Universidad Nacional de Salta
Facultad de Ciencias Económicas,
Jurídicas y Sociales
Instituto de Investigaciones Económicas
Reunión de Discusión N° 44
Fecha: 02/05/89
Hs.: 16,30

ALGO MAS SOBRE EL COEFICIENTE DE GINI

Eusebio Cleto del Rey

1. Introducción

En una R.D. anterior, referida al coeficiente de Gini [1/], preparamos el terreno para el análisis que presentamos en este trabajo, razón por la cual haremos referencia a ella con cierta frecuencia, identificándola como R.D. 42.

Con respecto al coeficiente que nos ocupa, es común la afirmación: Puede tomar cualquier valor no superior a uno ni inferior a cero. A la perfecta igualdad le corresponde un valor nulo del coeficiente, por lo cual parece imposible, intuitivamente, que su signo sea negativo. En las 20° Jornadas de Finanzas Públicas nos tocó comentar un trabajo de Petrei [2/] en el que aparecen coeficientes de Gini con signo menos, poniéndonos en contado con el fenómeno que es motivo del presente trabajo. Debido a las circunstancias en que este hecho tiene lugar, nos preguntábamos en el referido comentario: "¿Es ortodoxo el uso que

---

1/ del Rey, Eusebio Cleto: "El Coeficiente de Gini", Reunión de Discusión N° 42, Instituto de Investigaciones Económicas, Facultad de Cs. Económicas, Jurídicas y Sociales, UNSa., 15/3/1989.

2/ Petrei, A. Humberto: "Efectos Distributivos del Gasto Público Social: Resumen de un Estudio para Cinco Países de América Latina", Comité Ejecutivo de las Jornadas de Finanzas Públicas: 20° Jornadas de Finanzas Públicas, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Córdoba, 1987, pág. 15.1/51.

Petrei hace del coeficiente?". Para respondernos inmediatamente:"Si no lo es al menos resulta útil" 3/. Siendo útil, vale la pena que nos preocupemos en encontrar las condiciones que hacen que el coeficiente de Gini tenga uno u otro signo o sea nulo.

Es así como en la Sec. 2 establecemos las referidas condiciones, necesarias y suficientes, aplicadas a la fórmula general -R.D. 42, ecuación (1)-, en tanto que en la Sec. 3 las consideramos para el caso particular en que los extremos de clase son los quintiles, deciles, etc. (salvo el primero y el último) -R.D. 42, ecuaciones (2) ó (6)-. Dentro de esta última sección tenemos dos subsecciones. La 3.1 en la que se presentan las condiciones necesarias y suficientes para este caso, y la 3.2 referida a condiciones sólo suficientes. Por último, las conclusiones alcanzadas son expuestas en la Sec. 4.

2. Condiciones Necesarias y Suficientes en el Caso General

Partimos de la fórmula general del coeficiente de Gini -R.D. 42, ecuación (1)-:

$$C = 1 - \sum_{i=1}^{n} (P_i - P_{i-1})(r_i + r_{i-1}) \tag{1}$$

Recordemos que -R.D. 42, pág. 4-:

$$f_i = P_i - P_{i-1} \tag{2}$$

Entonces, (1) puede ser escrita:

$$C = 1 - \sum_{i=1}^{n} f_i \,(r_i + r_{i-1}) \tag{3}$$

3/ del Rey, Eusebio Cleto: "Comentario al Trabajo de A. Humberto Petrei (ECIEL): 'Efectos Distributivos del Gasto Público Social: Resumen de un Estudio para Cinco Países de América Latina'", presentado en las XX Jornadas de Finanzas Públicas, Córdoba, 1987, inédito, pág. 3.

Para determinar la condición necesaria y suficiente para que el coeficiente sea nulo hagamos: C = 0, y apliquemos (3) obteniendo:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} f_i \; (r_i + r_{i-1}) = 0 \qquad (4)$$

Sumamos y restamos Y_i en el paréntesis de (4):

$$1 - \sum_{i=1}^{n} f_i \; (r_i + r_{i-1} + Y_i - Y_i) = 0 \qquad (5)$$

De la definición de r_i -R.D. 42, pág. 3- surge que:

$$r_i = r_{i-1} + Y_i \qquad (6)$$

Reemplazando (6) en (5) y haciendo un poco de álgebra llegamos a:

$$1 - 2 \sum_{i=1}^{n} f_i \; r_{i-1} - \sum_{i-1}^{n} f_i \; Y_i = 0 \qquad (7)$$

De donde surge inmediatamente que:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f_i \; Y_i = \frac{1}{2} - \sum_{i-1}^{n} f_i \; r_{i-1} \qquad (8)$$

A partir de (8) podemos llegar a (4) siguiendo el camino inverso al anterior. Por lo tanto, el coeficiente de Gini es nulo sí, y sólo sí se cumple (8).

De un modo similar se puede demostrar que C > 0 sí, y sólo sí:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f_i \; Y_i < \frac{1}{2} - \sum_{i-1}^{n} f_i \; r_{i-1} \qquad (9)$$

y que C < 0 sí, y sólo sí:

$$\frac{1}{2} \sum_{i-1}^{n} f_i \; Y_i > \frac{1}{2} - \sum_{i-1}^{n} f_i \; r_{1-1} \qquad (10)$$

Las condiciones (8), (9) y (10) pueden ser interpretadas, en forma gráfica, del siguiente modo:

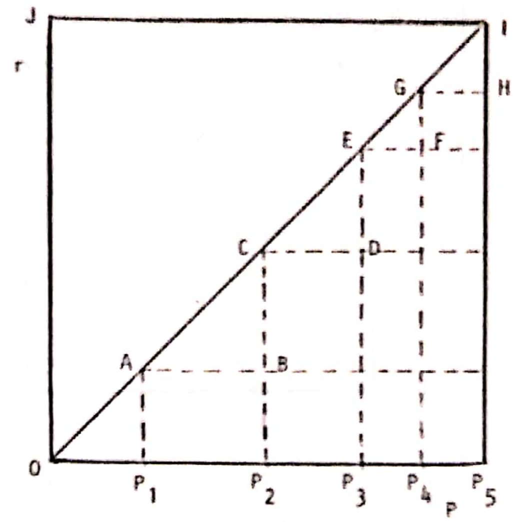

GRAFICO N° 1

C = 0

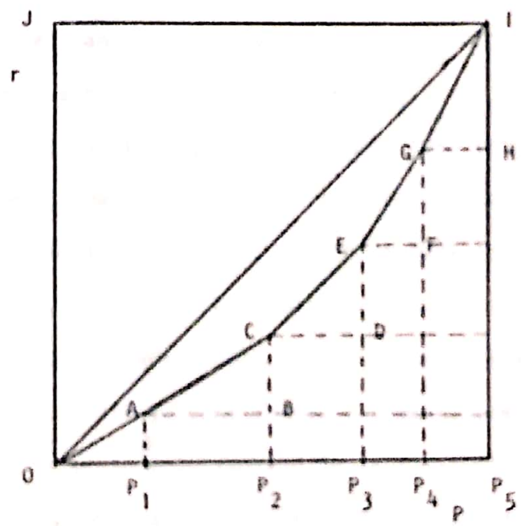

GRAFICO N° 2

C > 0

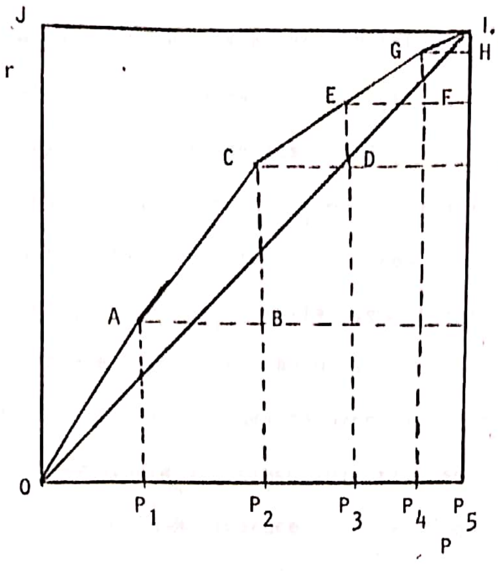

GRAFICO N° 3

$C < 0$

En cualquiera de los tres gráficos, la recta 0I es la de la perfecta igualdad, en tanto que la recta quebrada 0ACEGI es la curva de Lorenz. Siempre en cualquiera de los gráficos, $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f_i \, Y_i$ es la suma de las superficies de los triángulos OP_1A, ABC, CDE, EFG y GHI. Para demostrar esto último, tomemos por caso el segundo de esos triángulos: Su base, AB es igual a la distancia P_1P_2 que no es otra cosa que f_2, según (2); mientras que BC, su altura, es igual a r_2 (CP_2) menos r_i (AP_1 = = BP_2), o sea a Y_2, como puede deducirse de (6); aplicando la fórmula de la superficie de un triángulo obtenemos entonces, que: superficie de ABC = $\frac{1}{2} f_2 \, Y_2$, que es el segundo sumando de la sumatoria que nos ocupa. Es posible hacer una demostración similar para los otros triángulos.

También en cualquiera de los gráficos, se puede ver que $\sum_{i=1}^{n} f_i \, r_{i-1}$ es la superficie comprendida entre la recta quebrada P_1ABCDEFGH, el eje horizontal y el segmento HP_5. En efecto, tal superficie es la suma de los rectánculos P_1ABP_2, P_2CDP_3, P_3EFP_4 y P_4GHP_5, cada uno de los cuales tiene un área igual a $f_i r_{i-1}$. Esto último lo veremos tomando por caso al primero de los rectángulos, cuya base es P_1P_2, o sea f_2 según vimos; y cuya altura AP_1 es igual a r_1, como también vimos. Empleando la fórmula para calcular el área de un rectángulo tenemos: superficie de $P_1ABP_2 = f_2r_1$. Similar demostración es aplicable a los otros casos. Nótese que los rectángulos son sólo cuatro (en el caso particular de los quintiles, pues en general son n-1), en tanto que los sumandos de la sumatoria son cinco (n). Ello se debe a que el primer sumando de la sumatoria no aparece como rectángulo por ser su superficie $f_1r_o = 0$, puesto que $r_o = 0$ (R.D. 42, pág. 5).

Puesto que la superficie del cuadrado $OJIP_5$ es igual a la unidad (es P_5r_5, donde: $P_5 = 1$; $r_5 = 1$), el área del triángulo OIP_5 es igual a un medio. Tenemos así la representación gráfica de todos los elementos de las expresiones (8), (9) y (10); lo que nos permite las siguientes interpretaciones:

i) Si la suma de las áreas de los triángulos OP_1A, ..., GHI es igual a la superficie del triángulo OIP menos la sumatoria de las áreas de los rectángulos P_1ABP_2, ... P_4GHP_5, se cumple (8) y, por lo tanto,es $C = 0$. Es lo que vemos en el Gráfico N° 1.

ii) Si la suma de las áreas de los triángulos OP_1A, ...,GHI es menor que la superficie del triángulo OIP menos la sumatoria de las áreas de los rectángulos P_1ABP_2, ..., P_4GHP_5, se cumple (9) y, por lo tanto, es $C > 0$. Es lo que vemos en el Gráfico N° 2.

iii) Si la suma de las áreas de los triángulos OP_1A, ..., GHI es mayor que la superficie del triángulo OIP menos la sumatoria de las áreas de los rectángulos P_1ABP_2, ...,P_4GHP_5, se cumple (10) y, por lo tanto, es C < 0. Es lo que vemos en el Gráfico N° 3.

3. Condiciones Necesarias y Suficientes en un Caso Particular

El caso que aquí consideramos es aquel en el que los límites de los intervalos de clase (salvo el primero, que es cero o menos infinito, y el último, que es infinito) son los quintiles, deciles, etc. Ello nos permite utilizar una fórmula del coeficiente de Gini -R.D. 42, ecuaciones (2) ó (6)- que facilita el manipuleo algebraico.

Es así como en la Sec. 3.1 presentamos las condiciones de la sección anterior, pero más simples, que corresponden al caso que nos ocupa. Como veremos más adelante, ellas permiten interesantes interpretaciones intuitivas.

En este caso es posible, además, establecer condiciones suficientes para que C tenga uno u otro signo o sea nulo, las que aportan ideas útiles. Es lo que hacemos en la Sec. 3.2.

3.1. Condiciones Necesarias y Suficientes

Partimos de la fórmula del coeficiente de Gini aplicable al caso que nos ocupa -R.D. 42, ecuación (6)-:

$$C = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} i \, Y_i - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \tag{11}$$

Recordemos que la suma de los n primeros números naturales es [4/]:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \, (n + 1)}{2} \tag{12}$$

4/ Véase, por ejemplo: Kmenta, Jan: Elements of Econometrics, New York, Macmillan, 1971, ecuación (A.4), pág. 602.

Multiplicando y dividiendo el primer sumando del segundo miembro de (11) por el segundo miembro de (12) obtenemos:

$$C = (n + 1) \sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n\,(n + 1)}\, Y_i - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \tag{13}$$

Llamemos:

$$w_i = \frac{2i}{n\,(n + 1)} \tag{14}$$

Reemplazando (14) en (13) tendremos:

$$C = (n + 1) \sum_{i=1}^{n} w_i\, Y_i - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \tag{15}$$

Operando en el último paréntesis del segundo miembro de (15), y sacando luego factor común (n + 1), llegamos a:

$$C = (n + 1)\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\, Y_i - \frac{1}{n}\right) \tag{16}$$

Puesto que $n > 0$, el signo de C depende de la relación existente entre $\sum_{i=1}^{n} w_i Y_i$ y $\frac{1}{n}$, como se puede ver fácilmente en (16).

Específicamente:

C = 0 sí y sólo sí:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\, Y_i = \frac{1}{n} \tag{17}$$

Del mismo modo: C > 0 sí y sólo sí:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\, Y_i > \frac{1}{n} \tag{18}$$

y C < 0 sí y sólo sí:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\, Y_i < \frac{1}{n} \tag{19}$$

A (17), (18) y (19) se puede llegar a partir de (8), (9) y (10), respectivamente, teniendo en cuenta que en el caso particular que ahora consideramos es cierto que: $f_i = \frac{1}{n}$ para todo i = 1, 2,..., n.

3.2. Condiciones Suficientes

Si $Y_i = Y$ para todo i = 1, 2, ..., n, será:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = n\,Y \tag{20}$$

Pero, de la definición de Y_i (R.D. 42, pág. 3) surge de inmediato que:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 1 \tag{21}$$

y de allí, aplicando esta última expresión a (20):

$$Y = \frac{1}{n} \tag{22}$$

Esto nos permite escribir (teniendo en cuenta que $Y_i = Y$):

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\,Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i \tag{23}$$

Pero de (12) y (14) se deduce que:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = \frac{2}{n\,(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i = 1 \tag{24}$$

Aplicando (24) a (23) obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\,Y_i = \frac{1}{n} \tag{25}$$

que es la condición (17) para que C = 0. En consecuencia, que todos los Y_i sean iguales entre sí es condición suficiente para que C = 0. Pero no es necesaria, pues (25) -o (17)- puede cumplirse aunque no sean iguales entre sí los Y_i.

Pasemos a considerar el caso en el que no todos los Y_i son iguales. Definamos:

$$k_i = Y_i - Y \tag{26}$$

Téngase en cuenta que Y de (26) es el mismo que en (22), y que no todos los k_i pueden ser nulos, puesto que, si lo fueran, todos los Y_i serían iguales entre sí y estaríamos en el caso anterior. Nótese que, según (26), (22) y (21), será:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i - 1 = 0 \tag{27}$$

La ecuación (26) nos permite escribir:

$$Y_i = Y + k_i \tag{28}$$

y de (28) y (24) surge que:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i Y_i = \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n} w_i k_i \tag{29}$$

A partir de (29) podemos establecer de otro modo la condición (19): C < 0 sí y sólo sí:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i k_i < 0 \tag{30}$$

y esto sólo puede ser cierto, habida cuenta de (27), si los $k_i < 0$ tienen más peso en la sumatoria que los $k_i > 0$.

Pero, por simple inspección de (14), resulta:

$$w_i < w_{i+\$} \tag{31}$$

para todo $s > 0$ en tanto $i + s \leq n$.

De lo anterior se desprende que, para que se cumpla (30) es necesario que los $k_i < 0$ correspondan a valores de i mayores que los de los $k_i > 0$.

Una forma de que ello sea cierto es:

$$k_1 > k_2 > k_3 > \ldots > k_n \qquad (32)$$

o, lo que es lo mismo, por (28):

$$Y_1 > Y_2 > Y_3 > \ldots > Y_n \qquad (33)$$

Por lo tanto, si (33) es cierto también lo son (32) y (30). Esto quiere decir que (33) es condición suficiente para que $C < 0$.

En forma similar se puede demostrar que, si:

$$Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n \qquad (34)$$

será cierto que $C > 0$. Esto es: (34) es condición suficiente para que el coeficiente de Gini sea positivo.

4. Conclusiones

A - En la Sec. 2 de este trabajo hemos establecido las condiciones necesarias y suficientes para que el coeficiente de Gini sea nulo, positivo o negativo. Son las expresiones (8), (9) y (10). Tales relaciones no resultan de fácil interpretación, salvo en la forma gráfica expuesta en la misma sección.

B - En la Sec. 3.1 llegamos a las condiciones mencionadas en el párrafo anterior, para el caso particular en el que trabajamos con quintiles, deciles, etc. Son las que corresponden a las expresiones

(17), (18) y (19). Ellas pueden ser interpretadas del modo que pasamos a exponer. La ecuación (14) nos permite comprobar que w_i es positivo para todo i = 1, 2, ..., n. Por otra parte, en (24) vemos que la sumatoria de w_i, para los mencionados valores de i, es igual a la unidad. Por lo tanto, los w_i reunen las condiciones para ser pesos de un promedio ponderado. Esto nos dice que el primer miembro de (17), (18) y (19) puede ser interpretado como el promedio ponderado de los Y_i. Al segundo miembro de esas expresiones lo podemos interpretar de acuerdo a (22). Todo ello nos permite leer las condiciones que nos ocupan del siguiente modo:

a) El coeficiente de Gini será nulo sí y sólo sí el promedio ponderado de las proporciones no acumuladas del ingreso que van a las distintas clases es igual a la que le correspondería a cada una de ellas si todas esas proporciones fueran iguales. Véase (17).

b) El coeficiente de Gini será positivo sí y sólo sí el promedio ponderado de las proporciones no acumuladas del ingreso que van a las distintas clases es mayor a lo que le correspondería a cada una de ellas si todas esas proporciones fueran iguales. Véase (18).

c) El coeficiente de Gini será negativo sí y sólo sí el promedio ponderado de las proporciones no acumuladas del ingreso que van a las distintas clases es menor que lo que le correspondería a cada una de ellas si todas esas proporciones fueran iguales. Véase (19).

C - Un paso más hacia las interpretaciones intuitivas lo damos en la Sec. 3.2, donde se establecieron condiciones suficientes para que el coeficiente de Gini tenga cada uno de los signos posibles. Esa sección permite llegar a lo siguiente:

1 - En resumen, hemos establecido las siguientes condiciones

suficientes:

i) Si $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ será: $C > 0$ según (34).

ii) Si $Y_1 = Y_2 = \ldots Y_n$ será: $C = 0$ según (20) a (25).

iii) Si $Y_1 > Y_2 > \ldots > Y_n$ será: $C < 0$ según (33).

2 - Las condiciones i) y iii) del punto anterior pueden ser establecidas en forma menos estricta, del siguiente modo:

i) Si $Y_i \leq Y_2 \leq \ldots \leq Y_n$ y no todos los signos son el de igualdad, será $C > 0$.

iii) Si $Y_1 \geq Y_2 \geq \ldots \geq Y_n$ y no todos los signos son el de igualdad, será $C < 0$.

3 - Si en la secuencia: Y_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$, los signos menor y mayor aparecen en forma alternada, nada podemos decir respecto al signo de C. Para comprenderlo volvamos a los Gráficos N° 2 y 3, que pueden servirnos a pesar de que corresponden al caso más general que el que ahora consideramos. En el Gráfico N° 2 la superficie comprendida entre la curva de Lorenz y la recta de equidistribución está por abajo de esta última. A esa superficie la podemos llamar "positiva", por ser el numerador de C cuando éste es positivo. Esa misma superficie está, en el Gráfico N° 3, por arriba de la recta de igual distribución, y podemos llamarla "negativa". Volviendo a nuestro caso particular, cuando los signos entre las Y_i se alternan en cuanto al sentido de la desigualdad, la curva de Lorenz puede cortar una o más veces a la recta de la igualdad, generando partes de superficie positiva y partes negativas, cuya suma algebraica puede tener cualquier signo o ser nula. No sabemos, a priori, si C es positivo, negativo o nulo, salvo que apliquemos las condiciones (17), (18) o (19).

4 - Cuando el coeficiente de Gini es calculado para la varia-

ble que se utilizó para construir los intervalos de clase, y estos tienen por límites los quintiles, deciles, etc., es necesariamente cierto que:

$$Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots \leq Y_n$$

por construcción. En efecto, todas las clases corresponden al mismo número de recipientes de ingreso, y en la clase $i = 1$ estarán los más pobres,en $i = 2$ los que tienen ingresos superiores a los recipientes de $i = 1$ pero inferiores a los de $i = 3$, etc., resultando $Y_i < Y_{i+1}$, salvo en el caso extremo de perfecta igualdad, en el cual $Y_i = Y_{i+1}$. Por lo tanto, si estudiamos la distribución del ingreso empleando para ello los intervalos de clase del mismo ingreso, es necesariamente cierto que $C \geq 0$. Es esta la razón por la que generalmente se sostiene que $0 \leq C \leq 1$.

5 - Podemos estudiar la distribución de otra variable, empleando para ello los intervalos de clase construídos para la distribución del ingeso. Esto puede ser de interés cuando nuestro problema es conocer los efectos redistributivos del ingreso, que tiene esa otra variable. Así, por ejemplo, X_1 puede ser la proporción no acumulada de subsidio a la educación que reciben quienes se encuentran en el primer tramo de ingresos; X_2 será esa misma proporción, correspondiente a quienes se encuentran en el tramo segundo de los ingresos; etc. Nada impide que a los más pobres les corresponda una mayor proporción del subsidio que a los más ricos, y por lo tanto es posible que:

$$X_1 \geq X_2 \geq \ldots \geq X_n$$

Si calculamos C_2 aplicando (11) a X_i, esto es, reemplazando Y_i por X_i en esa fórmula, resultará $C_2 \leq 0$ de acuerdo a las condiciones ii) y iii) del punto 1 de esta sección (Véase: R.D. 42, pág. 6).

Resulta evidente que para que $C_2 < 0$, el subsidio a la educación debe estar negativamente correlacionado con el ingreso.

D - Siguiendo con nuestro ejemplo del subsidio a la educación, y llamando C_2 al coeficiente de Gini de esta variable y C_1 al del ingreso (R.D. 42, pág. 6), señalemos que $C_2 < 0$ es condición suficiente, pero no necesaria, para que el subsidio sea progresivo. La condición necesaria y suficiente para que haya progresividad, en este caso, es que $C_2 < C_1$, según vimos en R.D. 42, pág. 11.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SALTA

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS, JURIDICAS Y SOCIALES

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ECONOMICAS

REUNIONES DE DISCUSION

Nº	Fecha	Autor	Título
35	09/12/87	Eduardo Antonelli	"Un Modelo Postkeynesiano Diná mico
36	09/03/88	Eduardo Antonelli	"Un Multiplicador de la Inversión en la Provincia de Salta II"
37	06/04/88	Eduardo Antonelli	"El Equilibrio Económico General III"
38	03/08/88	Eduardo Antonelli	"Determinación de la Demanda Efectiva en un Modelo Desagregado"
39	18/08/88	Eduardo Antonelli	"Precios Absolutos, Relativos y Equilibrio Económico General"
40	19/10/88	Eduardo Antonelli	"El Equilibrio Macroeconómico General" (Versión Preliminar)"
41	08/02/89	Jorge A. Paz	"UNA NOTA sobre el comportamiento de la Demanda de Fuerza de Trabajo en la Industria Manufacturera Argentina: 1973-1984"
42	15/03/89	Eusebio C.del Rey	"El Coeficiente de Gini"
43	11/04/89	Eduardo Antonelli	"Determinación de la Demanda Efectiva en un Modelo Desagregado II"
44	02/05/89	Eusebio C.del Rey	"Algo más sobre el Coeficiente de Gini"