



DOCENTES DE ADMINISTRACIÓN FINANCIERA

**XXXIII Jornadas Nacionales de Administración Financiera  
Septiembre 2013**

# **OPCIONES REALES: VARIANTES DEL MODELO BINOMIAL Y TRINOMIAL INCORPORANDO VOLATILIDAD CAMBIANTE**

**Gastón Silverio Milanese**

*Universidad Nacional del Sur*

*SUMARIO: 1. Introducción; 2. El movimiento geométrico browniano (gbm) y distribución binomial; 3. Los principales modelos de valoración de opciones en tiempo discreto; 4. Valuación de la opción de expansión-venta sobre una empresa de base tecnológica (EBT); 5. Conclusiones.*

Para comentarios: [milanesi@uns.edu.ar](mailto:milanesi@uns.edu.ar)

## **Resumen**

El trabajo es de naturaleza pedagógica ya que expone los supuestos y diferencias de los principales modelos de rejillas binomiales y trinomiales empleadas en la valoración de opciones reales: Rendleman-Bartter (RB), Cox, Ross y Rubinstein (CRR), Jabbour, Kramin y Young (ABMC), Boyle (trinomial) y Haatela (volatilidad cambiante). Se emplea como unidad de análisis la valoración de una empresa de base tecnológica (EBT) dedicada en la generación de células madres para tratamientos medicinal y aplicación académica. Las estrategias a valorar son inversión - expansión o venta del proyecto. Se comparan los resultados de los diferentes modelos y las ventajas derivadas de utilizar rejillas trinomiales con volatilidad cambiante en la valoración de opciones reales.

## 1. Introducción

Las opciones reales constituyen una de las principales herramientas para determinar el valor asociado de las potenciales estrategias de una empresa en marcha o proyecto de inversión, Smit y Trigeorgis (2004). Debido a su simplicidad y capacidad de adaptarse al análisis estratégico, los modelos de valoración de opciones en tiempo discreto son empleados en el análisis y comprensión de la flexibilidad estratégica empresarial. Los modelos en tiempo discreto tienen su génesis en el modelo desarrollado por Black y Scholes (1973). Los primeros trabajos derivaron en las variantes de modelo binomiales desarrolladas por Cox, Ross y Rubinstein (1979) y Rendleman y Barter (1979).

La principal contribución de este trabajo es de naturaleza pedagógica debido a que se pretende reseñar los supuestos de las principales alternativas <sup>1</sup> que existen en rejillas binomiales, trinomiales; suponiendo estática y cambiante la volatilidad del subyacente. Se exponen las principales diferencias, similitudes y resultados que los modelos arrojan al momento de valorar la flexibilidad estratégica de un proyecto. Para ello se utiliza un caso de aplicación sobre la valoración de las estrategias de expansión-venta correspondiente a un emprendimiento de base tecnológica (EBT). El trabajo se estructura de la siguiente manera: (a) vinculación del proceso estocástico geométrico browniano y con el proceso binomial; (b) supuestos, alcances y limitaciones de los principales modelos de rejillas binomiales-trinomiales con volatilidad estática y cambiante; (c) se presenta el caso de una EBT y la valoración del proyecto con sus estrategias de expansión-venta de licencia mediante los modelos descritos en (b); (d) se resumen los resultados obtenidos de aplicar los modelos expuestos y las conclusiones.

## 2. El movimiento geométrico browniano (gbm) y distribución binomial

La siguiente ecuación describe el proceso estocástico GBM para el activo  $V$  en un mundo neutral al riesgo,

$$dV = rVdt + \sigma Vdz \quad (Ec 1)$$

donde  $r$  es la tasa libre de riesgo instantánea,  $\sigma$  es la volatilidad instantánea del precio del activo,  $dt$  es el diferencial del tiempo y  $dz$  es un proceso de Weiner. Siguiendo a Jabbour, Kramin y Young (2001), se aplica la transformación contenida en el lema de Ito para obtener las siguientes ecuaciones:

$$d\ln(V) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz \quad (Ec 2)$$

$$dX = \alpha dt + \sigma dz \quad (Ec 3)$$

Donde  $X = \ln(V)$  y  $\alpha = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ . Como resultado,  $\ln(V)$  sigue un proceso de Weiner por el período de tiempo  $(0, t)$ . La variable  $\hat{X} = X_t - X_0 = \ln\left(\frac{V_t}{V_0}\right)$  está normalmente distribuida con media  $\alpha \cdot t$  y varianza  $\sigma^2 \cdot t$ . La tasa compuesta de rendimiento para el período de tiempo  $(0, t)$  se define de la siguiente manera,

$$V_t = V_0 e^{Rt} \quad (Ec 4)$$

La ecuación 4 permite derivar las tasas de rendimiento (ecuaciones 5 y 6)

<sup>1</sup> El trabajo no pretende agotar todas las alternativas que existen sobre rejilla binomiales, un completo resumen de esto se puede encontrar en Chance, (2007)

$$R = \frac{1}{t} \ln \left( \frac{V_t}{V_0} \right) = \frac{1}{t} \widehat{X} \quad (Ec 5)$$

$$t.R = \widehat{X} \quad (Ec 6)$$

$R$  sigue una distribución normal con media  $\alpha = \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right)$  y varianza  $\frac{\sigma^2}{t}$ . Aplicando el operador de expectativas en ambos lados de la ecuación anterior se obtiene;

$$E(t.R) = t.\alpha = E(\widehat{X}) = E \left[ \ln \left( \frac{V_t}{V_0} \right) \right] \quad (Ec 7)$$

El objetivo es llevar la expresión anterior al lenguaje binomial, para ello es menester definir los movimientos discretos ascendentes y descendentes del precio del activo ( $u.S_0$ ;  $d.S_d$ ). Los parámetros  $u$  y  $d$  reflejan la magnitud de los movimientos con un valor de  $u$  mayor a 1 y  $d$  menor a 1. En consecuencia la variable  $\ln \left( \frac{V_t}{V_0} \right)$  sigue la distribución  $u$  con probabilidad neutral al riesgo  $p$  y  $d$  con probabilidad neutral al riesgo  $1-p$ . El valor para la rejilla surge en la siguiente ecuación;

$$E \left( \ln \left( \frac{V_t}{V_0} \right) \right) = p \ln(u) + (1-p) \ln(d) \quad (Ec 8)$$

La varianza de la rejilla para la variable  $\ln \left( \frac{V_t}{V_0} \right)$  es;

$$\text{Var} \left( \ln \left( \frac{V_t}{V_0} \right) \right) = p(1-p) \left[ \ln \frac{u}{d} \right]^2 \quad (Ec 9)$$

Las ecuaciones 8 y 9 traducen en términos binomiales el modelo GBM.

### 3. Los principales modelos de valoración de opciones en tiempo discreto

A continuación se presentan los parámetros generales del modelo binomial:

- Precio del subyacente  $S_0$  con movimientos  $S_u$  y  $S_d$  para intervalos de tiempo  $\Delta t$
- Probabilidades de transición correspondientes a movimientos ascendentes y descendentes  $p$ , y  $1-p$ .
- Probabilidades objetivas para los movimientos ascendentes y descendentes  $q$  y  $1-q$ .

Los parámetros  $p$ ,  $u$ ,  $q$  y  $d$  no pueden fijarse arbitrariamente ya que deben tener una correspondencia con los dos primeros momentos estocásticos del movimiento GBM. Ya que en el límite el modelo binomial converge al modelo BS, en la medida que se cumpla con el Teorema Central del Límite,<sup>2</sup> bajo las siguientes condiciones:

- Los saltos son independientes del nivel de precio de la acción.
- Media y varianza de la distribución binomial son iguales a media y varianza de la distribución lognormal.
- Las probabilidades  $p_u$  y  $p_d$  son positivas en el límite entre 0 y 1 pero no iguales a 0 ni 1. La suma de estas debe ser igual a 1

<sup>2</sup>En términos sencillos el teorema sostiene que la distribución del promedio de un conjunto de números aleatorios será normal inclusiva cuando los números considerados individualmente no se encuentren normalmente distribuidos. Las condiciones que se deben cumplir son las siguientes: (a) los números aleatorios deben provenir de la misma distribución, (b) deben ser independientes y (c) la distribución debe tener media y varianza finita.

Para que la rejilla binomial incorpore los dos primeros momentos estocásticos (media y varianza) del GBM debe cumplir con las restricciones dispuestas en el siguiente sistema de ecuaciones,

$$E\left(\ln\left(\frac{V_t}{V_0}\right)\right) = p\ln(u) + (1-p)\ln(d) = u \cdot \Delta t = e^{r\Delta t} \quad (Ec 10)$$

$$\text{Var}\left(\ln\left(\frac{V_t}{V_0}\right)\right) = p(1-p)\left[\ln\frac{u}{d}\right]^2 = \sigma^2 \cdot \Delta t = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} \quad (Ec 11)$$

$$p_u + p_d = 1; 0 < p < 1 \quad (Ec 12)$$

Donde  $\Delta t$  es igual a  $T/n$ ,  $T$  es el tiempo hasta el horizonte final de proyección y  $n$  es el número de pasos. Por lo tanto existen 3 ecuaciones y cuatro incógnitas ( $p$ ,  $u$ ,  $d$  y  $q$ ). La restricción impuesta es la condición recombinante  $u \cdot d = d \cdot u = m^2$  (Wilmott, 2009). Aquí se encuentra el atractivo del asunto ya que la posibilidad de diferentes variantes de rejillas binomiales se incrementa en función a cómo se defina la condición recombinante.

Vale aclarar que las rejillas (*lattice*) y árboles de decisión son los instrumentos empleados para proyectar el proceso binomial. Las primeras presentan ventajas computacionales respecto de los segundos debido a sus propiedades recombinantes en relación a los nodos intermedios (Smith, 2005)<sup>3</sup>. Se caracterizan por modelar en tiempo discreto el proceso estocástico continuo de la variable y utilizar el supuesto de valuación neutral al riesgo (Wilmott, 2009).<sup>4</sup>

a) Cox-Ross-Rubinstein (CRR) (Cox, Ross y Rubinstein, 1979) definen los parámetros correspondientes al sistema de ecuaciones general de la siguiente manera;

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (Ec 13)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (Ec 14)$$

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\sqrt{\Delta t} \quad (Ec 15)$$

Los valores para  $u$ ,  $d$  y  $p$  son una solución exacta para el primer momento (ecuación 10). La condición recombinante  $u \cdot d = d \cdot u = m^2$  es definida como  $u \cdot d = 1$ . Una de las características del modelo es su propiedad de centralidad ya que el valor del activo subyacente en el nodo central

<sup>3</sup> Las rejillas binomiales cumplen con las propiedades del triángulo de Pascal o también conocido como Tartaglia. La propiedad de recombinación de las rejillas asegura que en el paso  $N$  existe  $N+1$  nodos finales y  $n(n+1)/2$  puntos de decisión mientras que en los árboles binomiales la cantidad de nodos finales asciende a  $2^{n-1}$  y los puntos de decisión a  $2^n - 1$ .

<sup>4</sup> La valuación neutral al riesgo en derivados se basa en la perfecta correlación entre los cambios en el valor de la opción y del activo subyacente. Al ser el único elemento aleatorio el subyacente, una cartera compuesta por una posición larga (corta) en una opción y corta (larga) en el subyacente hace que el subyacente cubra las posibles fluctuaciones en el precio del derivado. Como consecuencia de ello el valor de la cartera crece al tipo sin riesgo. El número exacto de subyacente a vender (comprar) se conoce como "delta". En un mundo del tipo "Black-Scholes" si se compran "delta" acciones empleando el modelo, entonces se cubre correctamente el riesgo eliminándolo por completo. Como consecuencia de ello se debe esperar compensación por asumir este, por lo tanto se supone que los activos crecen a la tasa libre de riesgo.

Uno de los efectos más importantes de la valuación neutral al riesgo es que los derivados pueden ser valorados simulando los diferentes caminos neutrales al riesgo que sigue el subyacente mediante rejillas. Con ello se calcula el valor terminal, es decir los flujos de fondos del derivado. Los valores finales ponderados por las correspondientes probabilidades neutrales al riesgo son actualizado al presente y luego promediados. El valor promedio obtenido es el valor teórico de la opción.

En la práctica existen ciertas imperfecciones para aplicar el modelo: (a) rebalanceo continuo de la cartera (compra-venta) para mantener la cobertura; (b) el subyacente debe mantener un proceso estocástico geométrico browniano y volatilidad conocida, (c) inexistencia de costos de transacción y mercados completos.

en la etapa 2. *dtes* igual a su valor inicial. Sustituyendo los valores de  $u$ ,  $d$  y  $p$  en la parte izquierda de la ecuación de la varianza (ecuación 11) se tiene,

$$\sigma^2 \Delta t \cdot \left(1 - \frac{\mu^2 \Delta t}{\sigma^2}\right) \quad (\text{Ec 16})$$

Para valores pequeños de  $\Delta t$  la ecuación 16 se aproxima a la ecuación 11, pero los problemas se presentan cuando  $\left(1 - \frac{\mu^2 \Delta t}{\sigma^2}\right) < 0$  o  $\Delta t > \frac{\sigma^2}{\mu^2}$ , es decir, para grandes intervalos de tiempo la ecuación de la varianza del modelo CRR pierde estabilidad, o sea tiene sesgo negativo Trigeorgis, (1991).

Las probabilidades de transición (ecuación 15) son estimadas con la siguiente expresión (Whaley, 2006; pp 313)

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \quad (\text{Ec 17})$$

Si  $\Delta t > \frac{\sigma^2}{\mu^2}$  el modelo arroja como resultado probabilidades negativas debido a

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} > 1 \quad (\text{Ec 18})$$

En el caso de probabilidades negativas algunas soluciones propuestas son:<sup>1</sup> En el caso de probabilidades negativas pueden presentarse los siguientes cursos de acción: (a) Considerarlas no aceptables por lo tanto colapsa el modelo, (b) Calibrar el modelo con los valores de mercado estimando probabilidades implícitas a través de precios de mercado (Derman, E-Kani, I-Chriss, N, 1996); (c) Considerar que el valor futuro está por fuera del espacio actual definido para el árbol, no cubierto por la asignación sub-óptima de nodos para la rejilla proyectada (Haug Gaarder, 2007).

El modelo presenta el mismo resultado para la media que el proceso lognormal del subyacente pero independiente del tamaño de  $\Delta t$ . Para la varianza solamente existe coincidencia entre el modelo lognormal y el binomial CRR en el límite.

b) Rendleman-Bartter (RB)-Jarrow-Rudd (JR) (Rendleman y Bartter, 1979) sostienen que el sistema de ecuaciones se mantiene estable si se cumple que  $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$ , por lo tanto las probabilidades neutras al riesgo tienen valor  $p_u = p_d = 1/2$ .<sup>5</sup> RB establecen los siguientes parámetros para resolver el sistema de ecuaciones;

$$u = e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (\text{Ec 19})$$

$$d = e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (\text{Ec 20})$$

$$u \cdot d = e^{2\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t} \quad (\text{Ec 21})$$

A diferencia del modelo CRR, los valores para  $u$  y  $d$  son derivados de introducir los valores  $p=1/2$  y  $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$  en el sistema de ecuaciones (10, 11 y 12). Los parámetros del modelo RB ajustan mejor que el modelo CRR ya que: tienen la misma media y la varianza del proceso lognormal del subyacente independientemente del tamaño de  $\Delta t$ . Por lo tanto la rejilla binomial RB

<sup>5</sup> La propiedad de que las probabilidades neutras al riesgo deben ser  $1/2$  se atribuye a Jarrow y Rudd, (1982)

es estable y presenta volatilidad consistente con el proceso lognormal, convergiendo de forma más rápida a la solución analítica que su par CRR; Jarrow y Rudd, (1982)<sup>6</sup>.

c) Jabbour-Kramin-Young (ABMC): El modelo es un híbrido entre los modelos CRR y RB. Se introduce una modificación sobre la desviación estándar para derivar el conjunto de parámetros. Para un mundo neutral al riesgo la media y el desvío estándar se definen de la siguiente manera;

$$E(S_{t+\Delta t}) = S_t e^{r\Delta t} \quad (Ec 22)$$

$$\sigma(S_{t+\Delta t}) = S_t e^{r\Delta t} \sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1} \quad (Ec 23)$$

Para la distribución binomial la media queda definida como,

$$E(S_{t+\Delta t}) = pu + (1 - p)d \quad (Ec 24)$$

Con las ecuaciones anteriores se llega a la siguiente expresión,

$$pu + (1 - p)d = e^{r\Delta t} \quad (Ec 25)$$

El momento de orden  $n$  acorde con la distribución binomial es

$$M_n = p(u - m)^n + (1 - p)(d - m)^n \quad (Ec 26)$$

Siendo  $m = \left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right)$ ; tal que  $m = pu + (1 - p)d$ . Reemplazando en la ecuación anterior el segundo momento estocástico queda planteado de la siguiente manera,

$$M_2 = p(1 - p)(u - d)^2 \quad (Ec 27)$$

Al igualar la varianza de la rejilla (ecuación 27) con el valor del subyacente  $V.m$  se obtiene;

$$M_2 = p(1 - p)(u - d)^2 = V \left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) \quad (Ec 28)$$

Aplicando la raíz cuadrada para obtener la volatilidad se llega a la siguiente ecuación;

$$\sqrt{p(1 - p)}(u - d) = \sigma \left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) = e^{r\Delta t} \cdot \sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1} \quad (Ec 29)$$

El modelo ABMC coincide con CRR para intervalos de tiempo pequeños. Esto se debe a que la desviación estándar de las variaciones en el precio del subyacente para pequeños intervalos de tiempo  $\Delta t$  es aproximadamente  $\sigma\sqrt{\Delta t}$ . Los problemas se presentan cuando las rejillas binomiales son utilizadas en la valuación de activos reales. Los intervalos de tiempo en los cuales para la vida del proyecto son largos; Mun, (2004), en este caso la volatilidad propuesta para intervalos largos es; Trigeorgis, (1991); Wilmott, Howison y Dewynne, (1995),

$$\sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1} \approx \sigma\sqrt{\Delta t} \quad (Ec 30)$$

---

<sup>6</sup>Jarrow y Rudd (1982) aplicaron la expansión de Edgeworth en base a la técnica desarrollada por Schleher (1977). Donde la verdadera distribución de probabilidad  $Z(x)$  es aproximada por otra denominada  $G(x)$  conocida como aproximación. En la literatura estadística la técnica se conoce como Expansión de Edgeworth, Cramer (1944) y Kendall y Stuart (1977). La expansión aproxima una distribución de probabilidad más compleja a otra distribución alternativa más sencilla, como puede ser la distribución normal o lognormal. Esta técnica permite que los coeficientes en la expansión sean funciones de los momentos, tanto de la distribución original como de la aproximada. De esta manera, se obtienen soluciones teóricas correctas a problemas en la valoración de activos, que de otro modo, serían imposibles de resolver.

El crecimiento de la rejilla está dado por  $u.d = e^{2r\Delta t}$ , los parámetros  $u$ ,  $d$  y  $p$  son planteados de la siguiente manera,

$$u = e^{\sqrt{e^{\sigma^2\Delta t}-1} + r\Delta t} \quad (Ec 31)$$

$$d = e^{-\sqrt{e^{\sigma^2\Delta t}-1} + r\Delta t} \quad (Ec 32)$$

$$p = \frac{(e^{r\Delta t}-d)}{(u-d)} \quad (Ec 33)$$

El modelo cumple: con el sistema de ecuaciones (10,11 y 12), con el requisito de centralidad (el subyacente crece al tipo sin riesgo) obtenido de (CRR) y mantiene la estabilidad de la rejilla (evita probabilidades negativas) obtenido de (RB); independientemente del tamaño del intervalo temporal  $\Delta t$ .

d) Modelos trinomiales Boyle (B)- Kamrad y Ritchken, (KR): Las rejillas trinomiales proveen una representación alternativa y análoga al método binomial. Tiene tres parámetros de movimientos  $u$ ,  $m$ ,  $d$  y tres probabilidades de transición asociadas  $p_u$ ,  $p_m$  y  $p_d$  a los movimientos indicados.

Las rejillas trinomiales pueden construirse respetando las premisas utilizadas para su par binomial: (a) las probabilidades de transición son positivas en el límite entre 0 y 1 debiendo ser su suma equivalente a la unidad, (b) la media y varianza de la distribución trinomial debe ser igual a los primeros dos momentos estocásticos de la distribución lognormal. La contraparte de la rejilla binomial para el valor de la media es;

$$p_u u + p_d d = e^{r\Delta t} \quad (Ec 34)$$

En la ecuación anterior se supone igual magnitud para los movimientos ascendentes y descendentes, es decir la misma simetría que el modelo CRR. La contraparte de la rejilla binomial para el valor de la varianza se expone a continuación:

$$u^2(p_u + p_d) = \sigma^2\Delta t \quad (Ec 35)$$

Hasta aquí tres incógnitas ( $p_u$ ,  $p_d$  y  $u$ ) y solo dos ecuaciones, por lo tanto la tercer restricción propuesta por Boyle, (1988) y Kamrad y Ritchken, (1991) es suponer que el coeficiente de ascenso tiene la forma funcional  $u=e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$  donde  $\lambda \geq 1$ . Sustituyendo en la ecuación 35 la suma de las probabilidades de movimientos ascendentes y descendentes se obtiene;

$$p_u + p_d = 1/\lambda^2 \quad (Ec 36)$$

La probabilidad de transición intermedia es igual a,

$$p_m = 1 - 1/\lambda^2 \quad (Ec 37)$$

Despejando en función de la probabilidad de un movimiento descendente en la ecuación 36 y remplaceando en la ecuación 34 se obtiene la probabilidad de transición ascendente;

$$p_u = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{u\Delta t}{2\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda} \left( \frac{r-0.5\sigma^2}{\sigma} \right) \sqrt{\Delta t} \quad (Ec 38)$$

La probabilidad de transición del movimiento descendente es igual a;

$$p_d = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{u\Delta t}{2\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{2\lambda} \left( \frac{r-0.5\sigma^2}{\sigma} \right) \sqrt{\Delta t} \quad (Ec 39)$$

Si el coeficiente  $\lambda$  es igual a 1 el modelo colapsa a la modelo CRR, debido que la probabilidad de transición del nodo intermedio es igual a 0. Esto provoca la eliminación de los nodos del medio, el coeficiente de ascenso se resume a,  $u=e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$  y las probabilidades de movimientos ascendentes y descendentes quedan iguales a CRR. El valor del coeficiente  $\lambda$  es directamente proporcional a la amplitud de movimientos, mayor el valor del coeficiente mayor la probabilidad de movimientos laterales.

e) Volatilidad cambiante Haahtela (H): El autor propone rejillas trinomiales con probabilidades cambiantes. Primero es necesario definir la condición de recombinación de los nodos intermedios, para ello es necesario que se cumpla con la siguiente ecuación:

$$u \cdot d = m^2 \quad (Ec 40)$$

Siendo  $m = e^{r\Delta t}$ , el conjunto de ecuaciones para estimar las probabilidades de transición correspondiente a los períodos de mayor volatilidad (Haahtela, 2010) son las siguientes,

$$p_u = \frac{m^2(e^{\sigma^2\Delta t}-1)}{u^2+md-um-ud} \quad (Ec 41)$$

$$p_d = p_u \left( \frac{m-u}{d-m} \right) \quad (Ec 42)$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d \quad (Ec 43)$$

$$u = e^{r\Delta t + \sqrt{e^{(\lambda\sigma)^2\Delta t}-1}} \quad (Ec 44)$$

$$d = e^{r\Delta t - \sqrt{e^{(\lambda\sigma)^2\Delta t}-1}} \quad (Ec 45)$$

Los movimientos ascendentes y descendentes que determinan el espacio donde estarán los posibles valores del subyacente son calculados de acuerdo al máximo período de volatilidad, tal que  $\sigma = \max \sigma_i$ . Los valores obtenidos ( $u, d$ ) son empleados en todo el espacio independientemente de las variaciones proyectadas en la volatilidad del subyacente. Las ecuaciones correspondientes a las probabilidades de transición se utilizan solamente para los períodos de mayor volatilidad. Las probabilidades intermedias de transición son derivadas a partir de la ecuaciones 41-43 de la siguiente manera:

$$p_u^i = p_u \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_{\max}} \right)^2 \quad (Ec 46)$$

$$p_d^i = p_d \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_{\max}} \right)^2 \quad (Ec 47)$$

$$p_m^i = 1 - p_u^i - p_d^i \quad (Ec 48)$$

La mecánica para la construcción de la rejilla es similar a las ya tratadas en el trabajo: primero se proyecta el proceso estocástico del subyacente para luego introducir los flujos de pagos de la opción en el modelo. Se comienza desde el valor terminal para una opción de compra  $V_t = (\text{Max } S_t - X; 0)$  o venta  $V_t = (\text{Max } X - S_t; 0)$  valuando recursivamente aplicando probabilidades neutrales al riesgo. El valor actual esperado se obtiene de acuerdo a la siguiente ecuación,

$$V_{t-1} = \frac{p_u V_{t,u} + p_m V_{t,m} + p_d V_{t,d}}{e^{r\Delta t}} \quad (Ec 49)$$



## 4. Valuación de la opción de expansión-venta sobre una empresa de base tecnológica (EBT)

### 4.1 Descripción del caso y valuación mediante el método de descuento de flujos de fondos:

Se presenta el caso de valoración de la flexibilidad estratégica contenida en una EBT del tipo spin-off universitario, cuyo objeto consiste en el desarrollo y fabricación de un biorreactor de células madres. El biorreactor se caracteriza por ser de uso único con destino a la proliferación de *stem cells hematopoyéticas*<sup>7</sup> para transfusiones e implantes de médula ósea, terapia celular e investigación básica y aplicada. El emprendimiento se sitúa en la ciudad de Bahía Blanca, sudoeste de la Provincia de Buenos Aires, Argentina en donde se encuentran importantes centros de estudio, investigación y actividad médica del país.

Las estrategias en juego consisten en desarrollo, patente, obtención de licencia y fabricación a baja escala de un biorreactor de células madres. El plazo de duración de los derechos de exclusividad en Argentina se estima en cinco años. Luego analizar la posibilidad de incrementar la producción (expansión) del *spin-off* o alternativamente transferir la licencia de fabricación (venta) a competidores.

Las ventajas competitivas del proyecto son: (a) barreras de entrada temporales generadas por la obtención de la validación del biorreactor de los organismos de control de salud en Argentina<sup>8</sup> y (b) su correspondiente registro de propiedad. Las desventajas competitivas residen en: (a) la existencia de competidores potenciales, ya que la tecnología en cuestión se encuentra disponible en otros mercados<sup>9</sup> y (b) las barreras de salida producto de la especificidad e irreversibilidad de la inversión en activos fijos.

Los estudios de factibilidad (técnicos y económicos) arrojan un valor en concepto de inversiones en infraestructura, puesta en marcha y validación del prototipo de u\$ 286.425. Se estima que el capital de trabajo necesario para la elaboración y comercialización del biorreactor, representa un 35% del nivel de ingresos por ventas (operaciones), siendo su valor inicial es de u\$ 227.066,40. La inversión inicial (*I*) total asciende a u\$ 513.491,40. El costo total de la licencia para obtener los derechos de explotación por el período de 5 años (incluidos tasas, derechos y honorarios profesionales en las actuaciones ante organismo pertinentes) es de u\$ 65.000.

---

<sup>7</sup>El biorreactor de *stem cells* hematopoyéticas se usa para terapia celular e investigación básica y aplicada. Este cumple las funciones de un útero artificial como soporte ambiental para la multiplicación de células. Se encuentra compuesto por un agitador junto a una fuente térmica en un recipiente donde las unidades de sangre con *stem cells* hematopoyéticas (SCH) estarán con atmósfera estéril controlada (humedad, pH, O<sub>2</sub>, CO<sub>2</sub>, N<sub>2</sub> y aire medicinal); cuenta con bocas de conexión externas vinculando las bolsas para obtener muestras control. Este biorreactor da soporte al aumento de las SCH contenidas en la sangre. La atmósfera es controlada en humedad, temperatura y concentración de dióxido de carbono, oxígeno, nitrógeno y/o aire medicinal; las bolsas de colecta de sangre de cordón umbilical fabricadas en cloruro de polivinilo (PVC) tienen buenas propiedades de permeabilidad al agua y los gases anteriormente nombrados en el rango deseado. Mediante el uso de la informática se controla los programas de movimientos, inyección de gases y alarmas por irregularidades ocurridas (sonora, vía mail, llamado de teléfono y mensaje de texto hacia telefonía celular). Hasta ahora, la combinación del artefacto y la técnica propuesta, aunque sin atmósfera controlada, se ha probado con sangre de cordón umbilical (SCU) en el Banco de SCU de la Universidad Estatal de Campinas (Unicamp, Campinas, Brasil) con resultados excelentes. Se espera su mejoría al controlar la atmósfera. En aplicación clínica, a mayor número de SCH trasplantadas mejor es el pronóstico para el paciente. Se han realizado diversos ensayos para estimular la expansión "ex vivo" de estas células, probando sistemas de cultivo en larga escala en biorreactores utilizando, o no, agentes promotores. Aunque los resultados son alentadores, el alto costo y/o las técnicas utilizadas no permiten el trasplante de estas células.

<sup>8</sup>Avales y autorizaciones del Ministerio de Salud de la Nación, Agencia Nacional de Medicamentos, Alimentos y Tecnología Médica (ANMAT).

<sup>9</sup> Los actuales competidores son General Electric Healthcare (Wave BioreactorSystem 2-10, precio u\$45.000 sin software); Sartorium-Stedim (BiostatCultibag, precio u\$25.000 sin software); Infors (Multifors u\$65.000), fuente de datos: elaboración trabajo final especialización en gestión tecnológica (GETEC), Universidad Nacional del Sur, Biólogo Jorge Pedrueza.

Producto de los estudios de mercado en Argentina, Brasil, Chile y Uruguay existen 244 clientes<sup>10</sup>. Como punto de partida para la proyección de ingresos se estima una participación inicial en el mercado, del 7 % en el primer año, 10% en el segundo; 15% en el tercero y cuarto hasta llegar al 20% en el quinto período. Producto de la estrategia de comercialización se define un precio de venta de u\$ 32.000.

Los costos variables de fabricación se estiman en un 60% del precio de venta (u\$ 19.200) y los costos de estructura ascienden u\$30.000. Otros datos necesarios para la valoración son: (a) la tasa marginal del impuesto a las ganancias en Argentina (lugar de radicación de la EBT) es del 35% y, (b) la tasa de rendimiento requerido ( $k$ ) se estima en 24,49%.

Cabe aclarar que el objetivo del presente trabajo no es enfocarse en las diferentes alternativas que los practicantes emplean para determinar la tasa ajustada por riesgo en el método del descuento de flujo de fondos para mercados emergentes y empresas cerradas. A modo de ejemplo se emplea el modelo una variante del *build-up model* (Pratt y Grabowski, 2008). En este caso al rendimiento de mercado se incorporan ajustes *ad-hoc*, debido a las falencias y características del mercado de capitales argentino para reflejar precios de riesgos sistemáticos mediante los modelos de equilibrio tradicionales.<sup>11</sup> La tasa surge de ajustar el rendimiento de mercado por la volatilidad total (suponiendo  $\beta=1$ ), en este caso dada por el desvío estimado para el mercado doméstico.

$$k = rf + (rm - rf) \beta + PC \quad (Ec 50)$$

Donde el tipo sin riesgo  $rf$  es del (9,75%),  $rm$  (17,28%) rendimiento de mercado histórico,<sup>12</sup>  $\beta=1$  y la prima *ad-hoc* por falta de liquidez  $PC$  se estima en (7,21%). El valor actual neto del proyecto en su primera etapa (5 años) es:

**Tabla 1: Descuento de flujos de fondos proyecto**

Ventas unidades	17	24	37	37	49	
	0	1	2	3	4	5
Ventas		\$ 546.560,00	\$ 780.800,00	\$ 1.171.200,00	\$ 1.171.200,00	\$ 1.561.600,00
Costos Variables		\$ 218.624,00	\$ 312.320,00	\$ 468.480,00	\$ 468.480,00	\$ 624.640,00
Costos Fijos		\$ 30.000,00	\$ 40.000,00	\$ 50.000,00	\$ 60.000,00	\$ 70.000,00
<b>Flujos operativos después de T</b>		<b>\$ 199.617,12</b>	<b>\$ 287.081,60</b>	<b>\$ 437.322,40</b>	<b>\$ 430.622,40</b>	<b>\$ 580.863,20</b>
Inversión Inicial	\$ 286.425,00					
Capital de trabajo	\$ 257.664,00	\$ -77.299,20	\$ 334.963,20	\$ 51.532,80	\$ 334.963,20	\$ 180.364,80
<b>Flujos Libres</b>	<b>\$ -544.089,00</b>	<b>\$ 276.916,32</b>	<b>\$ -47.881,60</b>	<b>\$ 385.789,60</b>	<b>\$ 95.659,20</b>	<b>\$ 400.498,40</b>
$K$	24,49%					
VAN	<b>\$ 21.242,34</b>					

<sup>10</sup> Centros de colecta y trasplante de médula ósea (29), Bancos Públicos de sangre de cordón umbilical (5); Empresas colectoras de célula madres por cordón (6); Universidad Estatales especializadas en el área (38); Universidades Privadas e Institutos de Investigación del área (40); Empresas Biotecnológicas y Farmacéuticas (126), fuente de datos: elaboración trabajo final especialización en gestión tecnológica (GETEC), Universidad Nacional del Sur, Biólogo Jorge Pedrueza.

<sup>11</sup> Emergente, poco diversificado y segmentado, no siendo propicia la estimación de coeficientes betas para la implementación de los tradicionales modelos como CAPM (*Capital Asset Pricing Model*), APT (*Arbitrage Price Theory*). Uno de los problemas de las EBT, específicamente en mercados emergentes, está dado por no existir empresas comparables para obtener precios de mercado del riesgo. Esta es otra de las limitaciones que presentan los modelos clásicos de valuación frente a las opciones reales.

<sup>12</sup> El tipo sin riesgo corresponde a la tasa BAIBOR efectiva anual al 31/12/2012. El rendimiento de mercado se calcula tomando la media aritmética de rendimientos correspondientes al índice Merval período 1992-2012. (<http://www.iamc.sba.com.ar/Imgs/Dyn/ArchivosLenguajes/7398-2012-1-9T16-38-0.pdf>). Las series son de elaboración propia.

El resultado arrojado por el método de descuento de flujo de fondos es de u\$ 21.242,34, sin considerar la flexibilidad estratégica. Si se descuenta el costo de la licencia el valor del proyecto es negativo (u\$ 43.757,66). Por lo tanto el método no brinda suficiente información para la toma de decisiones respecto del potencial valor del proyecto, en función de sus alternativas estratégicas, debido a que solamente estima el valor estático o tradicional y no todo el valor Trigeorgis, (1997).<sup>13</sup> Es aquí donde cobra importancia el uso de los modelos de valoración de opciones reales. Las estrategias a valorar son:

- a. Expansión: A partir del quinto realizar inversiones adicionales para producir unidades mejoradas que estén en condiciones de competir con los rivales actuales y potenciales del mercado. La opción de expansión se estima demandará una inversión adicional de u\$270.000.
- b. Venta: Si el valor marginal del proyecto en el quinto período es negativo, se prevé una estrategia alternativa de venta de licencia para fabricar el biorreactor. Se proyecta un valor de venta u\$90.000. Por lo tanto se posee adicionalmente la flexibilidad estratégica de venta o abandono del proyecto.

En términos de opciones financieras, el emprendimiento posee dos opciones; una opción de compra europea para producir y comercializar el producto a escala comercial expandiendo la inversión al período quinto y una opción de venta europea, ejercible al vencimiento de la licencia, que permite la enajenación del proyecto a un precio acordado si los escenarios no son propicios para su producción a escala industrial. Cuando se contrata un *call* y *put* sobre el mismo subyacente, precio de ejercicio y vencimiento la estrategia se denomina *straddle*. La estrategia de opciones aludida tiene por objetivo brindar cobertura contra valores extremos, empleada sobre activos con un alto grado de volatilidad típico de los proyectos de base tecnológica.

Para permitir la aplicación de la Teoría de Opciones se supone que el mercado financiero debe ser completo, en el sentido de que cualquier flujo de fondos y riesgo pueda ser replicado por diferentes combinaciones de activos (carteras de arbitraje) (Wang y Halal, 2010). La consecuencia inmediata de ello reside en que todo activo real tiene un activo financiero gemelo (acción) cuyos movimientos se encuentran correlacionados perfectamente con los flujos del proyecto. A partir del activo financiero se infiere la volatilidad del proyecto de inversión ( $\sigma$ ), esta última es el insumo para estimar movimientos de ascenso ( $u$ ) y descenso ( $d$ ) del proceso estocástico discreto (binomial o trinomial) de los flujos de fondos del proyecto.

Dado que los mercados son imperfectos e incompletos no todas las inversiones en activos reales poseen una acción gemela. Esta situación se profundiza para emprendimientos tecnológicos donde el capital en juego no hace oferta pública en el mercado financiero, hecho que cobra relevancia en economías emergentes. Por ello se utiliza el método MAD (*Marketed Asset Disclaimer*) (Copeland y Antikarov, 2001) con el fin de calcular la volatilidad del proyecto. Primero se calcula el valor actual de los flujos de fondos, asumiéndose este como el verdadero valor de mercado o precio de transferencia en el caso de venta del proyecto en marcha. Paso seguido el VAN obtenido es simulado aplicando el método Monte Carlo, suponiéndose distribución normal de probabilidad de los valores del VAN. De la simulación se obtienen los parámetros de la distribución de frecuencia, entre ellos la volatilidad del VAN ( $\sigma$ ). Como resultado la volatilidad inicial asociada ( $\sigma$ ) es del 60%, el proceso estocástico del valor actual del proyecto sin costos de registro (u\$ 21.242,34) se supone geométrico browniano (GMB), el intervalo de tiempo es  $\Delta t=1$  y el tipo sin riesgo ( $r_f$ ) es del 5%. No obstante se prevé que los niveles de volatilidad disminuirán con el avance del tiempo (producto de la mayor información y conocimiento). En los años sucesivos se estiman volatilidades de:  $\sigma_1=60\%$ ,  $\sigma_2=40\%$ ,  $\sigma_3=30\%$  y  $\sigma_4=20\%$ .

---

<sup>13</sup> El valor total del proyecto se integra por el valor tradicional o estático y el valor expandido fruto de las oportunidades estratégicas del proyecto.

## 4.2 Valuación mediante los diferentes modelo de rejillas binomiales y trinomiales

A continuación se expondrán los resultados derivados de aplicar los modelos de valoración de opciones reales presentados en la sección anterior. Para cada uno de los modelos presenta la rejilla con la evolución del subyacente (VAN del proyecto); el valor intrínseco en cada nodo de la opción (en *itálicas*), los nodos finales con sus posibles decisiones (expansión-venta), el valor del proyecto con flexibilidad en  $t=0$  y el valor neto del proyecto (valor actual neto expandido menos costo de la opción de u\$ 65.000).

**Tabla 2: Valor de las opciones expansión-venta Modelo binomial Cox-Ross-Rubinstein**

	0	1	2	3	4	5	Decisión
<b>\$ 5,59</b>	\$ 21,24	\$ 38,71	\$ 70,53	\$ 128,51	\$ 234,16	\$ 426,66	
<b>inversión</b>	<b>\$ 70,59</b>	<b>\$ 75,01</b>	<b>\$ 80,99</b>	<b>\$ 90,83</b>	<b>\$ 110,63</b>	<b>\$ 156,66</b>	<b>expansión</b>
		\$ 11,66	\$ 21,24	\$ 38,71	\$ 70,53	\$ 128,51	
		<b>\$ 73,69</b>	<b>\$ 77,46</b>	<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
			\$ 6,40	\$ 11,66	\$ 21,24	\$ 38,71	
			<b>\$ 77,46</b>	<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
	<b>u</b>	1,8221		\$ 3,51	\$ 6,40	\$ 11,66	
	<b>d</b>	0,5488		<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
	<b>p</b>	0,3946			\$ 1,93	\$ 3,51	
	<b>1-p</b>	0,6054			<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
						\$ 1,06	
						<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>

La tabla 2 muestra el valor del proyecto obtenido a través del clásico modelo binomial de CRR. A diferencia del criterio de descuento de flujo de fondos, en donde la flexibilidad estratégica no tiene valor, el valor actual neto expandido del proyecto asciende a u\$ 70.590 (VAN estático u\$ 21.242,34 + VAN expandido u\$ 49.350). Por lo tanto el valor neto del proyecto considerando el costo de la licencia es de u\$ 5.590. De cumplirse el proceso estocástico estimado para el valor del proyecto, un solo escenario esperado revela la conveniencia de expansión, el resto de los nodos proyecta la venta de la licencia. El mayor y probable valor agregado estratégico proviene de la venta de la licencia.

La tabla 3 muestra el valor del proyecto obtenido a través del modelo binomial RB. En este caso valor agregado debido a las opciones estratégicas contenidas en el proyecto (expansión-venta) es de u\$ 48.850. La estrategia recomendada en todos los escenarios es la venta. La diferencias con el modelo anterior se encuentra en: (a) la definición de la volatilidad, (b) movimientos de ascenso – descenso, y (c) las probabilidades neutrales al riesgo ( $p = 1-p = 0,5$ ). El producto de los coeficientes (*u.d*) es de *0,7710*.

En la versión de modelo ABMC, el valor agregado de las opciones estratégicas del proyecto (expansión-venta) es de u\$ 50.190. Igual que el modelo CRR se proyecta un solo escenario de expansión y el resto de venta de licencia. En este caso el crecimiento de la rejilla está dado por  $u.d = e^{2r\Delta t} = 1.1051$ . A los efectos ilustrativos en la tabla 5 se expone la evolución de la magnitud de la volatilidad para el modelo CRR y la presente modalidad de rejilla. Esta se obtiene sensibilizando la variable período de tiempo sobre las ecuaciones 11 (CRR) y 30 (ABMC).

Tabla 3: Valor de las opciones expansión-venta Modelo binomial Rendleman-Bartter

	0	1	2	3	4	5	Decisión
<b>\$ 5,09</b>	\$ 21,24	\$ 33,99	\$ 54,38	\$ 87,01	\$ 139,21	\$ 222,74	
inversión	<b>\$ 70,09</b>	<b>\$ 73,69</b>	<b>\$ 77,46</b>	<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
		\$ 10,24	\$ 16,38	\$ 26,21	\$ 41,93	\$ 67,09	
		<b>\$ 73,69</b>	<b>\$ 77,46</b>	<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
			\$ 4,93	\$ 7,89	\$ 12,63	\$ 20,21	
			<b>\$ 77,46</b>	<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
			\$ 2,38	\$ 3,80	\$ 6,09		
			<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
				\$ 1,15	\$ 1,83		
				<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
					\$ 0,55		
					<b>\$ 90,00</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>

<b>u</b>	1,6000			\$ 2,38	\$ 3,80	\$ 6,09	
<b>d</b>	0,4819			<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
<b>p</b>	0,5000				\$ 1,15	\$ 1,83	
<b>1-p</b>	0,5000				<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>

Tabla 4: Valor de las opciones expansión-venta Modelo binomial ABMC

	0	1	2	3	4	5	Decisión
<b>\$ 6,43</b>	\$ 21,24	\$ 43,13	\$ 87,58	\$ 177,83	\$ 361,08	\$ 733,18	
inversión	<b>\$ 71,43</b>	<b>\$ 77,82</b>	<b>\$ 90,21</b>	<b>\$ 120,73</b>	<b>\$ 206,70</b>	<b>\$ 463,18</b>	<b>expansión</b>
		\$ 11,56	\$ 23,48	\$ 47,67	\$ 96,79	\$ 196,53	
		<b>\$ 73,69</b>	<b>\$ 77,46</b>	<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
			\$ 6,29	\$ 12,78	\$ 25,95	\$ 52,68	
			<b>\$ 77,46</b>	<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
			\$ 3,43	\$ 6,95	\$ 14,12		
			<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
				\$ 1,86	\$ 3,79		
				<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
					\$ 1,01		
					<b>\$ 90,00</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>

<b>u</b>	2,0305			\$ 3,43	\$ 6,95	\$ 14,12	
<b>d</b>	0,5443			<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
<b>p</b>	0,3411				\$ 1,86	\$ 3,79	
<b>1-p</b>	0,6589				<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>

Tabla 5: Evolución de la volatilidad modelos CRR-ABMC

$\Delta t$	CRR $\sigma$	ABMC $\sigma$	$\Delta t/n$	CRR $\sigma$	ABMC $\sigma$
1	60,00%	65,83%	1	60,00%	65,83%
5	134,16%	224,71%	5	18,97%	19,15%
10	189,74%	596,64%	10	8,49%	8,50%

Las primeras tres columnas muestran el incremento de la volatilidad a medida que los períodos de tiempo aumentan ( $\Delta t$ ), a mayor año el crecimiento proyectado por el modelo ABMC es superior al CRR. Para un intervalo anual la diferencia es significativa (65,83% ABMC; 60% CRR). Las tres columnas finales presentan el comportamiento de la volatilidad a medida que el número de pasos para un período ( $\Delta t/n$ ), aumenta. A medida que los pasos intermedios aumentan el valor de la volatilidad en ambos modelos converge.

Tabla 6: Valor de las opciones expansión-venta Modelo trinomial Boyle

	0	1	2	3	4	5	Decisión
<b>\$ 5,97</b>	\$ 21,24	\$ 64,84	\$ 197,95	\$ 604,26	\$ 1.844,56	\$ 5.630,74	
<b>inversión</b>	<b>\$ 70,97</b>	<b>\$ 80,76</b>	<b>\$ 129,12</b>	<b>\$ 401,18</b>	<b>\$ 1.569,28</b>	<b>\$ 5.360,74</b>	<b>expansión</b>
	\$ 21,24	\$ 64,84	\$ 197,95	\$ 604,26	\$ 1.844,56		
	<b>\$ 74,12</b>	<b>\$ 81,62</b>	<b>\$ 118,55</b>	<b>\$ 372,64</b>	<b>\$ 1.574,56</b>		<b>expansión</b>
	\$ 6,96	\$ 21,24	\$ 64,84	\$ 197,95	\$ 604,26		
	<b>\$ 73,70</b>	<b>\$ 77,60</b>	<b>\$ 83,08</b>	<b>\$ 105,66</b>	<b>\$ 334,26</b>		<b>expansión</b>
		\$ 6,96	\$ 21,24	\$ 64,84	\$ 197,95		
		<b>\$ 77,46</b>	<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>		<b>venta</b>
		\$ 2,28	\$ 6,96	\$ 21,24	\$ 64,84		
		<b>\$ 77,46</b>	<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>		<b>venta</b>
			\$ 2,28	\$ 6,96	\$ 21,24		
			<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>		<b>venta</b>
			\$ 0,75	\$ 2,28	\$ 6,96		
			<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>		<b>venta</b>
			\$ 0,75	\$ 2,28	\$ 6,96		
			<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>\$ 90,00</b>		<b>venta</b>
			\$ 0,24	\$ 0,75			
			<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>\$ 90,00</b>		<b>venta</b>
			\$ 0,24				
			<b>\$ 90,00</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>\$ 90,00</b>		<b>venta</b>
			\$ 0,08				
			<b>\$ 90,00</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>\$ 90,00</b>		<b>venta</b>

$\lambda$	1,860
$u$	3,053
$m$	1,000
$d$	0,328
$p_u$	0,086
$p_m$	0,711
$p_d$	0,203

Las rejillas trinomiales tienen capacidad de generar mayor cantidad de nodos, ganando en riqueza los posibles escenarios y resultados proyectados. El valor actual neto expandido del proyecto asciende a u\$ 70.970 (VAN estático u\$ 21.242,34+ VAN expandido u\$ 49.730) el valor neto del proyecto considerando el costo de la licencia es de u\$ 5.970.

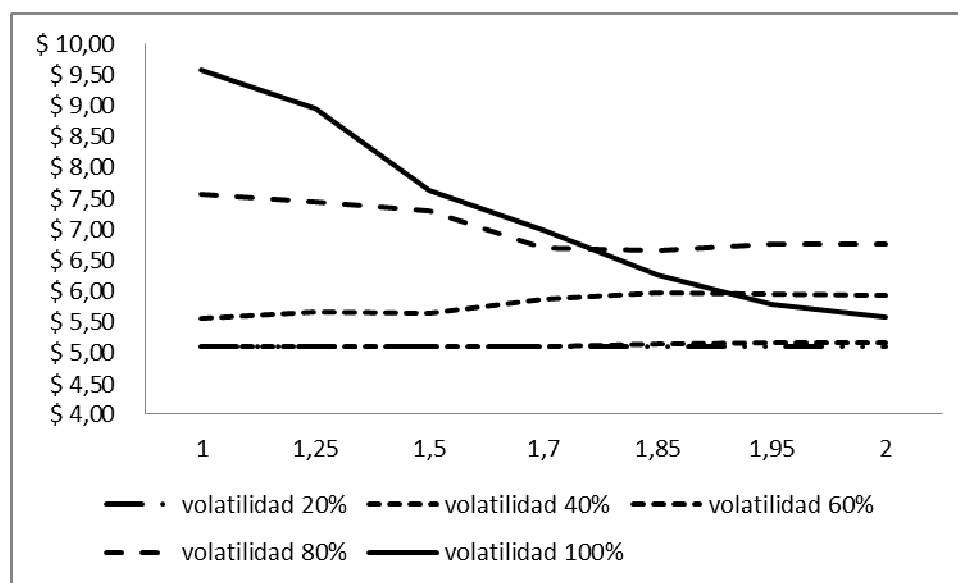
La probabilidad neutral el riesgo para el nodo intermedio surge de las siguientes igualdades  $p_u + p_m = 1/\lambda^2 = 0,2890$  y  $p_m = 1 - 1/\lambda^2 = 0,711$ . No debe perderse de vista que el valor de  $\lambda$  es directamente proporcional a la amplitud de movimientos, mayor el valor del coeficiente mayor la probabilidad de movimientos laterales. A continuación se simulan diferentes valores de  $\lambda$  y volatilidad para determinar los posibles valores de la opción.

Tabla 7: Sensibilidad de valor en función a  $\lambda$  y  $\sigma$ 

Valor	\$ 5,97	$\sigma$				
		20%	40%	60%	80%	100%
1	\$ 5,09	\$ 5,09	\$ 5,57	\$ 7,58	\$ 9,59	
1,25	\$ 5,09	\$ 5,09	\$ 5,66	\$ 7,44	\$ 8,95	
1,5	\$ 5,09	\$ 5,11	\$ 5,64	\$ 7,29	\$ 7,65	
1,7	\$ 5,09	\$ 5,11	\$ 5,87	\$ 6,69	\$ 6,99	
1,85	\$ 5,09	\$ 5,14	\$ 5,97	\$ 6,67	\$ 6,27	
1,95	\$ 5,09	\$ 5,16	\$ 5,95	\$ 6,76	\$ 5,79	
2	\$ 5,09	\$ 5,16	\$ 5,92	\$ 6,75	\$ 5,58	

En la tabla <sup>14</sup> se puede apreciar la evolución del valor de la opción (valor expandido menos costo licencia). Si el coeficiente es  $\lambda = 1$  el modelo colapsa al clásico CRR, conforme surge para el par (1; 60%, valor u\$ 5,57). El modelo plantea un *trade-off* entre volatilidad y parámetro  $\lambda$ , ya que a mayores valores que adoptan las variables indicadas en un punto el impacto en el valor de la opciones realcomienza a decrecer siendo su impacto negativo.

*Ilustración 1: volatilidad,  $\lambda$  y valor*



En la tabla 8 se exponen los resultados correspondientes a la rejilla trinomial con volatilidad cambiante (Haahtela, 2010).

En este caso se supone que la mayor volatilidad estará en los dos primeros años ( $\sigma_1, \sigma_2=60\%$ ) disminuyendo en los años subsiguientes ( $\sigma_3=40\%$ ;  $\sigma_4=40\%$ ;  $\sigma_5=40\%$ ).<sup>15</sup> Las empresas de base tecnológica se caracterizan por ser innovadoras, alto valor de las oportunidades de crecimiento, crear mercados nuevos. En términos de matriz de negocios nacen como incógnitas que transitarán su ciclo de vida producto-sector, pasando por negocios con crecimiento potencial en mercados establecidos para luego transformarse en negocios maduros en mercados estables; o directamente fracasos empresariales. El ciclo de vida anterior tiene correlación con la volatilidad del emprendimiento, siendo cambiante en los primeros años y tendiendo a estabilizarse con la madurez del negocio (Smit y Trigeorgis, 2004). Los coeficientes de ascenso y descenso ( $u$ ,  $m$  y  $d$ ) son empleados en la proyección del valor del subyacente. El ajuste en función a la volatilidad se realiza sobre las probabilidades de transición (ecuaciones 46-48).

Esta versión de rejilla permite abandonar el supuesto de volatilidad constante permitiendo sensibilizar y plantear diferentes escenarios. Es de utilidad, por ejemplo en el caso de empresas o proyectos novedosos donde no existen frecuencias de datos históricos con el objeto de proyectar el comportamiento esperado de la volatilidad. En la siguiente tabla se presente el resultado de la opción ante diferentes niveles de volatilidad.

<sup>14</sup> La tabla fue elaborada con la función tabla de datos del aplicativo Microsoft Excel ®.

<sup>15</sup> Se puede suponer que la volatilidad disminuye por el mayor conocimiento adquirido en el gerenciamiento del emprendimiento y flujo de nueva información sobre el comportamiento del mercado.

Tabla 8: Valor de las opciones expansión-venta Modelo trinomial Haahetela

	0	1	2	3	4	5	Decisión
<b>\$ 5,42</b>	\$ 21,24	\$ 107,67	\$ 545,73	\$ 2.766,06	\$ 14.019,97	\$ 71.061,30	
<b>inversión</b>	<b>\$ 70,42</b>	<b>\$ 83,40</b>	<b>\$ 331,61</b>	<b>\$ 2.521,83</b>	<b>\$ 13.763,14</b>	<b>\$ 70.791,30</b>	<b>expansión</b>
		\$ 22,33	\$ 113,19	\$ 573,71	\$ 2.907,87	\$ 14.738,79	
		<b>\$ 73,82</b>	<b>\$ 82,09</b>	<b>\$ 338,17</b>	<b>\$ 2.651,04</b>	<b>\$ 14.468,79</b>	<b>expansión</b>
		\$ 4,63	\$ 23,48	\$ 118,99	\$ 603,12	\$ 3.056,96	
		<b>\$ 73,69</b>	<b>\$ 77,49</b>	<b>\$ 83,63</b>	<b>\$ 349,15</b>	<b>\$ 2.786,96</b>	<b>expansión</b>
			\$ 4,87	\$ 24,68	\$ 125,09	\$ 634,04	
			<b>\$ 77,46</b>	<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 86,32</b>	<b>\$ 364,04</b>	<b>expansión</b>
			\$ 1,01	\$ 5,12	\$ 25,95	\$ 131,51	
<b><math>\lambda</math></b>	1,860		<b>\$ 77,46</b>	<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
<b>u</b>	5,069			\$ 1,06	\$ 5,38	\$ 27,28	
<b>m</b>	1,051			<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
<b>d</b>	0,218			\$ 0,22	\$ 1,12	\$ 5,66	
				<b>\$ 81,44</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
					\$ 0,23	\$ 1,17	
		<b>pu</b>	<b>pm</b>	<b>pd</b>	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
<b><math>\sigma_{1 y 2}</math></b>	60,00%	0,0246	0,8569	0,1185	\$ 0,05	\$ 0,24	
<b><math>\sigma_3</math></b>	40,00%	0,0109	0,9364	0,0527	<b>\$ 85,61</b>	<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
<b><math>\sigma_4</math></b>	30,00%	0,0061	0,9642	0,0296		\$ 0,05	
<b><math>\sigma_5</math></b>	20,00%	0,0027	0,9841	0,0132		<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>
						\$ 0,01	
						<b>\$ 90,00</b>	<b>venta</b>

Tabla 9: Escenarios, valor de la opción y volatilidad

$\sigma$	60;40;30;20	40;80;80;40	20;30;40;60	80;40;40;80	90;40;40;20
Escenario	Base	A	B	C	D
Valor	\$ 5,42	\$ 6,46	\$ 5,68	\$ 6,19	\$ 6,04

Se sensibilizó  $\lambda$  y la volatilidad correspondientes a los dos primeros años. Nuevamente para un valor de  $\lambda=1$  la relación valor–volatilidad es positiva, para valores superiores a 1,7 existe un balanceo entre valor de la opción, volatilidad y  $\lambda$ .

Tabla 10: Sensibilidad de valor en función a  $\lambda$  y  $\sigma$ 

ROV	\$ 5,42	$\sigma$				
		20%	40%	60%	80%	100%
<b><math>\lambda</math></b>	1	\$ 5,09	\$ 5,09	\$ 5,13	\$ 5,78	\$ 6,82
	1,25	\$ 5,09	\$ 5,09	\$ 5,16	\$ 5,58	\$ 6,96
	1,5	\$ 5,10	\$ 5,10	\$ 5,24	\$ 5,89	\$ 6,57
	1,7	\$ 5,10	\$ 5,10	\$ 5,31	\$ 5,43	\$ 6,16
	1,85	\$ 5,10	\$ 5,10	\$ 5,43	\$ 5,79	\$ 5,43
	1,95	\$ 5,12	\$ 5,12	\$ 5,40	\$ 6,01	\$ 5,20
	2	\$ 5,13	\$ 5,13	\$ 5,37	\$ 5,97	\$ 5,15



A modo de resumen se exponen los resultados del valor expandido, valor de la opción y decisiones inicial y en el horizonte de planeamiento arrojadas por los diferentes modelos analizados.

**Tabla 11: Resultados arrojados por los diferentes modelos**

Modelo	VAN Expandido menos Licencia	Decisión t=0	Escenarios en t=5		Valor Opción VAN Ex - VAN
			Expansión	Venta	
Cox-Ross-Rubinstein	\$ 5,58	inversión	1	5	\$ 49,39
Rendleman-Barter	\$ 5,09	inversión	0	6	\$ 48,90
ABMC	\$ 6,43	inversión	1	5	\$ 50,24
Boyle	\$ 5,96	inversión	3	8	\$ 49,77
Haathela	\$ 5,42	inversión	4	7	\$ 49,23

## 5. Conclusiones

Es importante conocer las diferencias, ventajas y debilidades que presentan los modelos de rejillas binomiales y trinomiales, a la hora de ser utilizados en la valoración de la flexibilidad estratégica contenida en una empresa o proyecto. La elección del modelo es crucial, debido a que condiciona a la restricción de su sistema de ecuaciones para definir la relación variabilidad-intervalo de tiempo, y como consecuencia de ello los movimientos de ascenso y descenso.

Con respecto de las rejillas binomiales se presentaron los modelos CRR, RB y ABMC. Si bien el modelo CRR se encuentra ampliamente difundido, presentadificultades relativos a su estabilidad para intervalos grandes es decir cuando  $\Delta t > \sigma^2/r^2$ . El modelo RB pierde centralidad ya que  $u.d \neq 1$  pero gana estabilidad frente a su par CRR. De las propuestas anteriores surge el modelo ABMC el cual considera la cuarta restricción de forma más apropiada a los problemas de decisión en el marco de opciones reales, donde los intervalos temporales son mayores y existen una menor cantidad de pasos intermedios en comparación a las opciones financieras. Las rejillas trinomiales presentan mayor precisión en el valor que su par binomial, producto de la mayor densidad de nodos. Un atractivo adicional consiste en que estas permiten sensibilizar el parámetro  $\lambda$  (Boyle, 1988) y obtener posibles valores del proyecto de manera sencilla.

Las rejillas trinomiales con volatilidad cambiante (Haahtela, 2010) permiten de manera simple, construir escenarios esperados con diferentes volatilidades, transformándose en una herramienta alternativa para la simulación y sensibilización de escenarios y parámetros.

Los modelos presentados fueron aplicados a la valoración de estrategias de expansión-venta en un emprendimiento de base tecnológica. Este tipo particular de empresa se caracteriza por su carácter innovador, donde el capital intelectual cobra un peso significativo en el valor y por contener oportunidades de crecimientos para crear nuevos mercados. En este tipo de empresas, es importante abandonar el supuesto de volatilidad constante y vincularlo con los diferentes estadios proyectados de la matriz de ciclo de vida del negocio.

Por las cualidades del modelo y las características de las empresas de base tecnológicas, las rejillas trinomiales con volatilidad cambiante se constituyen en un modelo satisfactorio, para estimar posibles valores de estrategias contenidas en la novedosa y compleja tipología organizacional.

**REFERENCIAS**

- Black, F- Scholes, M, 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, Mayo-Junio.pp. 637-659.
- Boyle, P., 1988. A lattice framework for option pricing with two state variables. *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, Volumen 23, pp. 1-12.
- Chance, D., 2007. A Synthesis of Binomial Option Pricing Models for Lognormally Distributed Assets.. *SSRN* <http://ssrn.com/abstract=1523548>, pp. 1-25.
- Copeland, T- Antikarov, V, 2001. *Real Options*. 1 ed. New York: Texere LLC.
- Cox, J- Ross, S-Rubinstein, M, 1979. Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, Septiembre.pp. 229-263.
- Cramer, H., 1946. *Mathematical methods for statistics*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Derman, E-Kani, I-Chriss, N, 1996. Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile. *Quantitative strategies research notes*, February.
- Haahtela, T., 2010. Recombining Trinomial Tree for Real Option Valuation with Changing Volatility. *SSRN-Social Science Research Network*.
- Haug Gaarder, E., 2007. *Derivatives: Models and Models*. 1 ed. Chichester : John Wiley & Sons.
- Hull, J., 2006. *Futures, Options and other Derivatives*. 6 ed. New Jersey: Prentice Hall.
- Jabbour, G-Kramin, M-Young, S, 2001. Two-state Option Pricing: Binomial Models Revisited. *Journal of Futures Markets*, Noviembre, Volumen 21, pp. 987-1001.
- Jarrow, R-Rudd, A, 1982. Aproximate option valuation for arbitrary stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, Volumen 10, pp. 347-369.
- Kamrad, B-Ritchken, P, 1991. Multinomial Approximating Models for Options with k State Variables. *Management Science*, 37(12), pp. 1640-1653.
- Kendall, M-Stuarts A, 1977. *The advanced theory of statistics: Vol.1 Distribution Theory*. New York: Mcmillan.
- Mun, J., 2004. *Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Strategic Investment and Decisions*. 1 ed. New York: Wiley.
- Pratt; S-Grabowski; R, 2008. *Cost Of Capital: Applications and Examples*. 3 ed. New Jersey: John Wiley & Sons.
- Rendleman, R-Bartter, B, 1979. Two-state Option Pricing. *Journal of Finance*, Issue 34, pp. 1092-1110.
- Schleher, D., 1977. Generalized Gram-Charlier series with application to the sum of log-normal. *IEEE Transactions on Information Theory*, Volumen 23, pp. 275-280.
- Smit, H-Trigeorgis, L, 2004. *Strategic Investment: Real Options and Games*. 1 ed. New Jersey(Estados Unidos): Princeton University Press.
- Smith, J., 2005. Alternative Approach for Solving Real Options Problems. *Decision Analysis*, Issue 2, pp. 89-102.
- Trigeorgis, L., 1991. A Log-Transformed Binomial Numerical Analysis Method for Valuing Complex Multi-Option Investments. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26(3), pp. 309-326.
- Trigeorgis, L., 1997. *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocations*. 2 ed. Cambridge: MIT Press.
- Wang, A-Halal, W, 2010. Comparison of Real Asset Valuation Models: A Literature Review. *International Journal of Business and Management*, Issue 5, pp. 14-24.
- Whaley, R., 2006. *Derivatives, Markets, Valuation and Risk Management*. New Jersey: John Wiley & Sons.
- Wilmott, P.-Howison, S-Dewynne, J, 1995. *The Mathematics of Financial Deivatives*. s.l.:Cambridge University Press.
- Wilmott, P, 2009. *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance*. Segunda ed. United Kingdom: John Wiley & Sons.