decisor.
    - Maximizar P(R>=t.d.) donde t. d. es la tasa de descuento del decisor y R es la rentabilidad del portafolio.
    - Maximizar suma de dinero al final del período de análisis (un año, por ejemplo), sujeto a ciertos valores mínimos de efectivo en cada mes y cumpliendo ciertos máximos de inversión por acción y/o por empresa emisora.
    - Minimizar el σ promedio del portafolio.

Nota final

Nunca será excesivo insistir en que todos los modelos que aquí se presentan son apenas una ayuda para la toma de decisiones. En el caso particular de los modelos de selección "óptima" de portafolio, no se puede olvidar que la diversificación sólo **reduce** el riesgo no sistemático. Por lo tanto, queda el sistemático y cuando hay riesgo, exactamente la probabilidad de pérdida no es cero. No es aceptable la posición de aquel que invirtió y no le fue bien, a pesar de haber "calculado betas, q de Tobin, y muchos otros índices" y su

[11] Ver comentarios y resultados en el aparte donde se presentó la LAM.

conclusión fue que los modelos no servían porque con todo ese análisis esperaba que no hubiera incertidumbre. La incertidumbre existirá mientras el ser humano sea libre y muchas veces incoherente en su comportamiento; ojalá que no pierda su libertad, aunque el costo sea alto en términos del riesgo.

Referencias

Benninga, Simon Z. (1997), **Financial Modeling**, MIT Press.

Black, F. (1972). "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing." **Journal of Business** 45 (July), 444-455.

Botero Bustillo, Carlos Andrés y Efraín Rosas Díaz, 2002, **Selección de portafolios óptimos: El caso colombiano,** Trabajo de grado Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá.

Burbano, Antonio, 1997, El modelo CAPM en Colombia, **Monografías**, Bogotá: Universidad de los Andes.

Cabal, M.F., 1982, **Actitud de los ejecutivos ante el riesgo: Aplicación de la teoría de utilidad a un grupo de gerentes de Bogotá**. Trabajo de grado, Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, dic. (sin publicar).

Caicedo, Edinson, 1997, Modernas teorías financieras, mercados emergentes y determinantes de la inversión en una nación, **Pliegos Administrativos y financieros**, Universidad del Valle, Cali.

Elton Edwin J. and Martin Jay Gruber (1995), **Modern portfolio theory and investment analysis**, Wiley.

Evans, J. H. y S. H. Archer, 1968, "Diversification and the Reduction of Dispersion: An Empirical Analysis", **Journal of Finance**, December. (Citado por Van Horne).

Fama, Eugene, 1968, "Risk, Return, and Equilibrium - Some Clarifying Comments" **Journal of Finance**, 23 (March), 29-40. (Citado por Van Horne y Levy y Sarnat)

Fama, Eugene y Merton Miller, 1972, **Theory of Finance**, New York: Holt,. (Citado por Van Horne)

Hamada, Robert S., 1969, "Portfolio Analysis, Market Equilibrium and Corporate Finance", **Journal of Finance**, 24 (March).

Levy, Haim y Marshall Sarnat, 1982, **Capital Investment and Financial Decisions**, 2nd Ed., Englewood Cliffs: Prentice Hall,

Lintner, John, 1965, "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stocks Portfolios and Capital Budgets", **Review of Economics and Statistics**, 47 (february) 13-37. (Citado por Van Horne y Levy y Sarnat)

Markowitz, Harry M., 1959, **Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments**, New York: Wiley. (Citado por Van Horne y Levy y Sarnat)

_____, 1952, "Portfolio Selection", **Journal of Finance**, (March). (Citado por Levy y Sarnat)

Mejía, S., 1982, **Determinación de la función de utilidad de ejecutivos de Bogotá: Un enfoque de teoría de juegos**. Proyecto de grado, Universidad de los Andes, Bogotá, enero, (sin publicar).

Merton, R. C. 1973, "An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier." **Journal of Financial and Quantitative Análisis**, 7 (September), 1851-1872.

Ministerio de Hacienda - Banco Mundial - Fedesarrollo, 1996, **Misión de Estudios del Mercado de Capitales. Informe Final**, Bogotá,

O'Brien, John y Sanjay Srivastava, **Investments A Visual Approach Modern Portfolio Theory and CAPM Tutor**, Cincinnati: South-Western College Publishing, 1995

Sharpe, William F., 1963, "A Simplified Model for Portfolio Analysis", **Management Science**, 10, (January), 277-293. (Citado por Van Horne y Levy y Sarnat)

_____, 1964, "Capital Assets Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk", **Journal of Finance**, 19, (September), 425-442. (Citado por Van Horne y Levy y Sarnat)

_____, 1985, **Investments**, 3rd Ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall. (Citado por Van Horne y Levy y Sarnat)

_____, 1970, **Portfolio Theory a nd Capital Markets**, New York: McGraw-Hill,. (Citado por Levy y Sarnat)

Superintendencia de Valores, 1995, **Coeficientes Beta, diciembre de 1995 OEE-IE-96**, Bogotá: mayo de, 12 pp.

Tobin, James, 1958, "Liquidity Preference as Behavior towards Risk", **Review of Economics Studies**, 25 (febrero), 65-86. (Citado por Van Horne y Levy y Sarnat)

Van Horne, James C., 1997, **Financial Management and Policy**, 11th Ed., Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Ejercicios

¿Las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas? Argumente la respuesta.

- Se puede eliminar el riesgo sistemático por medio de la diversificación.
- Si la rentabilidad esperada de una acción es 24% y se sabe que la beta de esa acción es 1.5 y si la rentabilidad del mercado es 19% y si el CAPM funciona, entonces la tasa libre de riesgo es 5%.