UNIVERSIDAD NACIONAL DE SALTA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS,
JURIDICAS Y SOCIALES
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ECONOMICAS
REUNION DE DISCUSION N° 42
FECHA: 15/3/1989
HS.: 16.30

EL COEFICIENTE DE GINI

Eusebio Cleto del Rey

1. INTRODUCCION

Este trabajo tiene dos propósitos: a) Presentar al coeficiente de Gini, para que quienes participan en las R.D. refresquen sus conocimientos al respecto y, quizas, los amplíen; b) Dar a conocer algunos resultados obtenidos, principalmente en materia de formalización, a fin de descubrir errores (conceptuales o algebraicos), que pudieran haberse deslizado, a la vez que cosechar ideas para seguir adelante.

Ambos propósitos tienen como fin último preparar el terreno para una futura R.D. sobre el tema, en la que presentaremos los resultados a los que hayamos arribado en nuestra investigación (actualmente en curso) sobre las condiciones en las que el coeficiente de Gini resulta negativo. Tomamos conocimiento de la existencia de tal posibilidad con motivo de nuestro comentario a un trabajo de Petrei 1/, realizado en las XX Jornadas de Finanzas Públicas, en el cual aparecen algunos coeficientes con ese signo. La idea de trabajar sobre los efectos redistributivos de la educación 2/ nos llevó a preocuparnos por el tema.

La Sec. 2 expone las bases del cálculo del coeficiente. En las Sec.

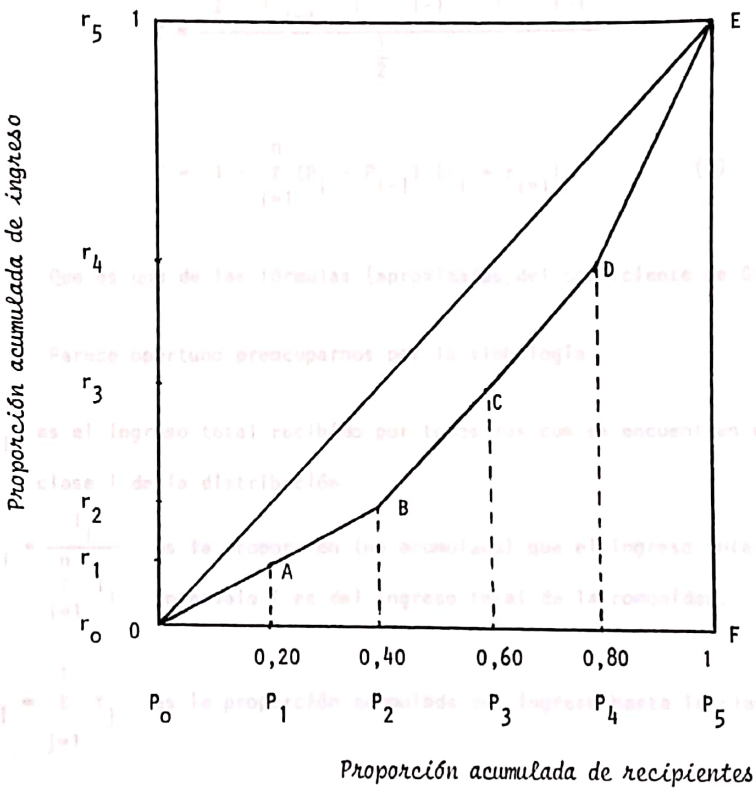
1/ PETREI, A. Humberto: "Efectos Distributivos del Gasto Público Social: Resumen de un Estudio para Cinco Países de América Latina", Comité Ejecutivo de las Jornadas de Finanzas Públicas: 20° Jornadas de Finanzas Públicas, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Córdoba, 1987, pág. 15.1/51. del Rey, Eusebio Cleto: "Comentario al Trabajo de A. Humberto Petrei (ECIEL): 'Efectos Distributivos del Gasto Público Social: Resumen de un Estudio para Cinco Países de América Latina'", presentado en las XX Jornadas de Finanzas Públicas, Córdoba, 1987, inédito.

2/ En colaboración con la Prof. Norma Cecilia Mena de Méndez.

3 y 4 presentamos las elaboraciones que ya hemos realizado. Los "Efectos Redistributivos" de un subsidio se encuentran en la Sec. 5, en tanto que la Sec. 6 contiene las conclusiones.

2. EL COEFICIENTE DE GINI

Tomemos el caso particular con el que trabaja Petrei [3/], en el cual los intervalos de clase tienen por extremos los quintiles; salvo el primero, cuyo extremo inferior es cero, y el último, cuyo extremo superior es infinito. Entonces la curva de Lorenz es:



El coeficiente de Gini es el cociente que tiene por numerador la superficie comprendida entre la curva de Lorenz (0 A B C D E) y la recta de la perfecta igualdad (0 E), y por denominador a la superficie del triángulo

---

3/ PETREI, A. Humberto: El Gasto Público Social y sus Efectos Distributivos - Un Examen Comparativo de Cinco Países de América Latina, ECIEL, Río de Janeiro, 1987, pássim. PETREI, A. H.: "Efectos Distributivos...", citado, pássim.

O E F. Si a la superficie del cuadrado del gráfico le damos valor 1, la superficie de O E F resulta igual a $\frac{1}{2}$. El numerador se calcula restando de la superficie del triángulo aquella ubicada bajo la curva de Lorenz, o sea la suma de las de los cinco (en nuestro caso particular) trapecios del gráfico. Tomemos, por ejemplo, el trapecio A B P_2 P_1. Su área es igual a:

$$\text{Area} = (P_2 - P_1)\,\frac{r_1 + r_2}{2}$$

Sumando las superficies de todos los trapecios, restando esa suma del área del triángulo y dividiendo por ésta, tenemos:

$$C = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(P_i - P_{i-1})\,(r_i + r_{i-1})}{\frac{1}{2}}$$

$$C = 1 - \sum_{i=1}^{n}(P_i - P_{i-1})\,(r_i + r_{i=1}) \qquad (1)$$

Que es una de las fórmulas (aproximadas) del coeficiente de Gini 4/.

Parece oportuno preocuparnos por la simbología:

I_i es el ingreso total recibido por todos los que se encuentran en la clase i de la distribución.

$Y_i = \frac{I_i}{\sum_{i=1}^{n} I_i}$ es la proporción (no acumulada) que el ingreso total del intervalo i es del ingreso total de la comunidad.

$r_i = \sum_{j=1}^{i} Y_j$ es la proporción acumulada del ingreso hasta la clase i.

n es el número de intervalos de clase. En nuestro caso particular es $n = 5$.

f_i es la frecuencia relativa de la distribución del ingreso, o sea la proporción de recipientes de ingreso comprendidos en la clase i. En

4/ Hasta este punto, la Sec. 2 se basa en una carta personal de la Prof. Ana María Claramunt, fechada en Mendoza, el 18 de Noviembre de 1987. Agradecemos la colaboración de la Profesora.

nuestro caso particular, en el que trabajamos con quintiles será:

$$f_i = f = \frac{1}{n} = 0{,}20$$

$P_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$ es la frecuencia relativa acumulada.

C es el coeficiente de Gini.

Nótese que r_i y P_i son las variables que se miden en los ejes del gráfico de la curva de Lorenz.

3. EQUIVALENCIA ENTRE FORMULAS

La fórmula presentada en (1) nos fue suministrada por la Prof. Claramunt (ver nota al pie 4). Petrei 5/, por su parte, emplea la siguiente:

$$G = 2/N \sum_{i=1}^{N} i\, Z_i - \left(1 + \frac{1}{N}\right) \qquad (2)$$

Que se aplica al caso particular en que se trabaja con quintiles (o deciles, o perceptiles). Las simbologías de las ecuaciones (1) y (2) son diferentes, por lo que necesitamos establecer las equivalencias siguientes:

$$C = G \qquad n = N \qquad Y_i = Z_i \qquad (3)$$

Debe tenerse en cuenta que la fórmula (1) es de aplicación general, en tanto que (2) es sólo válida cuando cada intervalo de clase contiene el mismo número (y la misma proporción) de recipientes de ingresos, o sea que f es común a todos los intervalos de clase. Por lo tanto, si queremos comparar (1) y (2), para ver si son equivalentes, debemos aplicar (1) al caso particular considerado por (2).

Trabajemos con los quintiles, como lo hicimos en la Sec. 2, y tengamos en cuenta que, en tal caso:

$$P_i - P_{i-1} = f_i = \frac{1}{n} = \frac{1}{5}$$

5/ PETREI, A.H.: El Gasto Público Social ..., citado, pág. 243.

Ello nos permite escribir (1) del siguiente modo:

$$C = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (r_i + r_{i-1}) \qquad (4)$$

Desarrollando la sumatoria de (4) tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} (r_i + r_{i-1}) = r_o + 2\, r_1 + 2\, r_2 + 2\, r_3 + 2\, r_4 + r_5$$

Teniendo en cuenta la definición de r_i, dada en la sección anterior, y que de ella se desprende que:

$$r_i = 1 - \sum_{j=i+1}^{n} Y_j \qquad r_o = 0 \qquad r_5 = 1$$

luego de un poco de álgebra llegamos a:

$$\sum_{i=1}^{n} (r_i + r_{i-1}) = 11 - 2 \sum_{i=1}^{n} i\, Y_i$$

Pero, para el caso de los quintiles:

$$2n + 1 = 11$$

y resulta:

$$\sum_{i=1}^{n} (r_i + r_{i-1}) = 2n + 1 - 2 \sum_{i=1}^{n} i\, Y_i \qquad (5)$$

Reemplazando (5) en (4) obtenemos:

$$C = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} i\, Y_i - (1 + \frac{1}{n}) \qquad (6)$$

Empleando en (6) las equivalencias simbólicas de (3) obtenemos (2). Queda demostrado que las fórmulas (1) y (2) son equivalentes, cuando (1) se aplica al caso contemplado por (2).

4. RELACION ENTRE LOS COEFICIENTES DE GINI DE DOS VARIABLES Y EL DE LA SUMA DE ELLAS

Tenemos una distribución de frecuencias con intervalos de clase cuya variable es I (digamos: Ingreso individual de cada recipiente) y cuyas frecuencias absolutas son el número de recipientes contenido en cada clase.

Convengamos que los extremos de clase (salvo el inferior de la primera y el superior de la última) son los quintiles de la distribución. Con ello, empleando la simbología de la Sección 2, la fórmula (6) e identificando al coeficiente con el número 1, tenemos:

$$C_1 = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} i\, Y_i - (1 + \frac{1}{n}) \qquad (7)$$

Supongamos que el Estado entrega a cada recipiente un subsidio de E australes por unidad de tiempo (la misma a la que corresponde al ingreso I). Respetando los intervalos de clase establecidos en el párrafo anterior, procedamos a asignar los subsidios a esos intervalos, y llamemos E_i al total recibido del Estado por quienes se encuentran en la clase i. Es necesario, en este punto, insistir sobre lo siguiente: Las clases están establecidas en base a la variable I, y los extremos de clase son los quintiles de esta variable I. Sobre esas clases se distribuye el subsidio E. Ejemplo: Si la clase 3 es la que corresponde a quienes reciben ingresos entre I = 10.000 e I = 30.000, el valor de E_3 será igual a la sumatoria de los subsidios recibidos por quienes tienen ingresos que caen en el intervalo 10.000 a 30.000.

Definamos:

$X_i = \dfrac{E_i}{\sum_{i=1}^{n} E_i}$ es la proporción (no acumulada) que el subsidio total del intervalo i es del total de subsidio pagado por el Estado

$$C_2 = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} i\, X_i - (1 + \frac{1}{n}) \qquad (8)$$

Es el coeficiente de Gini correspondiente a la distribución del subsidio.

El total de ingreso que cada recipiente dispone, luego de recibido el subsidio, es I' = I + E. Por lo tanto serán: $I'_i = I_i + E_i$, y podemos definir:

$$Y'_i = \frac{I'_i}{\sum_{i=1}^{n} I'_i} = \frac{I_i + E_i}{\sum_{i=1}^{n} I_i + \sum_{i=1}^{n} E_i} \qquad (9)$$

$$C_3 = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} i\, Y_i' - (1 + \frac{1}{n}) \qquad (10)$$

$$W_I = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_i}{\sum_{i=1}^{n} I_i + \sum_{i=1}^{n} E_i}$$ que es la proporción que del total de ingreso (que incluye el subsidio) es el ingreso originario.

$$W_E = \frac{\sum_{i=1}^{n} E_i}{\sum_{i=1}^{n} I_i + \sum_{i=1}^{n} E_i}$$ que es la proporción que del total de ingreso (que incluye el subsidio) es el subsidio

Nótese que:

$$W_I + W_E = 1 \qquad (11)$$

Reemplazando (9) en (10) y operando, llegamos a:

$$C_3 = \frac{2}{n} \frac{\sum_{i=1}^{n} I_i}{\sum_{i=1}^{n} I_i + \sum_{i=1}^{n} E_i} \sum_{i=1}^{n} i\, Y_i +$$

$$+ \frac{2}{n} \frac{\sum_{i=1}^{n} I_i}{\sum_{i=1}^{n} I_i + \sum_{i=1}^{n} E_i} \sum_{i=1}^{n} i\, X_i - (1 + \frac{1}{n})$$

Sustituyendo los cocientes de la expresión anterior por W_I y W_E, obtenemos:

$$C_3 = \frac{2}{n} W_I \sum_{i=1}^{n} i\, Y_i + \frac{2}{n} W_E \sum_{i=1}^{n} i\, X_i - (1 + \frac{1}{n}) \qquad (12)$$

De acuerdo con la relación (11), es cierto que:

$$(1 + \frac{1}{n}) = (W_I + W_E)\,(1 + \frac{1}{n})$$

Reemplazando esto en (12) obtenemos:

$$C_3 = W_I \left(\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} i\, Y_i - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) + W_E \left(\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} i\, X_i - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$$

De lo que resulta, empleando (7) y (8):

$$C_3 = W_I\, C_1 + W_E\, C_2 \qquad (13)$$

Esto nos dice que el coeficiente de Gini correspondiente a la suma de las variables I y E, es igual al promedio ponderado de los coeficientes de Gini de I y de E, empleando como peso de cada uno de ellos, la proporción que el total de la correspondiente variable es del total de la suma de ellas. No debemos olvidar que todas las distribuciones involucradas están construídas sobre los intervalos de clase creados para la variable I.

NOTAS:

a) Lo presentado en la ecuación (13), que aquí demostramos para el caso en que se trabaja con quintiles, es también demostrable para el caso general, en el que los intervalos de clase son establecidos arbitrariamente. En tal caso, debemos emplear la fórmula (1), y el proceso resulta más trabajoso.

b) Si, en vez de un subsidio, se tratara de un impuesto, tendríamos que: $I' = I - T$, y estaríamos hablando de una diferencia de variables. Resulta, entonces:

$$C_3 = W_I'\, C_1 - W_T\, C_2'$$

Donde: C_2' es el coeficiente de Gini correspondiente a la distribución del impuesto (sobre los intervalos de clase del ingreso originario).

$$W_I' = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_i}{\sum_{i=1}^{n} I_i - \sum_{i=1}^{n} T_i} \qquad W_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_i}{\sum_{i=1}^{n} I_i - \sum_{i=1}^{n} T_i}$$

De donde resulta que:

$$W_I' - W_T = 1$$

5. EFECTOS REDISTRIBUTIVOS

Lo obtenido en la sección inmediata anterior nos permite medir los efectos redistributivos globales de determinado subsidio (o impuesto) otorgado (o cobrado) por el Estado. Tomemos el ejemplo que nos interesa en particular: La educación. El Estado gasta dinero para financiar la educación (que puede ser determinado nivel o tipo de ella), que será provista en forma gratuita. Todas las otras finalidades que pueda tener la enseñanza gratuita no nos interesan en este contexto.

A fin de poder aplicar nuestros resultados a este caso, necesitamos algunos supuestos: a) El subsidio que la gente recibe a través de la educación no se traslada. Así, por ejemplo, el sueldo de los maestros no sube cuando se pasa de la situación sin subsidio a aquella en que él existe. b)La gente valúa cada austral que recibe a través de los servicios de enseñanza en exactamente un austral. Esto es, en realidad, una batería de supuestos, que tiene que ver con la eficiencia del sistema educativo para prestar sus servicios y con el aprecio que la gente tiene por ellos.

Una forma más suave, pero menos aplicable en un trabajo empírico, es suponer que E mide el subsidio que incide en quien recibe su impacto, y lo hace en australes corregidos por el aprecio que la gente siente por la educación.

Pasemos a considerar la aplicación de nuestros resultados. Sabemos que cuanto más pequeño es el coeficiente de Gini más igualitaria es la distribución del ingreso. Por lo tanto, si la educación gratuita redistribuye hacia una mayor igualdad, debe cumplirse que:

$$C_1 > C_3 \tag{14}$$

Teniendo en cuenta (11), la ecuación (13) puede ser reescrita:

$$C_3 = C_1 + W_E (C_2 - C_1) \tag{15}$$

Para que se cumplan (14) y (15) debe ser:

$$C_2 < C_1 \tag{16}$$

En el caso en que la educación redistribuye hacia una mayor desigualdad en el ingreso, los signos de (14) y (16) se invierten. Si no hubiera redistribución, en las expresiones (14) y (16) tendríamos signo igual (=).

Cuando existe redistribución, en cualquiera de los dos sentidos, cabe preguntarse cuán grande es el efecto de la educación sobre la distribución. ¿De qué depende la magnitud del cambio hacia una mayor igualdad o desigualdad? ¿Cuándo C_1 y C_3 difieren más? A fin de contestar a estas preguntas reescribamos la fórmula (15) del modo siguiente:

$$C_3 - C_1 = W_E\,(C_2 - C_1)$$

Como lo que nos preocupa ahora no es el sentido de la redistribución, sino su tamaño, trabajemos en valores absolutos:

$$|C_3 - C_1| = W_E\,|C_2 - C_1| \tag{17}$$

La redistribución será mayor cuando más difieran C_3 y C_1, esto es, cuando más grande sea el primer miembro de la ecuación anterior. Ello depende de la importancia del subsidio dentro del ingreso que lo incluye, o sea del valor de W_E; y depende también de cuán grande sea la diferencia entre los coeficientes de Gini del ingreso originario y de la variable redistributiva.

6. CONCLUSIONES

Lo expuesto anteriormente nos permite llegar a las siguientes conclusiones:

1 - Las fórmulas del coeficiente de Gini empleadas por CLARAMUNT y PETREI son perfectamente equivalentes, cuando trabajamos con quintiles (o deciles, o percentiles).

2 - El coeficiente de Gini de la suma de dos variables es igual al promedio ponderado de los coeficientes de Gini de ellas, con pesos iguales a la importancia de cada variable en el total de ambas. Esta relación, que aquí fue presentada para un caso particular, es también cierta en el caso general en el que los intervalos de clase del ingreso son arbitrarios.

3 - Podemos decir que el subsidio considerado es:

a) Progresivo si $C_2 < C_1$

b) Regresivo si $C_2 > C_1$

c) Proporcional si $C_2 = C_1$

4 - La fuerza redistributiva del subsidio (en cualquier dirección) depende de la importancia que tiene éste dentro del total del ingreso que lo incluye (W_E) y del valor absoluto de la diferencia entre el coeficiente de Gini del subsidio y el del ingreso originario ($|C_2 - C_1|$).

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SALTA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS, JURIDICAS Y SOCIALES
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ECONOMICAS

REUNIONES DE DISCUSION

N°	Fecha	Autor	Título
33	20/07/87	Sergio Lazarovich	"Evaluación Económica de la Construcción de vías de Bicicletas para la Provincia de Salta"
34	20/08/87	Jorge A. Paz	"Intercambio Regional y Crecimiento Económico: Un Análisis Heterodoxo"
35	09/12/87	Eduardo Antonelli	"Un Modelo Postkeynesiano Dinámico"
36	09/03/88	Eduardo Antonelli	"Un Multiplicador de la Inversión en la Provincia de Salta II"
37	06/04/88	Eduardo Antonelli	"El Equilibrio Económico General III"
38	03/08/88	Eduardo Antonelli	"Determinación de la Demanda Efectiva en un Modelo Desagregado"
39	18/08/88	Eduardo Antonelli	"Precios Absolutos, Relativos y Equilibrio Económico General"
40	19/10/88	Eduardo Antonelli	"El Equilibrio Macroeconómico General (Versión Preliminar)"
41	08/02/89	Jorge A. Paz	"UNA NOTA sobre el comportamiento de la Demanda de Fuerza de Trabajo en la Industria Manufacturera Argentina: 1973-1984"
42	15/03/89	Eusebio C.del Rey	"El Coeficiente de Gini"