DOCENTES DE ADMINISTRACIÓN FINANCIERA

XXXI Jornadas Nacionales de Administración Financiera
Septiembre 2011

EL VAN Y EL PUNTO MUERTO FINANCIERO DE UN PROYECTO DE INVERSIÓN CON UNA ECUACIÓN DE DEMANDA PQ=CONST EN FUNCIÓN DE LA TASA DE DESCUENTO

Domingo A. Tarzia

Universidad Austral - CONICET

SUMARIO: 1. Introducción; 2. Proyecto de inversión con ecuación de demanda PQ=Const.; 3. Cálculo numérico del proyecto de inversión con demanda PQ=Const; 4. Conclusiones.

Para comentarios: DTarzia@austral.edu.ar

Resumen

Se considera un proyecto de inversión simple que tiene los siguientes parámetros sobre los cuales se realizan las siguientes hipótesis de trabajo: $I > 0$: Inversión inicial que se realiza de una sola vez y se amortiza totalmente en n años; n: Cantidad de años de duración del proyecto de inversión en el cual se realizan las mismas actividades y se considera que la compañía vende un solo producto; $A > 0$: Amortización anual ($A = I / n$); $Q > 0$: Cantidad de unidades del producto vendidas por año; $C_v > 0$: Costo variable por unidad; P: Precio de venta por unidad; $C_f > 0$: Costo fijo anual de la compañía; t_{ig}: Tasa del impuesto a las ganancias (en tanto por uno); r: Tasa de descuento o costo de oportunidad (en tanto por uno). El precio unitario P y la cantidad Q de unidades a vender están relacionados a través de una ecuación de demanda hiperbólica $PQ = C_0 \; (C_0 > 0)$. (i) Se obtiene la expresión explícita del Valor Actual Neto (VAN) del proyecto de inversión en función de la variable independiente Q y de la tasa de descuento r. (ii) Bajo la hipótesis $C_0 > C_f + A$ se determina explícitamente un único punto muerto (break even point) financiero $Q_f(r)$ (es decir, la cantidad de unidades vendidas Q que hace que el VAN sea nulo) en función de los parámetros restantes del problema I, n, C_v, C_f, t_{ig}, C_0, r. (iii) En particular, se estudia el comportamiento analítico del punto muerto financiero respecto de la tasa de descuento r y se demuestra que el VAN del proyecto de inversión es positivo si y solamente si Q es positivo y menor al muerto financiero $Q_f(r)$ para una dada tasa de descuento r siempre que ésta sea inferior a una tasa de descuento límite r_1 que se obtiene como la única solución de una ecuación que depende de los parámetros del problema. Además, se dan varios ejemplos numéricos que verifican los resultados teóricos obtenidos.

1. Introducción

En el presente trabajo se considera un proyecto de inversión simple en el cual se realiza solamente una inversión inicial I (flujo de fondo con signo negativo) y en los n años de duración del mismo se tendrán, en general, flujos de fondos de signo positivo.

Es muy importante la evaluación del proyecto de inversión para poder conocer si el mismo es o no es rentable. Existen varios criterios para la evaluación [De Pablo et al., 1990; López Dumrauf, 2003; Machain, 2002; Sapag Chain, 2001; Suarez Suarez, 1991] como son: el *valor actual neto* (conocido como VAN), la *tasa interna de retorno* (conocida como TIR), el *período de recuperación de la inversión* (conocido como PRI) y la *rentabilidad inmediata* (conocido como RI). Importantes análisis sobre los diferentes criterios de evaluación, y en particular sobre el *VAN* y la *TIR*, pueden encontrarse en los trabajos [Beaves, 1988; Hajdasinski, 1993, 1996, 2004; Hazen, 2003; Hartman-Schafrick, 2004; Lohmann-Baksh, 1993; Lohmann, 1994; Shull, 1992; Tang-Tang, 2003; Zhang, 2005].

En este trabajo se utilizará el Valor Actual Neto o VAN como criterio de evaluación. El VAN es aquel que permite determinar la valoración de una inversión en función de la diferencia entre el valor actualizado de todos los cobros derivados de la inversión y todos los pagos actualizados originados por la misma a lo largo del plazo de la inversión realizada. En otras palabras, el VAN de un proyecto de inversión es igual a la sumatoria de los valores actuales (al momento cero) de todos los flujos de fondos (negativos y positivos) que genera el mismo proyecto. La inversión será aconsejable si su VAN es positivo. La sumatoria de los valores actuales de los flujos puede presentar, en cuanto a su signo, tres situaciones, las que se interpretan a continuación [Baker-Fox, 2003; Bocco-Vence, 2000; Brealey-Myers, 1993; Reichelstein, 2000; Sapag Chain, 2001; Vanhoucke et al., 2001]:

(i) Un VAN positivo indica que:
- se recupera la inversión a valores nominales,
- se obtiene el retorno requerido sobre la inversión,
- se obtiene un remanente sobre el retorno requerido por el inversor.

(ii) Un VAN negativo indica que:
- se puede o no cubrir la inversión a valores nominales,
- no cubre las expectativas de retorno del inversor,
- no se obtiene ningún remanente.

(iii) Un VAN cero indica que cubre exactamente la devolución del capital nominal más el retorno requerido representado por la tasa utilizada para descontar los fondos al momento 0. En términos "económicos-empresarios" no se "agrega" ni se "destruye" valor.

La importancia del criterio del VAN puede apreciarse en [Brick-Weaver, 1997; Chung-Lin, 1998; Grinyer-Walker, 1990; Hajdasinski, 1995, 1997; Kim-Chung, 1990; Lan et al., 2003; Moon-Yun, 1993; Pasin-Leblanc, 1996; Pierru-Feuillet, 2002; Prakash et al., 1988; Roumi-Schnabel, 1990; Stanford, 1989].

En este trabajo se utilizarán **proyectos de inversión convencionales** que son aquellas inversiones que contienen uno o más flujos netos negativos (en particular, un solo flujo neto negativo) seguidos por uno o más flujos netos positivos [Bierman-Smidt, 1993; Hartman-Schafrick, 2004; Zhang, 2005].

En el presente trabajo se estudia un proyecto de inversión con la existencia de dos variables independientes: la cantidad de unidades Q a vender en cada año (que se encuentra relacionada con el precio P a través de una ecuación de demanda hiperbólica dada por la ecuación (1)) y la tasa de descuento r que pueden hacer, según los valores que adopten, que el proyecto de inversión sea viable o no**.** Por ende, el VAN será una función de las variables Q y r (también, sin pérdida de generalidad, podría ser una función de las variables P y r). Es de mucha importancia encontrar el valor de la variable independiente Q que haga que el correspondiente VAN sea nulo para una dada tasa de descuento r. Se define como **Punto Muerto Financiero** (break even point) el valor de la variable independiente Q para el cual el VAN es nulo para una dada tasa de descuento r [Brealey-Myers, 1993; Kim-Kim, 1996].

Se generalizará el estudio realizado en [Tarzia, 2007, 2010] considerando que la empresa funciona con una ecuación de demanda lineal dada por la recta de ecuación [SaNo]:

$$PQ = C_0 \quad (C_0 > 0) \tag{1}$$

que relaciona la cantidad de unidades a vender Q con el precio unitario P, donde C_0 es una constante positiva sobre la cual se determinarán condiciones a los efectos de que el problema tenga solución, es decir que el proyecto de inversión sea viable.

Planteo del problema, hipótesis y resultados obtenidos. En el proyecto de inversión a estudiar se tienen los siguientes parámetros:

- I : Inversión inicial**.** Se considera un proyecto de inversión simple que tiene una inversión inicial que se realiza en el año cero (antes del comienzo del año 1 correspondiente al primer año del desarrollo del proyecto de inversión). Dimensión: $[I]$ = \$;
- n : cantidad de años de duración del proyecto de inversión $(2 \le n)$. Dimensión: $[n]$ = 1;
- A : Amortización anual**.** Es la parte anual de la inversión que se deduce como gasto para el pago del impuesto a las ganancias. Dimensión: $[A]$ = \$;
- Q : Cantidad de unidades del producto vendidas por año. Dimensión: $[Q]$ = $\#\, unidades$;
- P : Precio de venta unitario al que la Compañía vende cada producto. Dimensión: $[P]$ = $\$/unidad$;
- C_0 : Constante de la ecuación de demanda (1). Dimensión: $[C_0] = \$$;
- C_v : Costo variable por unidad para producir el producto. Dimensión: $[C_v]$= $\$/unidad$;
- C_f : Costo fijo anual de la Compañía. Dimensión: $[C_f]$ = \$;
- t_{ig} : Tasa del impuesto a las ganancias (en tanto por uno). Dimensión: $[t_{ig}]$ = 1;
- r : Tasa de descuento o costo de oportunidad (en tanto por uno). Dimensión: $[r]$=1;
- t : Referente al año t ($t = 0,1,...,n$). Dimensión: $[t]$ = 1.

En [Fernandez Blanco, 1991] se realiza un estudio del VAN de un proyecto de inversión en función de la tasa de descuento r; se demuestra que el VAN de un proyecto de inversión en función de la tasa de descuento r es una función estrictamente decreciente y convexa. Dicho estudio no es completo y fue ampliado adecuadamente en [Tarzia, 2007] realizando un análisis del punto muerto financiero, respecto de la variable Q, en función de la tasa de descuento r, además de un análisis de sensibilidad. Además, en [Tarzia, 2009] se generalizó dicho análisis cuando se considera un crecimiento anual en la cantidad de unidades a vender por año. En el presente trabajo, se completará el estudio anterior considerando que la Compañía sigue una ecuación de demanda dada por la ecuación (1).

En el proyecto de inversión simple se considerarán las siguientes hipótesis de trabajo:

- Toda la inversión I se realiza de una sola vez y en el año 0;
- La inversión inicial se amortiza totalmente en n años, con lo cual la amortización anual está dada por:
$$A = \frac{I}{n}$$
- En los n períodos de tiempo de duración del proyecto de inversión se realizan las mismas actividades;
- Se considera que la compañía vende un solo producto (podría producirse o comprarse para luego revenderse).

El objetivo del presente trabajo es el de obtener la expresión explícita del VAN del proyecto de inversión en función de la variable independiente Q para una dada tasa de descuento r. También se determinarán explícitamente el punto muerto financiero Q_f en función de los parámetros restantes del problema ($I, n, C_f, C_v, C_0, t_{ig}, r$) y se estudiará analíticamente su comportamiento respecto de la tasa de descuento r. Por último, se demostrará que el VAN será positivo (el proyecto de inversión es viable) si y solamente si $0 < Q < Q_f(r), 0 < r < r_1$ donde r_1 es una tasa de descuento límite superior que se determinará como la única solución de una ecuación que depende de los parámetros restantes del problema bajo una cierta hipótesis sobre la constante C_0, dada por la desigualdad (7). Además, se dan varios ejemplos numéricos en los cuales se verifican los resultados teóricos obtenidos y una aplicación del software @RISK de Palisade cuando se considera C_0 como una variable de entrada aleatoria.

2. Proyecto de inversión con ecuación de demanda *PQ=Const.*

Como en cada año ($t = 1,2,...,n$) se realizan las mismas operaciones se supone que los parámetros $Q, P, C_0, C_f, C_v, r, t_{ig}$ son constantes durante los n años de duración del proyecto de inversión. Para cada año t ($t = 1,2,...,n$) se tiene:

Ingresos (precio por cantidad):	$PQ = C_0$
Costos variables:	$C_v Q$
Costos fijos:	C_f
Amortización:	$A = \frac{I}{n}$
Beneficios antes de impuestos (BAT):	$BAT_t = (P - C_v)Q - C_f - A$

Impuesto a las Ganancias(IG): $\quad IG_t = t_{ig}\left[\left(P-C_v\right)Q-C_f-A\right]$

Beneficio Neto$(BN = BAT - IG)$: $\quad BN_t = (1-t_{ig})\left[\left(P-C_v\right)Q-C_f-A\right]$

Flujo de Tesorería Neto$(F = BN + A)$: $\quad F_t = (1-t_{ig})\left[\left(P-C_v\right)Q-C_f-A\right]+A$

$$= -(1-t_{ig})C_vQ+(1-t_{ig})\left(C_0-C_f\right)+t_{ig}A$$

Factor de descuento para el año t: $\quad \dfrac{1}{(1+r)^t}$.

Teniendo en cuenta que la inversión I se realiza en el período 0 se tiene que el correspondiente *VAN* del proyecto de inversión viene dado por $-I$ más los valores actuales de todos los flujos de fondos F_t obtenidos en cada año t variando t desde 1 a n, es decir [Tarzia, 2000; Villalobos, 2001]:

(2) $$VAN\left(Q,r\right) = -I+\sum_{t=1}^{n}\frac{F_t}{(1+r)^t} = h(r)-m(r)Q,$$

expresión que resulta ser una función afín de la variable Q donde se han definido las funciones reales $m = m(r), h = h(r)$ y $f = f(r)$ de la siguiente manera:

(3) $$f(r) = \frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right], \quad r>0,$$

(4) $$h = h\left(r\right) = -I + f(r)\left[t_{ig}A+\left(1-t_{ig}\right)\left(C_0-C_f\right)\right], \quad m(r) = \left(1-t_{ig}\right)C_v f(r), \quad r>0.$$

A los efectos de estudiar el *VAN*, en primer lugar se obtienen las siguientes propiedades auxiliares.

Lema 1

(i) *La función real* $h = h(r)$ *tiene las siguientes propiedades:*

(5) $$h(0^+) = n(1-t_{ig})(C_0-C_f-A), \quad h(+\infty) = -I<0,$$

(6) $$h'(r) = [(1-t_{ig})(C_0-C_f)+t_{ig}A]f'(r).$$

(ii) *Si* C_0 *verifica la desigualdad*

(7) $$C_0 > C_f + A$$

entonces $h\left(0^+\right)>0, h'\left(r\right)<0, \forall r>0$, *y por lo tanto* h *es una función estrictamente decreciente.*

(iii) *Si* C_0 *verifica la desigualdad (7) entonces* h *tiene un único cero* $r_1>0$ *que viene dado por la única solución de la ecuación:*

(8) $$f(r) = \frac{I}{(1-t_{ig})(C_0-C_f)+t_{ig}A}, \quad r>0.$$

Además, la función real $r_1 = r_1(C_0)$, que a cada parámetro C_0 le asigna la única solución de la ecuación (8), es una función estrictamente creciente de la variable C_0 con las propiedades siguientes:

(9) $$r_1(C_f + A) = 0, \qquad r_1(+\infty) = +\infty .$$

Demostración

(i) Los resultados (5) y (6) se deducen de las siguientes propiedades de la función real f, obtenidas en [Tarzia, 2007]:

(10) $$f\left(0^+\right) = n > 0 \,,\ f(+\infty) = 0,$$

(11) $$\frac{df(r)}{dr} = f'(r) = -\frac{G(r)}{r^2\left(1+r\right)^{n+1}} < 0 \,,\ \forall r > 0$$

(12) $$f'\left(0^+\right) = -\frac{n\left(n+1\right)}{2},\ f'\left(+\infty\right) = 0,$$

(13) $$f''(r) = \frac{H(r)}{r^3\left(1+r\right)^{n+2}} > 0 \,,\ \forall r > 0$$

(14) $$f''\left(0^+\right) = \frac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{3},\ f''\left(+\infty\right) = 0$$

donde las funciones reales $G = G\left(r\right)$ y $H = H\left(r\right)$ están definidas por las expresiones:

(15) $$G\left(r\right) = \left(1+r\right)^{n+1} - 1 - \left(n+1\right)r \,,\ r > 0$$

(16) $$H\left(r\right) = 2\left(1+r\right)^{n+2} - 2 - 2\left(n+2\right)r - \left(n+1\right)\left(n+2\right)r^2 \,,\ r > 0$$

y tienen las siguientes propiedades:

(17) $$G\left(0^+\right) = 0 \,,\ G\left(+\infty\right) = +\infty \,,\ G\left(r\right) > 0 \,,\ \forall r > 0$$

(18) $$H\left(0^+\right) = 0 \,,\ H\left(+\infty\right) = +\infty \,,\ H\left(r\right) > 0 \,,\ \forall r > 0 .$$

(ii) Si C_0 verifica la desigualdad (7) entonces

$$h\left(0^+\right) = n(1 - t_{ig})(C_0 - C_f - A) > 0,$$

y por lo tanto $h'\left(r\right) < 0, \forall r > 0$ con lo cual h es una función estrictamente decreciente.

(iii) Si C_0 verifica la desigualdad (7) entonces, teniendo en cuenta (5), (6) y (11), se deduce que existe una tasa de descuento $r_1 > 0$ que es el único cero de h que está caracterizado por la ecuación (8) pues

(19) $$h(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(r) = \frac{I}{(1 - t_{ig})(C_0 - C_f) + t_{ig}A} .$$

Además, si se define la función real $r_1 = r_1(C_0)$, que a cada parámetro $C_0(> C_f + A)$ le asigna la única solución de la ecuación (8), entonces resulta ser una función estrictamente creciente de la variable C_0 con las propiedades (9) debido a las propiedades (10) y (11) de la función f .■

Teorema 2
(i) *Si* $0 < C_0 \leq C_f + A$ *entonces* $VAN(Q,r) < 0, \quad \forall Q, r > 0$ *y por ende el proyecto de inversión no es viable.*
(ii) *Si* C_0 *verifica la desigualdad* (7) *entonces existe un único punto muerto financiero, que anula el* VAN *, definido por la expresión siguiente:*

(20) $$Q_f = Q_f(r) = \frac{1}{(1-t_{ig})C_v}[(1-t_{ig})(C_0 - C_f) + t_{ig}A - \frac{I}{f(r)}], \quad 0 < r < r_1$$

donde r_1 *viene dado como la única solución de la ecuación* (8).

(iii) *El proyecto de inversión es viable cuando la cantidad de unidades a vender* Q *verifica una de las siguientes condiciones equivalentes:*

(21) $$VAN(Q,r) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < Q < Q_f(r), 0 < r < r_1 .$$

Demostración
(i) Si $0 < C_0 \leq C_f + A$ entonces $h(r) < 0, \forall r > 0$ con lo cual $VAN(Q,r) < 0, \forall Q, r > 0$ y por ende el proyecto de inversión no es viable.

(ii) Si C_0 verifica la desigualdad (7) entonces

(22) $$VAN(Q,r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q = \frac{h(r)}{m(r)} .$$

Por lo tanto, existe existe un único punto muerto financiero, que anula el VAN , dado por la expresión (20) que se encuentra bien definido cuando $h(r) > 0$, es decir para $0 < r < r_1$, donde $r_1 > 0$ es la única solución de la ecuación (8). Además, se tiene la siguiente expresión del $VAN(Q,r)$ dado por:

(23) $$VAN(Q,r) = m(r)[Q_f(r) - Q], \quad Q > 0, \quad r > 0 .$$

(iii) El proyecto de inversión será viable cuando $VAN(Q,r) > 0$, es decir cuando la cantidad de unidades a vender Q satisfaga las desigualdades:

$$0 < Q < Q_f(r), 0 < r < r_1 .$$ ■

Teorema 3 *El comportamiento del punto muerto financiero* $Q_f = Q_f(r)$, *definido en el intervalo* $(0, r_1)$, *en función de la tasa de descuento* r *, está dado por las siguientes propiedades:*

(24) $$Q_f(0^+) = \frac{C_0 - C_f - A}{C_v} > 0, \quad Q_f(r_1^-) = 0 ,$$

(25) $$\frac{dQ_f}{dr}(r) = \frac{I}{C_v(1-t_{ig})}\frac{f'(r)}{f^2(r)} < 0, \quad \forall r \in (0, r_1) \text{ ,}$$

(26) $$\frac{dQ_f}{dr}(0^+) = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{-I}{2(1-t_{ig})C_v} < 0 \text{ ,}$$

(27) $$\frac{dQ_f}{dr}(r_1^-) = -\frac{[(1-t_{ig})(C_0 - C_f) + (1-t_{ig})A]^2}{(1-t_{ig})IC_v}\frac{G(r_1)}{r_1^2(1+r_1)^{n+1}} < 0 \text{ .}$$

Demostración

Los resultados se deducen teniendo en cuenta las propiedades (10)-(14) de la función real f . ■

3. Cálculo numérico del proyecto de inversión con demanda PQ=Const.

Ejemplo 1.

Se consideran los siguientes datos del proyecto de inversión simple:

- Inversión inicial: $I = 150000\,[\$]$;
- Cantidad de años de duración del proyecto: $n = 10$;
- Amortización anual: $A = 15000\,[\$]$;
- Costo variable de producción por unidad: $C_v = 3{,}00\,[\$/unidad]$;
- Costo fijo anual: $C_f = 30000\,[\$]$;
- Tasa del impuesto a las ganancias: $t_{ig} = 0{,}35\,(35\%)$ anual;
- Parámetro de la Ecuación de Demanda: $C_0 = 100.000\,[\$]$.

Teniendo en cuenta los resultados teóricos obtenidos en la sección anterior se deduce el siguiente valor para la tasa de descuento límite superior:

(28) $$C_f + A = 45.000; \qquad \frac{C_0 - C_f - A}{C_v} = 18.333{,}33; \qquad r_1 = 0{,}3167391\,(31{,}67\%) \text{ anual .}$$

Por otro lado, en la Figura 1 puede apreciarse el comportamiento del punto muerto financiero $Q_f = Q_f(r)$ en función de la tasa de descuento r hasta la tasa de descuento límite r_1 verificando las propiedades (24) a (27).

Además, la función real $r_1 = r_1(C_0)$, estrictamente creciente de la variable C_0 con las propiedades (9) puede apreciarse en la Figura 2.

Ejemplo 2.

Se consideran los siguientes datos del proyecto de inversión simple:

- Inversión inicial: $I = 150000\,[\$]$;
- Cantidad de años de duración del proyecto: $n = 10$;
- Amortización anual: $A = 15000\,[\$]$;

Figura 1. Gráfica de $Q_f\left(r\right)$ vs. r ***hasta la tasa de descuento límite*** r_1

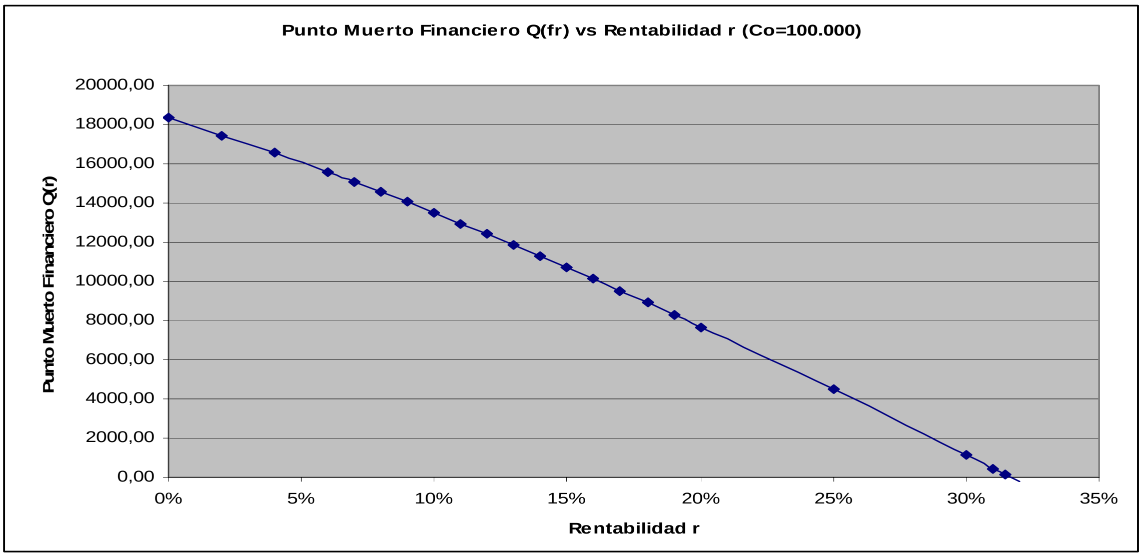
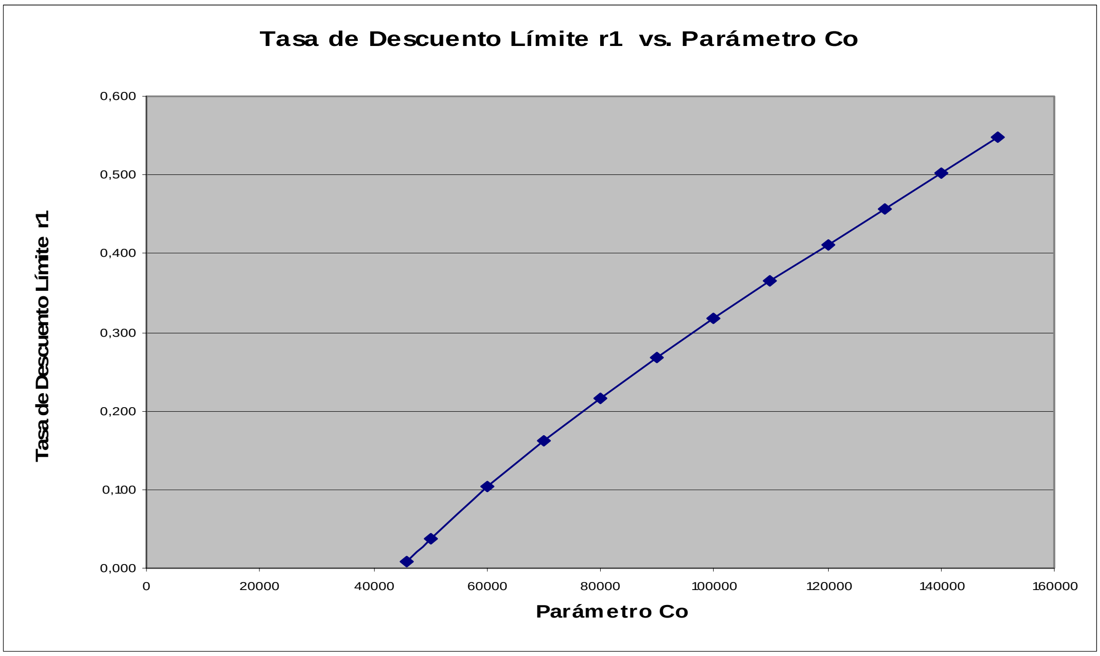


Figura 2. Gráfica de r_1 vs. C_0



- Costo variable de producción por unidad: $C_v = 3,00\left[\$ / \text{unidad}\right]$;
- Costo fijo anual: $C_f = 30000\left[\$\right]$;
- Tasa del impuesto a las ganancias: $t_{ig} = 0,35\left(35\%\ \right)$ anual;
- Tasa de descuento: $r = 0,10\ (10\%)$ anual ;
- Parámetro de la Ecuación de Demanda: $C_0 = 100.000\left[\$\right]$;
- Cantidad de unidades a vender: $Q = 12.000\left[\text{unidad}\right] \quad (P = 8,33\,[\$]/\,\text{unidad})$.

Teniendo en cuenta los resultados teóricos obtenidos en la sección anterior se obtienen los siguientes resultados deterministas:

(29) $$VAN\left(Q,r\right)=18.053,91\,[\$]; \qquad Q_f\,(r)=13.506,76\,[\text{unidad}].$$

En general, este proyecto de inversión puede ser considerado probabilístico si al menos uno de los parámetros del sistema es estocástico. Uno de los parámetros sensibles que más pueden influir en el *VAN* es el parámetro C_0. Como ejemplo, se utiliza el software @RISK de Palisade asumiendo para la variable aleatoria de entrada C_0 una distribución de probabilidad de tipo Triangular con valores mínimo, medio y máximo dados respectivamente como en las tres situaciones siguientes:

(30)
$$\begin{aligned}&(a)\quad C_0=\text{RISKTriang(95.000; 100.000; 105.000)},\\&(b)\quad C_0=\text{RISKTriang(90.000; 100.000; 110.000)},\\&(c)\quad C_0=\text{RISKTriang(85.000; 100.000; 115.000)}.\end{aligned}$$

Entonces se obtienen los siguientes resultados que están resumidos en las Figuras 3a, 3b y 3c. De estas gráficas se deduce que:

(i) el valor de la media de la variable aleatoria *VAN* en los tres escenarios es prácticamente el mismo valor dado por 18.054;

(ii) la probabilidad de que la variable aleatoria *VAN* sea menor o mayor a su media es de 0,50 en los tres escenarios;

(iii) a medida que la desviación estándar en C_0 es mayor entonces se aprecia que la volatilidad del *VAN* es mayor llegando a tener valores negativos con probabilidad de 0,005; 0,15 y 0,244 respectivamente a pesar que la media 18.054 permanece constante en los tres escenarios.

Figura 3a. Histograma del VAN para el Ejemplo 2 con escenario (a) para C_0

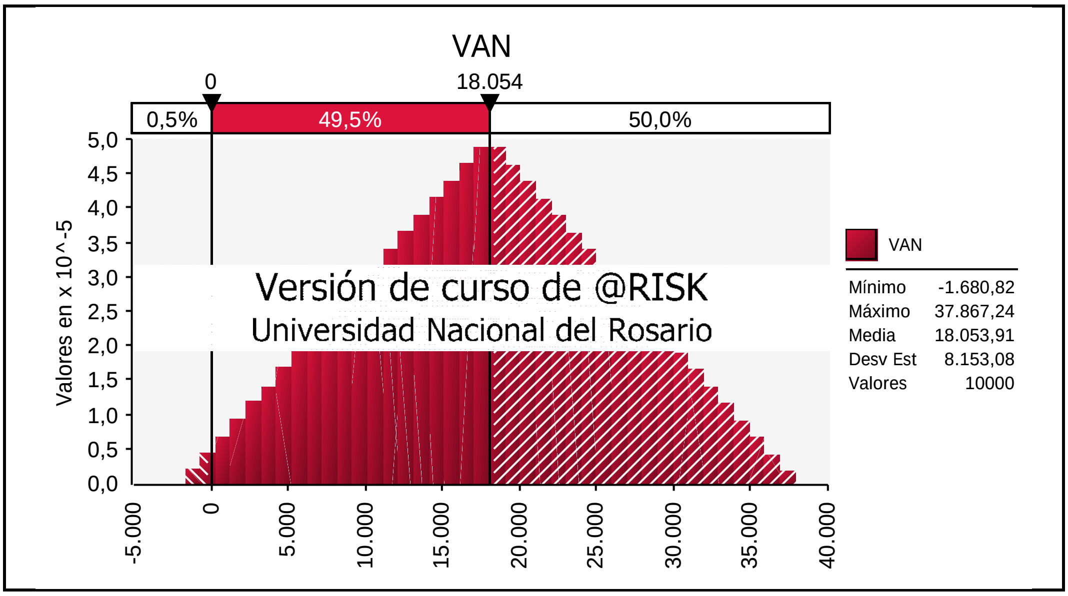


Figura 3b. Histograma del VAN para el Ejemplo 2 con escenario (b) para C_0

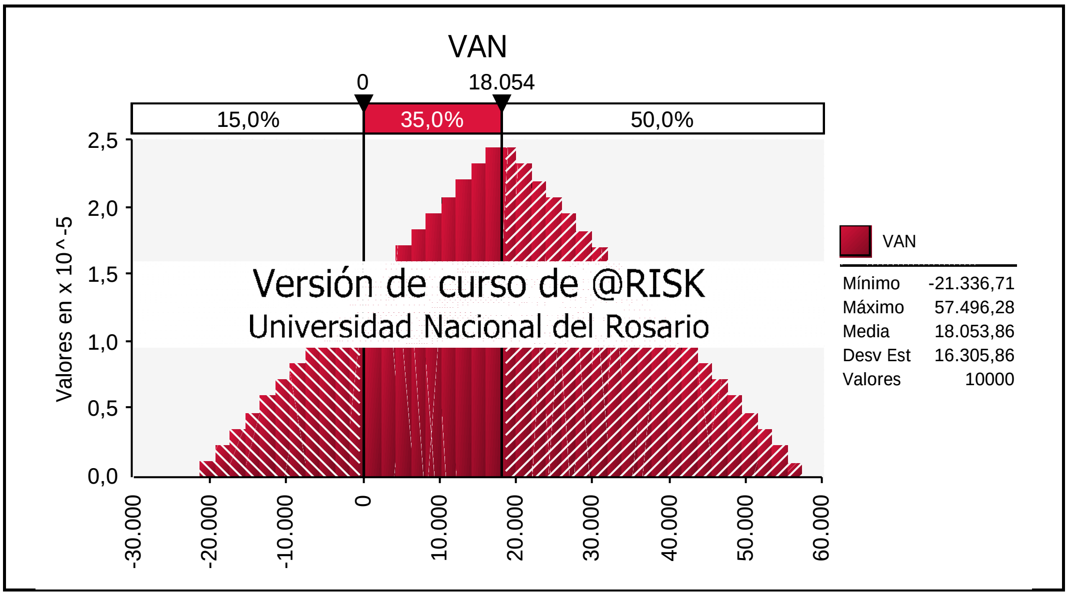
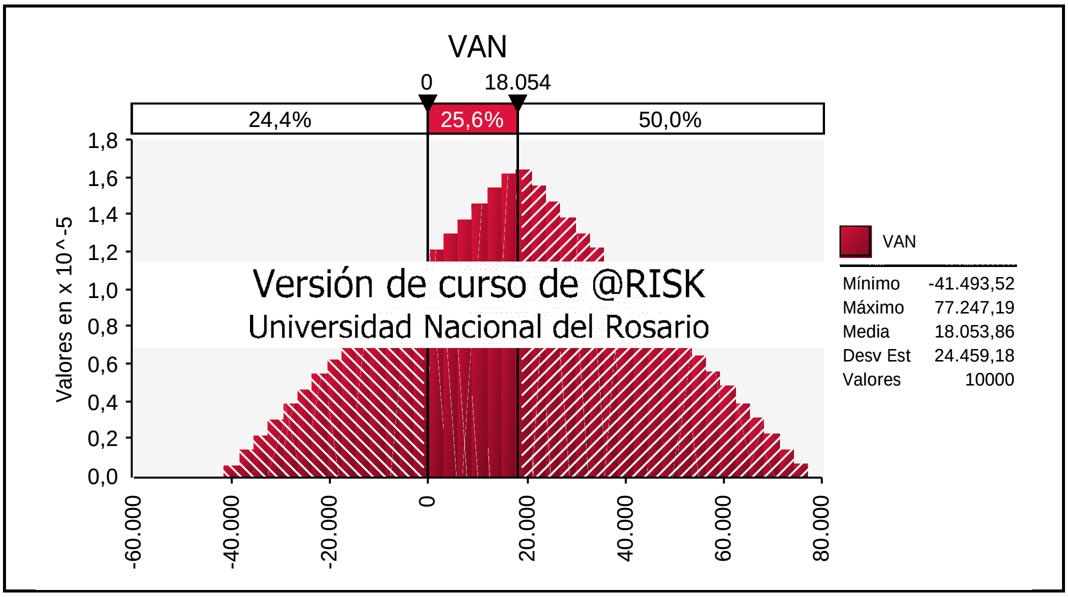


Figura 3c. Histograma del VAN para el Ejemplo 2 con escenario (c) para C_0



Ejemplo 3.

Se consideran los siguientes datos del proyecto de inversión simple:

- Inversión inicial: $I = 150000\,[\$]$;
- Cantidad de años de duración del proyecto: $n = 10$;
- Amortización anual: $A = 15000\,[\$]$;
- Costo variable de producción por unidad: $C_v = 3,00\,[\$/\text{unidad}]$;
- Costo fijo anual: $C_f = 30000\,[\$]$;
- Tasa del impuesto a las ganancias: $t_{ig} = 0,35\,(35\%)$ anual;

- Tasa de descuento: $r = 0{,}10\ (10\%)$ anual ;
- Parámetro de la Ecuación de Demanda: $C_0 = 100.000\,[\$]$;
- Cantidad de unidades a vender: $Q = 10.000\,[\text{unidad}]\quad (P = 10\,[\$/\text{unidad}])$.

Teniendo en cuenta los resultados teóricos obtenidos en la sección anterior se obtienen los siguientes resultados deterministas:

(31) $$VAN(Q,r) = 42.017{,}72\,[\$]; \qquad Q_f(r) = 13.506{,}76\,[\text{unidad}].$$

Como en el Ejemplo 2 anterior, se puede utilizar el software @RISK de Palisade asumiendo para la variable aleatoria de entrada C_0 una distribución de probabilidad de tipo Triangular con valores mínimo, medio y máximo dados respectivamente como en las tres situaciones (30). Entonces, se obtienen los siguientes resultados que están resumidos en las Figuras 4a,4b y 4c. De estas gráficas se deduce que:

(iv) el valor de la media de la variable aleatoria *VAN* en los tres escenarios es prácticamente el mismo valor dado por 42.018;

(v) la probabilidad de que la variable aleatoria *VAN* sea menor o mayor a su media es de 0,50 en los tres escenarios;

(vi) a medida que la desviación estándar en C_0 es mayor entonces se aprecia que la volatilidad del *VAN* es mayor llegando a tener valores negativos con probabilidad de 0; 0 y 0,045 respectivamente a pesar que la media 42.018 permanece constante en los tres escenarios. La diferencia de estos resultados con respecto al del Ejemplo 2 se justifica por el valor menor de *Q* utilizado (o equivalentemente a un mayor valor de *P*).

Figura 4a. Histograma del VAN para el Ejemplo 3 con escenario (a) para C_0

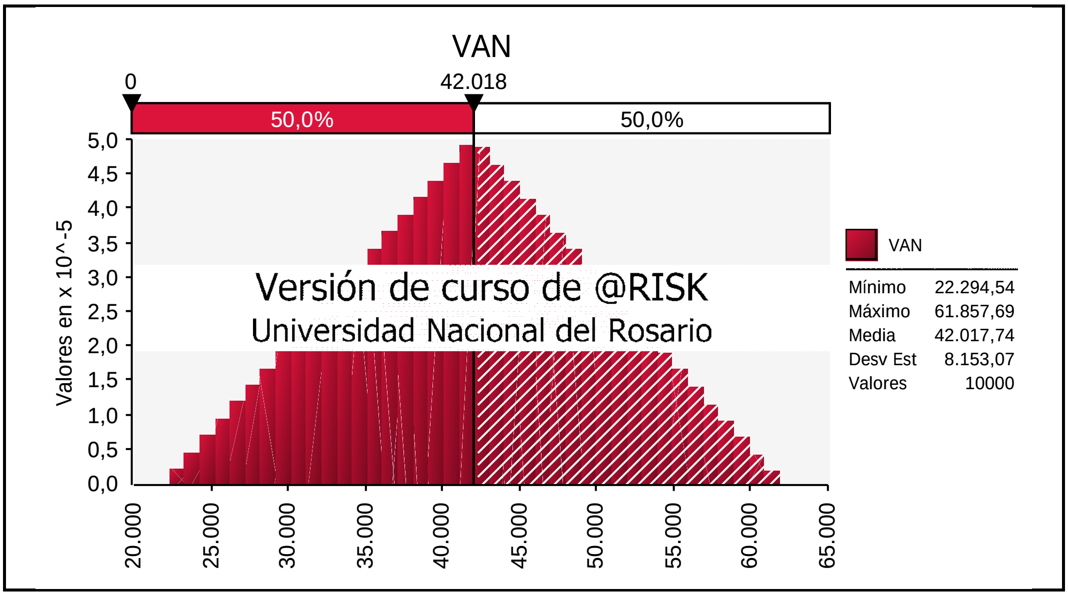


Figura 4b. Histograma del VAN para el Ejemplo 3 con escenario (b) para C_0

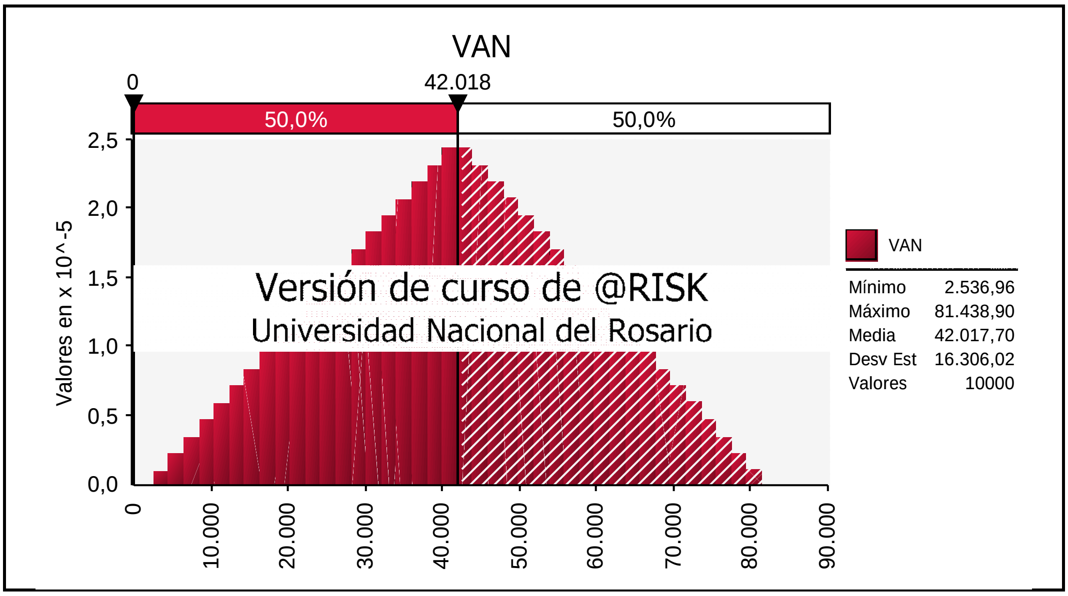
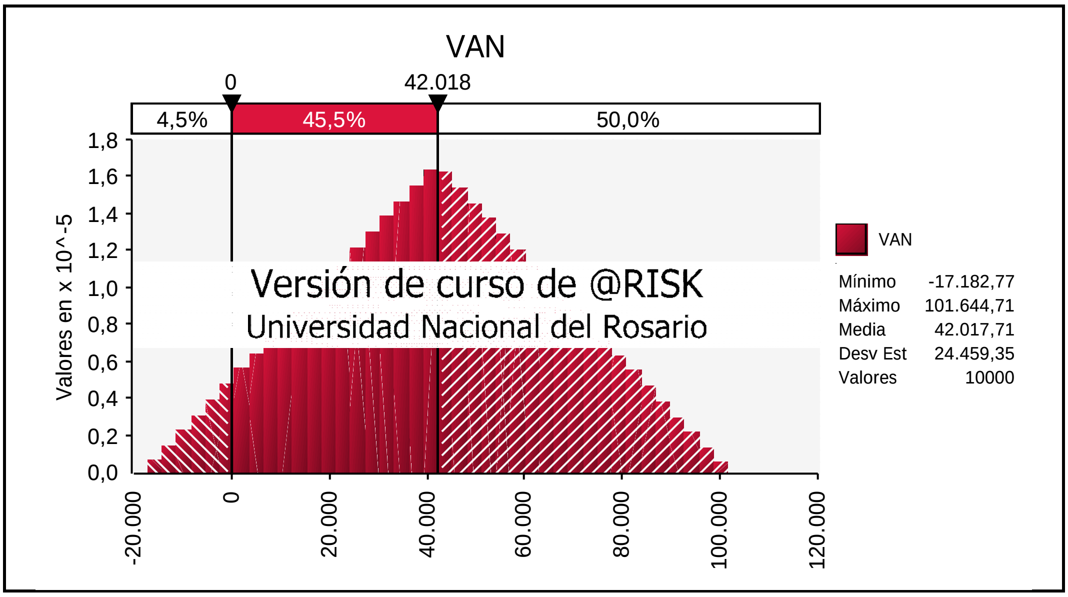


Figura 4c. Histograma del VAN para el Ejemplo 3 con escenario (c) para C_0



4. Conclusiones

Si en un proyecto de inversión la cantidad de unidades Q a vender en cada año se encuentra relacionada con el precio P a través de una ecuación de demanda dada por la hipérbola de ecuación

$$PQ = C_0 \qquad \left(\text{con } C_0 > C_f + A\right),$$

entonces se obtienen los resultados teóricos siguientes:

- la expresión explícita del VAN del proyecto de inversión en función de la variable independiente Q para una dada tasa de descuento r;
- la expresión explícita del punto muerto financiero Q_f en función de los parámetros restantes del problema $(I, n, C_f, C_v, C_0, t_{ig}, r)$, y se estudió analíticamente su comportamiento respecto de la tasa de descuento r;
- el VAN del proyecto de inversión es positivo si y solamente si Q se encuentra entre 0 y dicho punto muerto financiero para una dada tasa de descuento r siempre que ésta sea inferior a una tasa de descuento límite r_1 que se obtiene como la única solución de la ecuación (8) que depende de los parámetros del problema, es decir:

$$VAN(Q,r) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < Q < Q_f(r), \quad 0 < r < r_1 .$$

Además, se dan varios ejemplos numéricos que verifican los resultados teóricos obtenidos.

REFERENCIAS

Baker, R., and Fox, R., Capital investment appraisal: A new risk premium model, *International Transactions on Operations Research*, 10 (2003), 115-126.

Beaves, R.G., Net present value and rate of return: implicit and explicit reinvestment assumptions, *The Engineering Economist*, 33 (1988), 275-302.

Bierman, J.H., and Smidt, S., *The capital budgeting decision*, Macmillan, New York (1993).

Brick, I.E., and Weaver, D.G., Calculating the cost of capital of an unlevered firm for use in project evaluation, *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 9 (1997), 111-129.

Bocco, J.L., and Vence, L.A., *Proyectos de inversión. Métodos de evaluación. Problemas y aspectos especiales*, Errepar, Buenos Aires (2000).

Brealey, R., and Myers, S., *Fundamentos de financiación empresarial*. Mc Graw- Hill, Madrid, 1993.

Chung, K.J., and Lin, S.D., An exact solution of cash flow for an integrated evaluation of investment in inventory and credit, *Production Planinning & Control*, 9 (1998), 360-365.

De Pablo, A., Ferruz, L., and Santamaria, R., *Análisis práctico de decisiones de inversión y financiación en la empresa*, Ariel, Barcelona (1990).

Fernandez Blanco, M. *Dirección financiera de la empresa*. Pirámide, Madrid, 1991.

Grinyer, J.R., and Walker, M., Deprival value-based accounting rates of return under uncertainty. A note, *Economical Journal*, (September 1990), 918-922.

Hajdasinski, M.M., The Payback Period as a Measure of Profitability and Liquidity, *The Engineering Economist*, 38 (1993), 177-191.

Hajdasinski, M.M., Remarks in the context of the case for a generalized net present value formula, *The Engineering Economist*, 40 (1995), 201-210.

Hajdasinski, M.M., Adjusting the Modified Internal Rates of Return, *The Engineering Economist*, 41 (1996), 173-186.

Hajdasinski, M.M., NPV- Compatibility, project ranking, and related issues, *The Engineering Economist*, 42 (1997), 325-339.

Hajdasinski, M.M., Technical note- the internal rate of return (IRR) as a financial indicator, *The Engineering Economist*, 49 (2004), 185-197.

Hartman, J.C., and Schafrick, I.C., The relevant internal rate of return, *The Engineering Economist*, 49 (2004), 139-158.

Hazen, G.B., A new perspective on multiple internal rates of return, *The Engineering Economist*, 48 (2003), 31-51.

Kim, J.S., and Kim, J.W., A breakeven procedure for a multi-period project, *The Engineering Economist*, 41 (1996), 95-104.

Kim, Y.H. and Chung, K.H., An integrated evaluation of investment in inventory and credit: A cash flow approach, *Journal of Business Finance & Accounting*, 17 (1990), 381-390.

Lan, S.P., Chung, K.J., Chu, P., and Kuo, P.F., The formula approximation for the optimal cycletime of the net present value, *The Engineering Economist*, 48 (2003), 79-91.

Lohmann, J.R., A clarification of the Concepts of income, wealth base, and rates of return implications of alternative project evaluation criteria, *The Engineering Economist*, 39 (1994), 355-361.

Lohmann, J.R., and Baksh, S. N., The IRR, NPV and payback period and their relative performance in common capital budgeting decision procedures for dealing with risk, *The Engineering Economist*, 39 (1993), 17-47.

López Dumrauf, G., *Finanzas Corporativas*, Grupo Guía, Buenos Aires (2003).

Machain, L., *El valor actual neto como criterio óptimo para seleccionar alternativas de inversión*, Trabajo Final de la Especialidad en Finanzas, Univ. Nacional de Rosario, 2002

Moon, I., and Yun, W., A note in evaluating investments in inventory systems: a net present value framework, *The Engineering Economist*, 39 (1993), 93-99.

Pasin, F., and Leblanc, D., A simple method for calculating the $i_{\min}$ rate for an investment project, *The Engineering Economist*, 41 (1996), 365-368.

Pierru, A., and Feuillet-Midrier, E., Discount rate value and cash flow definition: a new relationship and its implications, *The Engineering Economist*, 47 (2002), 60-74.

Prakash, A.J., Dandapani, K., and Karels, G.V., Simple resource allocation rules, *Journal of Business Finance & Accounting*, 15 (1988), 447-452.

Reichelstein, S., Providing managerial incentives: Cash flows versus accrual accounting. *Journal of Accounting Research*, 38 (2000), 243-269.

Roumi, E., and Schnabel, J.A., Evaluating investment in inventory policy: a net preset value framework, *The Engineering Economist*, 35 (1990), 239-246.

Samuelson, P., and Nordhaus, W., *Economía*, Mc Graw- Hill, México (1990).

Sapag Chain, N., *Evaluación de proyectos de inversión en la empresa*, Prentice Hall, 2001.

Shull, D.M., Efficient capital project selection through a yield-based capital budgeting technique, *The Engineering Economist*, 38 (1992), 1-18.

Stanford, R.E., Optimizing profits from a system of accounts receivable, *Management Science*, 35 (1989), 1227-1235.

Suarez Suarez, A.S., *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa*, Ediciones Pirámide, Madrid (1991).

Tang, S.L., and Tang, H.J., The variable financial indicador IRR and the constant economic indicador NPV, *The Engineering Economist*, 48 (2003), 69-78.

Tarzia, D.A., *Curso de nivelación de Matemática*, Mc Graw- Hill, Santiago de Chile (2000).

Tarzia, D.A., El punto muerto financiero de un proyecto de inversión simple en función de la tasa de descuento con un análisis de sensibilidad, *Jornadas SADAF 2007*, 27 (2007), 421-440. Ver también: *El punto muerto financiero de un proyecto de inversión en función de la tasa de descuento,* Tesis de Maestría en Finanzas, Univ. Nacional de Rosario, Rosario, 2010.

Tarzia, D.A., El punto muerto financiero de un proyecto de inversión en crecimiento en función de la tasa de descuento, in *9th International Finance Conference*, *Jornadas SADAF*, 29 (2009), 237-255.

Tarzia, D.A., El VAN de un proyecto de inversión con una ecuación de demanda lineal y sus dos puntos muertos financieros, *Jornadas SADAF 2010*, 30 (2010), 296-308.

Vanhoucke, M., Demeulemeester, E. and Herroelen, W., On maximizing the net present value of a project under renewablee resource constraints, *Management Science*, 47 (2001), 1113-1121.

Villalobos, J.L., *Matemáticas financieras*, Prentice Hall, 2ª Ed., México, 2001.

Zhang, D., A different perspective in using multiple internal rates of return: the IRR parity technique, *The Engineering Economist*, 50 (2005), 327-335.

@RISK, *Software: The Decision Tools Suite*, Palisade. See www.Palisade.com.