

# **EMPLEO DE REJILLAS BINOMIALES PARA LA APLICACIÓN DE OPCIONES REALES**

## **Análisis de un caso**

**Gastón Milanesi**  
**Sofía Martino**  
**Ignacio Vicente**

*Universidad Nacional del Sur*

*SUMARIO: 1. Introducción; 2. Las rejillas como vehículo para diagramar la volatilidad; 3. El proceso de valuación a través del mecanismo de opciones; 4. Conclusiones.*

Para comentarios: milanesi@uns.edu.ar

### **1. Introducción:**

Uno de los métodos de valuación de activos reales de mayor difusión y uso, destinado a cuantificar el valor intrínseco de la inversión, es el descuento de flujos de fondos (*DFF*) y sus diferentes variantes<sup>1</sup>. Bajo esta metodología de valuación los beneficios y costos asociados a un proyecto son actualizados empleando una tasa ajustada por el riesgo representativo de la inversión evaluada. El valor actual de los flujos de fondos se adiciona y a posteriori se sustrae el costo de la inversión, con el objeto de determinar la contribución marginal a la riqueza de la firma y del propietario de los fondos. Sin dejar de conocer el importante uso de esta herramienta una de las principales debilidades consiste en que el método supone irreversibilidad de la inversión. La Teoría de Opciones Reales (*OR*) ofrece un complemento al *DFF*, ya que considera la variabilidad vinculada al dinamismo derivado de la ejecución y concreción de las metas y objetivos propios de la inversión.

Este trabajo forma parte del Proyecto de Investigación con acreditación externa: “*Concebir y desarrollar un manual integral de evaluación económico-financiera de proyectos de inversión en activos reales*”. El Grupo de Investigación está integrado por: Gastón Milanesi (director), Juan I. Esandi, Anahí Briozzo, Gabriela Pesce, Ignacio Vicente y Carlos Ferreira. El presente trabajo fue totalmente financiado por la Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina.

---

<sup>1</sup> Se pueden diferenciar cuatro grupos de métodos de valuación de activos reales: (a) Valores Históricos (basados en el criterio de costos y en donde se engloban los métodos contables); (b) Múltiplos y Comparables (los ratios más difundidos: Precio-Ganancia (*PER*); Valor de Mercado-Valor de Libros, *Enterprise Value*; *Q-Tobin* y demás múltiplos de acuerdo a las características de la inversión); (c) Valores Intrínsecos (Descuento de Flujos de Fondos en sus diferentes variantes; Ganancias Residuales y Valor Económico Añadido); (d) Enfoque de Opciones Reales; (Milanesi, 2009).

Las raíces del enfoque están en los trabajos de Black y Scholes (1973) y Merton (1973) para opciones financieras y en el campo de los activos reales Myers (1977) con la opción de crecimiento. A partir de estos trabajos el campo de opciones ha observado un significativo desarrollo que va desde la valuación de simples opciones (abandono, diferimiento, expansión, contracción) hasta el tratamiento de flexibilidades de mayor complejidad (intercambio de tecnología, opciones compuestas, varias fuentes de incertidumbre). Este presente enfoque se complementa con el tratamiento analítico del comportamiento correspondiente a los agentes en el contexto a través de la Teoría de Juegos<sup>2</sup>.

El propósito del trabajo consiste en desarrollar un marco operativo e instrumental para valorar la flexibilidad estratégica contenida en un proyecto de inversión. Para ello se propone trabajar con el enfoque de OR, e indicar las ventajas del uso de rejillas en lugar de árboles a partir del enfoque MAD (*Marketed Asset Disclaimer*).

## 2. Las rejillas como vehículo para diagramar la volatilidad

Las rejillas y árboles de decisión son instrumentos que permiten confeccionar e interpretar el proceso estocástico discreto de una secuencia de inversión. Ambos devengan el mismo resultado no obstante las rejillas son operativamente más sencillas de trabajar, sobre todo a medida que se incrementa el número de periodos. Smith (2005) sostiene que las rejillas binomiales, a diferencia de los árboles, son más simples computacionalmente e intuitivas. La primera, al representar el problema de manera compacta, es más simple de interpretar; ya que el árbol tiene mayor información redundante en su recorrido (repite la misma probabilidad en varios lugares y estados equivalentes son representados en varios lugares).

Para recombinar en árboles se debe identificar estados de la naturaleza (en este caso distintos valores del proyecto sin opciones) donde las futuras probabilidades y flujos se condicionan al estado actual; pero no al camino tomado para llegar a dicho estado. Las rejillas ofrecen una capacidad de recombinación compacta. De hecho si se comparan la cantidad de puntos finales y nodos entre una rejilla binomial y un árbol se tiene:

- 1) *Puntos finales rejilla binomial*: el número de puntos finales es igual al número de periodos (un proyecto con  $n=10$  sus puntos finales asciende a  $n+1=11$ , ya que se comienza contando desde 0 al ser considerado un periodo más).
- 2) *Nodos de decisión rejilla binomial*: el número total de nodos decisorios es igual a  $n(n+1)/2$  (para el caso de 10 periodos se tienen, adicionando el inicial,  $11 \cdot (11+1)/2 = 66$ )
- 3) *Puntos finales árbol binomial*: tiene un número de puntos finales igual a  $2^{n-1}$  (para el caso de 10 periodos, contando desde el inicial, se tienen  $2^{11-1} = 1024$ )

<sup>2</sup> En la literatura se pueden encontrar diferentes propuestas analíticas para el tratamiento de categorías específicas de opciones, entre ellos: (a) Opción de Diferimiento (Mc Donal y Siegel, 1986); (Paddock, Siegel y Smith, 1988); (Ingersoll y Ross, 1992); (b) Opción de Crecimiento (Myers, 1977); (Pindyck, 1988); (Trigeorgis, 1988); (Smit, 1996); (c) Opción de Abandono (Myers y Majd, 1990); (d) Opciones de expandir-contrar o extensión de la vida útil (Trigeorgis y Mason, 1987); (Kemma, 1988); (e) Opción de cierre temporario o corte del proceso productivo (Brennan y Schwartz, 1985a, 1985b); (f) Opción de intercambio (Margrabe, 1978); (Kulatilaka 1988a, 1995b); Opciones financieras de insolvencia (Mason y Merton 1985); (Trigeorgis, 1993b).

Paralelamente el enfoque de opciones reales se complementa con el análisis de decisiones incorporando tópicos como: riesgos de mercado y riesgos privados: (Smith y Nau, 1995); inexistencia completa de activos financieros replicantes y el enfoque (*MAD; Marketed Asset Disclaimer*; (Copeland y Antikarov, 2001) y (Copeland y Tuffano, 2004) y Opciones Reales y Teoría de Juegos (*RO y Games Theory*; (Trigeorgis y Smit, 2006). Asimismo los métodos de resolución en tiempo continuo implican utilizar sistemas de ecuaciones diferenciales estocásticas (Dixit y Pindyck, 1994), mientras que en tiempo discreto son empleando árboles o rejillas binomiales (Cox y Ross, 1976); (Luhman, 1998) y (Hull, 2005).

- 4) *Nodos de decisión árbol binomial*: tiene un número de nodos igual a  $2^n - 1$  (para el caso de 10 periodos, se tiene un total de  $2^{11} - 1 = 2047$ )

Claramente se puede apreciar que el empleo de rejillas es computacionalmente factible mientras que los árboles requieren algoritmos de resolución más complejos. De hecho este inconveniente de los árboles guarda directa relación con el número de periodos en consideración (ya sea por un incremento en los años o disminución de la amplitud del intervalo). Se argumenta que cuando se valúan opciones financieras los practicantes trabajan con no más de 30 intervalos, ya que una rejilla tiene 465 nodos y el árbol de decisión contiene dos mil millones de nodos  $2^{31} - 1 = 2.147.483.647$  (Hull, 2005:206)

**Generalización del planteo para rejillas binomiales. El Triángulo de Pascal.** En un esquema binomial, el valor del subyacente será una sucesión de estados buenos ( $u$ ) y malos ( $d$ ) a partir de su valor inicial ( $S_0$ ). Para dos periodos esa misma sucesión se observará en las probabilidades del estado bueno ( $q$ ) y malo ( $1-q$ ); tal que: (borde superior; 1)  $S_0 x u^2 x d^0 \Rightarrow (q^2 x 1 - q^0)$ ; (recombinación; 2)  $S_0 x u^1 * d^1 \Rightarrow (q^1 x 1 - q^1)$ ; (borde inferior; 1)  $S_0 x u^0 x d^2 \Rightarrow (q^0 * 1 - q^2) 1$  (Rotstein; Milanesi, Esandi y Briozzo; 2006) No obstante, en los estados intermedios cabe más de una posibilidad de arribar al estado final. En una rejilla, a diferencia de un árbol, es fácil advertir en estos casos más de un camino o trayectoria para arribar a estados intermedios. En un ejemplo de dos periodos existen dos formas de arribar al estado final  $S_0 x u^1 x d^1$ . Un camino sería el estado malo en el primer período seguido del estado bueno en el segundo y viceversa. Por ello, la probabilidad asociada al estado intermedio, es la suma de las probabilidades de estas dos trayectorias. Por lo tanto en el modelo de dos períodos, el estado intermedio  $S_0 x u^1 x d^1$ , le corresponde una probabilidad  $(q^1 x 1 - q^1) x 2^3$ .

En un problema con mayor número de períodos, la dificultad residiría en determinar la cantidad de veces que se repite la probabilidad; o dicho en otros términos, la cantidad de caminos o trayectorias para arribar a los estados intermedios (también llamados estados recombinantes). Una primera forma de resolver esta dificultad sería en reproducir la rejilla y contar el número de trayectoria para arribar a cada estado final. Existe una herramienta matemática que facilita dicha tarea: el triángulo de Pascal<sup>4</sup>. Para definir los valores en cada elemento que compone el triángulo se sigue la siguiente regla:

1. Los valores extremos son iguales a uno,
2. Los valores intermedios en cada columna se definen como la suma de los valores en los extremos de la columna precedente.

La cantidad de combinaciones se obtiene de la siguiente manera: En la ilustración 1 si se toma como ejemplo el cuarto período surgen cinco estados finales ( $T+1$ ), los cuales se reconocen por los cinco elementos de la columna correspondiente al cuarto período. El tercer estado del

<sup>3</sup> Cabe tener en cuenta que para la resolución del problema, en este caso se asume que resulta indistinto al decidor, el modo en que se arriba a un cierto estado final y esto puede no ser un supuesto aceptable en la práctica. De cualquier modo, si ese fuera el caso, se podría considerar cada camino como un estado independiente con su correspondiente probabilidad y a partir de esta definición, llegar a la solución con el mismo procedimiento. Esta situación refleja la gran flexibilidad de las rejillas para adaptar la formulación del problema a distintos contextos.

<sup>4</sup> El Triángulo de Pascal o Tartaglia. Se tienen referencias que datan del siglo XII en China. De hecho, algunas de sus propiedades ya fueron estudiadas por el matemático chino Yang Hui (siglo XIII), así como el poeta persa Omar Khayyam (siglo XII). Asociar el nombre del triángulo al filósofo y matemático Blas (Blaisé) Pascal (1623-1662) se debe a que el francés escribió el primer tratado sobre el triángulo. El matemático italiano Niccolo Fontana Tartaglia (1500-1557) fue uno de los primeros que publicó y difundió en Europa de la Edad Moderna la herramienta matemática en cuestión.

gráfico refleja las seis trayectorias que arriban a ese nodo. Dicho valor surge de sumar los valores indicados en la tabla, correspondiente a la columna anterior; o sea  $(3 + 3 = 6)$ .

Los números del triángulo de Pascal coinciden con los números combinatorios. El número combinatorio  $C_n^m$  se encuentra en el triángulo en la fila  $n+1$ , en el lugar  $m+1$ . A la fórmula de los números combinatorios se le puede dar el carácter de fórmula general del triángulo para saber, sin necesidad de construir todas las filas anteriores, cuál es el número que ocupa un lugar determinado,

$$\text{Ec 1} \quad C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

**Cuadro1. Triángulo de Pascal**

Periodos	0	1	2	3	4	5	6
						1	1
					1	5	6
			1	4	10	15	
<b>Fila Binomial</b>		1	3	6	10	20	
	1	2	3	4	10	15	
		1	1	4	5	6	
				1	1	1	
Estados recombinantes	2	4	8	16	32	64	
Estados finales	2	3	4	5	6	7	

Con el recurso del triángulo de Pascal se puede retornar al intento de generalizar el planteo. La ilustración 2 ejemplifica los diversos estados de una rejilla binomial para una opción de tres intervalos de tiempo.

**Cuadro 2. Rejilla con proceso estocástico binomial**

Cantidad de periodos	0	1	2	3
			$1(q^2 - q)$	$1(q^3 - q)$
		$1(q^2 - q)$	$2(q^2 - q)$	$3(q^2 - q)$
<b>Grilla con proceso estocástico binomial</b>	$1(q^2 - q)$	$1(q^2 - q)$	$1(q^2 - q)$	$1(q^2 - q)$
			$1(q^2 - q)$	$1(q^2 - q)$
Estados Finales	1	2	3	4
Estados Recombinantes	1	2	4	8

La forma general que corresponde a cada elemento de la rejilla precedente está representada por la siguiente expresión

$$\text{Ec 2} \quad C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!} \times [q^m \times (1-q)^{n-m}]$$

En este caso  $n$  son los períodos y  $m$  los movimientos ascendentes. El primer término del producto, representa nuevamente la cantidad de trayectorias para arribar a cada estado intermedio (elemento del triángulo de Pascal).

Suponiendo que la opción sólo se ejerce en el período final (opción europea) y que su precio de ejercicio es representado por  $X$ ; el valor actual de la opción  $OR_0$  es igual al valor actual del valor esperado de los valores intrínsecos ( $VA [VE(VI(S_T))]$ ). La forma general de la ecuación de valoración de opciones es;

$$\text{Ec 3} \quad OR_0 = e^{-rf(\delta t)T} \times \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{n!}{m!(n-m)!} \times [q^m \times (1-q)^{n-m}] \times \text{Max}[S_0 \times u^m \times d^{n-m}; X] \right\}$$

### 3. El proceso de valuación a través del mecanismo de opciones

Con el objeto de ilustrar el uso de rejillas binomiales y el enfoque MAD se utilizara el caso planteado por Brandao (2005) con árboles de decisión, modificando el valor y comportamiento de la variables precios y costos. En este se pretende determinar el valor para el inversor privado, relativo a la concesión y explotación de un yacimiento de petróleo bajo la forma jurídica de consorcio con el sector público. La participación privada representa el setenta y cinco por ciento (75%) de la inversión, el saldo restante representa la propiedad estatal. Las reservas totales se estiman en noventa y nueve millones (99 millones) de barriles; previéndose una extracción inicial de nueve millones (9 millones) de barriles. La duración nominal del contrato de concesión es de 10 años. Adicionalmente se espera:

- Decrecimiento de la producción a razón de una tasa anual del 15%,
- Crecimiento del precio del crudo a razón de un 3% anual,
- Crecimiento de costos de explotación a razón del 2% anual,
- Costos fijos estables (no hay cambio de estructura).

Para la proyección inicial, estimación de flujos de fondos y determinación del valor presente estático del proyecto se tienen los siguientes valores:

- Precio del crudo por barril sesenta y cinco dólares (u\$ 65); costos de producción cincuenta dólares (u\$ 50);
- Costos fijos cinco millones de dólares anuales (u\$ 5 millones),
- Amortización inversión fija 10 años (u\$ 300 millones /10 años).
- No se toma deuda,

La estimación de la tasa de actualización ajustada por riesgo emplea los siguientes insumos:

- Tipo sin riesgo se supone del cinco por ciento anual (5%); rendimiento de mercado 10,33%;
- A los efectos de estimar la tasa de actualización se supone tasa ajustada por riesgo mediante el clásico modelo CAPM. Al ser una firma cerrada se estima el coeficiente beta por comparables. Para ello los datos adicionales son los siguiente: PER (Price-Earnings Ratio) empresa comparable 5; Beta apalancado empresa comparable 1,5; estructura de capital empresa comparable (B/E) =1. A continuación se plantean las ecuaciones empleadas;

$$\text{Ec 4} \quad E(r_i) = r_f + [E(r_m) - r_f] \beta_i$$

En la ecuación anterior se plantea la clásica estructura correspondiente al modelo CAPM para la estimación de la tasa de actualización. Las ecuaciones empleadas para ajustar la incidencia de la estructura de capital e los efectos de estimar el coeficiente beta correspondiente son las siguientes;

$$\text{Ec 5} \quad \beta_u = \frac{\beta_l}{1 + (1 - T) \frac{W_d}{W_e}}$$

$$\text{Ec 6} \quad \beta_l = \beta_u \left[ 1 + (1 - T) \frac{W_d}{W_e} \right]$$

En el cuadro 3 se presentan las variables utilizadas para estimar la tasa de actualización.

**Cuadro 3. Variables para estimar la tasa ajustada por riesgo**

Tasa ajustada por riesgo	10%
Tasa libre de riesgo	5%
Deuda (W <sub>d</sub> )	0%
Capital propio (W <sub>e</sub> )	100%
Tasa de impuesto	35%
Costo de la deuda K <sub>d</sub>	5%
β deuda	0
β apalancado observado comparable	1,5
Estructura de capital empresa comparable (W <sub>d</sub> /W <sub>e</sub> )	1
β no apalancado	0,90909091
β apalancado firma	0,90909091
Rendimiento esperado de mercado	10,50%

El valor presente neto es estimado empleando la siguiente ecuación. Al flujo de fondos actual ( $FCF_0$ ) se le adiciona el valor actual de los flujos de fondos esperados ( $FCF_t$ ) actualizados por la tasa ajustada por riesgo ( $E(r_t)$ )

$$\text{Ec 7} \quad NPV = \sum_{t=1}^n FCF_t (1 + E(r_t))^{-t} + FCF_0$$

**Cuadro 4. Flujos de Fondos, Valor Actual y Ratio Flujos de Fondos sobre Valor Actual**

DEBE/HA POR FLUJO DE FONDOS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reservas de petróleo (millones)	9900	90,00	81,00	73,35	66,85	61,32	56,82	52,33	48,23	43,35	43,90
Nivel de producción (millones)	900	9,00	7,65	6,50	5,53	4,70	3,99	3,39	2,89	2,45	2,08
Tasa de costo variable operativo (millones)	\$ 50,00	\$ 51,00	\$ 52,02	\$ 53,06	\$ 54,12	\$ 55,20	\$ 56,31	\$ 57,43	\$ 58,58	\$ 59,75	\$ 60,95
Precio de crudo (por barril)	\$ 65,00	\$ 66,95	\$ 68,98	\$ 71,03	\$ 73,18	\$ 75,35	\$ 77,61	\$ 79,94	\$ 82,34	\$ 84,81	\$ 87,35
Ingresos por ventas (millones)		\$ 602,55	\$ 527,53	\$ 461,85	\$ 404,35	\$ 354,01	\$ 309,94	\$ 271,35	\$ 237,57	\$ 207,99	\$ 182,10
Costos de producción (millones)		\$ -469,00	\$ -387,95	\$ -345,03	\$ -299,14	\$ -259,35	\$ -224,85	\$ -194,95	\$ -169,02	\$ -146,54	\$ -127,05
Costo Fijo (millones)		\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00	\$ -5,00
Flujo de fondos después de impuestos (millones)		\$ 138,55	\$ 124,58	\$ 111,83	\$ 100,22	\$ 89,66	\$ 80,08	\$ 71,40	\$ 63,54	\$ 56,45	\$ 50,04
Participación minoritaria (millones)		\$ -34,84	\$ -31,14	\$ -27,98	\$ -25,05	\$ -22,42	\$ -20,02	\$ -17,85	\$ -15,89	\$ -14,11	\$ -12,51
Flujo de fondos netos (millones)	\$ -	\$ 103,91	\$ 93,43	\$ 83,87	\$ 75,16	\$ 67,25	\$ 60,06	\$ 53,55	\$ 47,65	\$ 42,34	\$ 37,53
NPV Flujo de fondos (millones)	\$ 443,83	\$ 469,21	\$ 422,73	\$ 362,22	\$ 306,19	\$ 254,13	\$ 205,57	\$ 160,05	\$ 117,16	\$ 76,45	\$ 37,53
Flujo de Fondos NPV	0,00%	21,28%	22,10%	23,15%	24,55%	26,45%	28,22%	33,48%	40,68%	55,37%	100,00%

En el cuadro por cada año se estima el flujo de fondos neto, el valor actual para cada periodo correspondiente al flujo de fondos producto de aplicar la ecuación 7. Adicionalmente se estima el ratio que representan el flujo de fondos del periodo sobre el valor actual del proyecto.

Las opciones contenidas en el contrato se pueden ejercitar en el quinto año de vigencia de la concesión. Contractualmente se permite continuar, abandonar o expandir:

- Continuar la explotación hasta el décimo año sin variación alguna (Continuar).
- Vender la explotación con valor fijado en cien millones de dólares (u\$100 millones) (Abandono)
- Comprar participación estatal con un costo de cuarenta millones de dólares (u\$ 40 millones) y un incremento de 1,33 de los ingresos (4/3) (Expandir)

**Cuadro 5. Opciones disponibles en el año 5**

Opciones disponibles (t=5)		
1: Comprar participación socios (25%)	\$ -40,00	1,33
2 Desinvertir (abandonar)		\$ 100,00
3: Continuar	\$ -	\$ -

Finalmente se supone que las fuentes de incertidumbre provenientes del comportamiento de costos operativos y precio del petróleo siguen un proceso GBM (*geometric brownian motion*).

**Paso 1: Identificación de las variables relevantes:** Los inputs necesarios para aplicar el modelo son los siguientes:

*Intervalo de tiempo ( $\Delta t$ ):* Para el proyecto bajo análisis se consideran 10 periodos de un año cada uno, o sea que 1.

*Valor del activo Subyacente ( $V$ ):* Copeland & Antikarov (2001) proponen el enfoque MAD para proyectos que no tienen activo financiero réplica. Se supone que el mercado financiero es completo y que el valor del activo réplica del proyecto es representado por el valor actual neto estimado a partir de la proyección de sus flujos de fondos sin flexibilidad, actualizados por tasa que refleje el riesgo de inversiones equivalentes al objetivo de valuación. En el caso de estudio el valor del subyacente  $V_0$  asciende a cuatrocientos cuatro c/5/100 millones (\$443,83 millones).

*Volatilidad de los rendimientos del proyecto ( $\sigma$ ):* El proceso estocástico que sigue el activo subyacente (bajo este enfoque el valor actual del proyecto) se supone que es del tipo GBM y consecuentemente distribución normal de los rendimientos. En este caso la volatilidad es estimada aplicando la técnica de simulación discreta del rendimiento del proyecto en el periodo 1. Para ello se calcula el logaritmo del cociente entre el valor actual neto del proyecto en el momento 1 y el momento inicial (0). La ecuación empleada es la siguiente,

$$\text{Ec 8} \quad Z = \text{Ln} \left( \frac{VAN_1}{VAN_0} - 1 \right)$$

Se utilizó el aplicativo Crystal Ball ®, donde se plantearon 10.000 iteraciones y distribución normal. La simulación arrojó un valor de  $\sigma$  igual a cuarenta y seis por ciento (46,6%). Una de las principales debilidades de este enfoque reside en que la volatilidad se supone constante durante la vida del proyecto.

Coefficientes de ascenso ( $u$ ) y descenso ( $d$ ): Se supone que los movimientos de ascenso ( $u$ ) y descenso ( $d$ ) siguen un proceso estocástico GBM, con distribución de probabilidad log normal empleando la transformación para la estimación de los parámetros (Cox, Ross y Rubinstein, 1979);

$$\text{Ec 9} \quad u = e^{\sigma_i}$$

$$\text{Ec 10} \quad d = e^{-\sigma_i} = 1/u$$

Para las fuentes de incertidumbre las probabilidades neutrales al riesgo  $p$  y  $1-p$  se estiman con los  $u$ ,  $d$  y  $r$  (tipo sin riesgo); correspondientes a cada una de ellas, e

$$\text{Ec 11} \quad p = \frac{(1+r_t) - d}{u - d}$$

### Cuadro 6. Parámetros

*VAN (Valor actual neto del proyecto);  $\sigma$  (volatilidad de los rendimientos estimadas con simulación discreta del logaritmo del rendimiento);  $\Delta t$  (intervalo de tiempo),  $r$  (tipo sin riesgo),  $u$  (coeficiente de ascenso),  $d$  (coeficiente de descenso);  $p$  (probabilidad neutral al riesgo),  $1-p$  (complemento)*

Parámetros			
<b>VAN (V0)</b>	<b>\$ 443,83</b>	<b>u=</b>	<b>1,594</b>
<b><math>\sigma</math></b>	<b>46,60%</b>	<b>d=</b>	<b>0,628</b>
<b><math>\Delta t</math></b>	<b>1</b>	<b><math>\Delta t</math>=</b>	<b>5,00%</b>
<b>r</b>	<b>5,00%</b>	<b>p=</b>	<b>0,437</b>
		<b>1-p=</b>	<b>0,563</b>

**Paso 2: Planteo de la rejilla binomial:** Esta etapa comprende la construcción de una rejilla en tiempo discreto que aproxima el proceso GBM correspondiente al valor del activo subyacente mediante una distribución binomial. La primera rejilla corresponde al valor del subyacente; para ello se parte del valor actual inicial ( $V_0$ ) y a cada nodo se le aplica los correspondientes coeficientes de ascenso y descenso (ecuaciones 9 y 10) a saber;

En la ilustración se expande el proceso estocástico que sigue el valor del subyacente. Este presenta dos direcciones:

- Hacia adelante; donde el valor para cada nodo se estima aplicando la siguiente ecuación:

$$\text{Ec 12} \quad V_t(i, j) = [V_{t-1}(u_t) \times (1 - FCF_t)] ; [V_{t-1}(d_t) \times (1 - FCF_t)]$$

Para cada instante de tiempo ( $i$ ) y para cada nodo ( $j$ ) se presentan las diferentes combinaciones ascendentes ( $u$ ) y descendentes ( $d$ ). Del valor intrínseco total se ajusta el valor cierto del flujo de fondos correspondiente a cada periodo ( $FCF_t$ ).

- Hacia atrás; con el objeto de controlar la equivalencia de resultados la ecuación 12 es igualada con la siguiente ecuación;

$$\text{Ec 13} \quad V_t(i, j) = FCF_t + \left( \frac{1}{1+r_f} \right) \times [V_{t+1}(u_{t+1})p + V_{t+1}(d_t)1-p]$$



Cuadro 7. Rejilla binomial proceso estocástico del valor del proyecto

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
										OK
									OK	\$ 1,528,55
								OK	\$ 2,149,32	OK
							OK	\$ 2,143,89	OK	\$ 601,90
						OK	\$ 1,900,59	OK	\$ 885,23	OK
					OK	\$ 1,621,78	OK	\$ 844,19	OK	\$ 237,01
			OK	\$ 1,348,77	OK	\$ 748,39	OK	\$ 362,51	OK	\$ 93,32
		OK	\$ 1,101,39	OK	\$ 638,60	OK	\$ 332,41	OK	\$ 131,22	OK
	OK	\$ 887,23	OK	\$ 531,10	OK	\$ 294,69	OK	\$ 138,81	OK	\$ 36,75
\$ 443,83	OK	\$ 707,29	OK	\$ 433,69	OK	\$ 251,46	OK	\$ 130,89	OK	\$ 51,67
	\$ 278,51	OK	\$ 349,36	OK	\$ 209,13	OK	\$ 118,04	OK	\$ 54,68	OK
		\$ 137,57	OK	\$ 170,77	OK	\$ 99,02	OK	\$ 51,54	OK	\$ 20,35
			\$ 67,24	OK	\$ 82,35	OK	\$ 46,69	OK	\$ 21,52	OK
				\$ 32,43	OK	\$ 38,99	OK	\$ 20,30	OK	\$ 8,01
					\$ 15,35	OK	\$ 7,99	OK	\$ 3,15	OK
						\$ 7,08	OK	\$ 3,34	OK	\$ 0,88
							\$ 3,15	OK	\$ 1,24	OK
								\$ 1,31	OK	\$ 0,35
									\$ 0,48	OK
										\$ 0,14

En este el valor para cada nodo es igual al flujo de fondos correspondiente al periodo más el valor actual del valor del nodo de ascenso  $V_{t+1}(u_{t+1})$  y descenso  $V_{t+1}(d_t)$  del periodo siguiente ajustado por el equivalente cierto y su complemento  $(p, 1-p)^5$ . Un dato adicional que se requiere para estimar el valor del subyacente es el desarrollo del proceso estocástico de los flujos de fondos. Primero se debe estimar el ratio flujo de fondos a valor actual de cada periodo

$$\bar{R}_t = \frac{FCF_t}{NPV_t} \text{ dando una serie,}$$

Cuadro 8. Ratios flujo de fondos a valor actual neto

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,000	0,213	0,221	0,232	0,245	0,265	0,292	0,335	0,407	0,554	1,000

Para estimar el flujo de cada nodo se aplica la ecuación 14 donde el flujo es producto del ratio por el valor actual en ascenso y descenso respectivamente<sup>6</sup>

$$\text{Ec 14} \quad FCF_t(i, j) = \bar{R}_t \times V_t(u_t, t); \bar{R}_t \times V_t(d_t, t)$$

<sup>5</sup> La función lógica empleada en la planilla de cálculo Microsoft Excel ® es la siguiente:

=SI((J\$69\*J88+(K87\*\$D\$64+K89\*\$D\$65)\*(1/(1+\$D\$63)))=J88;"OK";"ERROR") En este caso J69 representa el ratio de flujos de fondos a valor actual neto del nodo; J88 es el valor actual neto del nodo obtenido mediante la ecuación 12; K87 y K89 representan el valor actual para el ascenso y descenso del periodo inmediato siguiente, D64 y D65 representan el equivalente cierto y su complemento y D63 el tipo sin riesgo.

<sup>6</sup> La ecuación 12 no genera referencia circular con la ecuación 14 debido a que el ratio de flujo de fondos a valor actual neto es estimado con antelación al planteo de la rejilla, conforme surge del cuadro 2.

Cuadro 9. Rejilla correspondiente al flujo de fondos

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
										\$ 152856
									\$ 119014	
								\$ 924,79		\$ 601,90
						\$ 555,28		\$ 364,15		\$ 237,01
					\$ 429,14		\$ 282,43		\$ 184,53	\$ 93,32
			\$ 255,03		\$ 168,98		\$ 111,21		\$ 72,66	
		\$ 196,10		\$ 130,37		\$ 86,10		\$ 56,46		\$ 36,75
	\$ 160,54		\$ 100,42		\$ 66,54		\$ 43,79		\$ 28,61	
\$ -		\$ 77,22		\$ 51,34		\$ 33,90		\$ 22,23		\$ 14,47
	\$ 59,28		\$ 39,54		\$ 26,20		\$ 17,24		\$ 11,27	
		\$ 30,41		\$ 20,21		\$ 13,35		\$ 8,75		\$ 5,70
			\$ 15,57		\$ 10,32		\$ 6,79		\$ 4,44	
				\$ 7,96		\$ 5,26		\$ 3,45		\$ 2,24
					\$ 4,06		\$ 2,67		\$ 1,75	
						\$ 2,07		\$ 1,36		\$ 0,88
							\$ 1,05		\$ 0,69	
								\$ 0,53		\$ 0,35
									\$ 0,27	
										\$ 0,14

**Paso 3: determinación de las opciones reales:** En esta fase se debe estimar el valor de las opciones contenidas en el proyecto. En este caso son ejercidas en el periodo 5 y se presenta la posibilidad de continuar, abandonar (mediante la venta) o expandir (adquiriendo la parte de capital estatal). La elección óptima descansa en estimar el mayor valor de las opciones contenidas. Para ello, en el quinto año se emplea la siguiente ecuación:

Ec 15

$$V_t(i, j) = \text{MAX} \left\{ FCF_t + \left( \frac{1}{1+r_f} \right) \times [V_{t+1}(u_{t+1})p + V_{t+1}(d_t)1-p]; \right. \\ \left. ; FCF_t + FFOp + \left( \frac{1}{1+r_f} \right) \times [V_{t+1}(u_{t+1})p + V_{t+1}(d_t)1-p] \right\}$$

La ecuación anterior estima el máximo valor entre:

- El valor sin opciones:  $FCF_t + \left( \frac{1}{1+r_f} \right) \times [V_{t+1}(u_{t+1})p + V_{t+1}(d_t)1-p]$
- El valor con opciones:  $FCF_t + FFOp + \left( \frac{1}{1+r_f} \right) \times [V_{t+1}(u_{t+1})p + V_{t+1}(d_t)1-p]$

Donde  $FFOp$  representa el flujo derivado de las opciones. Este valor se descompone de la siguiente manera:

- Continuar:  $FCF_t + \left( \frac{1}{1+r_f} \right) \times [V_{t+1}(u_{t+1})p + V_{t+1}(d_t)1-p]$

$$\text{b. Expandir: } FCF_t - Inv_t + \left( \frac{1}{1+r_f} \right) \times \left( \frac{4}{3} \right) \times [V_{t+1}(u_{t+1})p + V_{t+1}(d_t)1-p]$$

$$\text{c. Abandonar: } FCF_t + V$$

La expresión expandida es la siguiente<sup>7</sup>:

Ec 16

$$V_t(i, j) = \text{MAX} \left\{ FCF_t + \left( \frac{1}{1+r_f} \right) \times [V_{t+1}(u_{t+1})p + V_{t+1}(d_t)1-p]; FCF_t - Inv_t + \left( \frac{1}{1+r_f} \right) \times \left( \frac{4}{3} \right) \times [V_{t+1}(u_{t+1})p + V_{t+1}(d_t)1-p]; FCF_t + V_t \right\}$$

**Cuadro 10. Rejilla con opciones**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
										\$ 1.528,56
									\$ 2.149,32	\$ 1.528,56
								\$ 2.273,51	\$ 2.149,32	\$ 601,90
							\$ 2.143,89	\$ 2.273,51	\$ 846,33	\$ 601,90
						\$ 1.900,59	\$ 2.143,89	\$ 895,23	\$ 846,33	\$ 237,01
					\$ 1.979,32	\$ 1.900,59	\$ 844,19	\$ 895,23	\$ 333,26	\$ 237,01
			\$ 1.560,14	\$ 1.621,78	\$ 748,39	\$ 844,19	\$ 362,51	\$ 333,26	\$ 93,32	
		\$ 1.221,65	\$ 1.348,77	\$ 755,14	\$ 748,39	\$ 332,41	\$ 362,51	\$ 131,22	\$ 93,32	
	\$ 967,51	\$ 1.101,39	\$ 591,23	\$ 638,60	\$ 294,69	\$ 332,41	\$ 138,81	\$ 131,22	\$ 36,75	
	\$ 755,41	\$ 887,23	\$ 471,37	\$ 531,10	\$ 273,10	\$ 294,69	\$ 130,89	\$ 138,81	\$ 51,67	\$ 36,75
\$ 485,62	\$ 707,29	\$ 384,55	\$ 433,69	\$ 232,71	\$ 251,46	\$ 116,04	\$ 130,89	\$ 54,66	\$ 51,67	\$ 14,47
\$ 443,83	\$ 319,09	\$ 349,36	\$ 207,14	\$ 209,13	\$ 126,20	\$ 116,04	\$ 51,54	\$ 54,66	\$ 20,35	\$ 14,47
	\$ 278,51	\$ 185,96	\$ 170,77	\$ 131,89	\$ 99,02	\$ 45,69	\$ 51,54	\$ 21,52	\$ 20,35	\$ 5,70
		\$ 137,57	\$ 123,28	\$ 82,35	\$ 110,32	\$ 45,69	\$ 20,30	\$ 21,52	\$ 8,01	\$ 5,70
			\$ 67,24	\$ 103,67	\$ 38,99	\$ 17,99	\$ 20,30	\$ 8,47	\$ 8,01	\$ 2,24
				\$ 32,43	\$ 104,06	\$ 17,99	\$ 7,99	\$ 8,47	\$ 3,15	\$ 2,24
					\$ 15,36	\$ 7,08	\$ 7,99	\$ 3,34	\$ 3,15	\$ 0,88
						\$ 7,08	\$ 3,15	\$ 3,34	\$ 1,24	\$ 0,88
							\$ 3,15	\$ 1,31	\$ 1,24	\$ 0,35
								\$ 1,31	\$ 0,49	\$ 0,35
									\$ 0,49	\$ 0,14
										\$ 0,14

En el cuadro anterior se presenta la rejilla correspondiente al valor con opciones (en la parte superior de cada nodo) y el valor sin opciones (en la parte inferior). En el periodo 5 se presenta el máximo valor para cada nodo en un recuadro. El procedimiento aplicado es la inducción recursiva, la diferencia entre el valor con opciones y sin opciones se presenta desde el periodo 5. Este resume por cada nodo los valores esperados desde el periodo 6 al 10. Conforme se expreso en la ecuación 15 el valor sin opciones en el periodo 5, que integra los valores probables del

<sup>7</sup> La función de Microsoft Excel ® empleada es la siguiente

=MAX((J102+(K123\*\$D\$64+K125\*\$D\$65)\*(1/(1+\$B\$64)));(J102+H\$61+(I\$61\*(K123\*\$D\$64+K125\*\$D\$65)\*(1/(1+\$B\$64))));(J102+I\$62)).

En este caso se tiene: continuar: J102+(K123\*\$D\$64+K125\*\$D\$65)\*(1/(1+\$B\$64); expandir: ));(J102+H\$61+(I\$61\*(K123\*\$D\$64+K125\*\$D\$65)\*(1/(1+\$B\$64)) y vender: (J102+I\$62)).

periodo 6 al 10 está dado por la expresión  $FCF_t + \left( \frac{1}{1+r_f} \right) \times [V_{t+1}(u_{t+1})p + V_{t+1}(d_t)(1-p)]$ . El valor de la opción (continuar, expandir o abandonar) es el correspondiente a  $FFOp_5$ . Se presenta para cada nodo del quinto periodo la decisión óptima producto de la maximización de valor;

**Cuadro 11. Decisiones y valores para cada nodo del quinto periodo**

5* u	\$ 1.979,32	<b>Expandir</b>
	\$ 529,14	Abandonar
	\$ 1.621,78	Continuar
4* u+1* d 1* d+4* u	\$ 755,14	<b>Expandir</b>
	\$ 268,98	Abandonar
	\$ 638,60	Continuar
3* u+2* d 2* d+3u	\$ 273,10	<b>Expandir</b>
	\$ 166,54	Abandonar
	\$ 251,46	Continuar
3* d+2* u 2* u+3* d	\$ 83,29	Expandir
	\$ 126,20	<b>Abandonar</b>
	\$ 99,02	Continuar
1* u+4* d 4* d+1* u	\$ 8,55	Expandir
	\$ 110,32	<b>Abandonar</b>
	\$ 38,99	Continuar
5* d	\$ -20,88	Expandir
	\$ 104,06	<b>Abandonar</b>
	\$ 15,35	Continuar

**Cuadro 12. Decisiones vinculadas a nodos de las rejillas**

0	1	2	3	4	5
					expandir
				expandir	
			expandir		expandir
		expandir		expandir	
	expandir		expandir		expandir
expandir		expandir		expandir	
	abandonar		abandonar		abandonar
		abandonar		abandonar	
			abandonar		abandonar
				abandonar	
					abandonar

Si se esperan 5 escenarios favorables ( $u$ ) la alternativa a seleccionar es expandir; si los escenarios esperados son 4 ascensos ( $u$ ) seguido por un descenso ( $d$ ) en el valor del proyecto o la inversa, nuevamente se debe expandir. Si los escenarios previstos son 3 escenarios favorables ( $u$ ) y dos desfavorables ( $d$ ) o la inversa se debe en el primer caso expandir, en el segundo abandonar. Esto depende del peso específico de cada escenario. Finalmente para cuatro escenarios desfavorables y uno favorable o todos desfavorables la opción maximizadora de valor consiste en el abandono y venta de la inversión. En cada nodo las decisiones quedan expresadas de la siguiente manera:

Finalmente el valor de las opciones contenidas en la inversión se determina por diferencia entre el valor total menos el valor tradicional;  $VAN_{ex} = VAN + OR$  para el caso bajo análisis es de \$41,79 millones. Surge de la diferencia entre el valor expandido \$485,62 millones menos \$443,83 millones derivados del valor actual tradicional.

#### 4. Conclusiones

En el trabajo se pueden apreciar las ventajas computacionales de las rejillas respecto de los árboles. Adicionalmente el enfoque MAD es un atajo interesante para capturar la flexibilidad estratégica de un proyecto sin activo réplica. El proceso se ve considerablemente simplificado si el proceso estocástico supuesto es el GBM. No obstante valen las siguientes advertencias:

El árbol presenta estructuras menos compactas pero más detalladas para identificar estados futuros. A partir de los valores del proyecto sin opciones, mediante la aplicación de las probabilidades futuras, se obtienen los flujos de caja que dependen del estado actual pudiendo observarse el camino que siguen para llegar a un estado futuro.

El enfoque *marketed asset disclaimer* supone que los mercados financieros son completos, esa es la razón por la cual el valor del proyecto determinado a partir de la actualización de los flujos de fondos futuros se supone equivalente al valor de negociación del activo, y consecuentemente al valor que *debería* tener el activo réplica.

El proceso estocástico supuesto es el geométrico browniano basado en la distribución normal de probabilidad. En intervalos discretos la distribución apropiada es la binomial. No obstante debe estudiarse y aplicarse el proceso estocástico correspondiente a las variables aleatorias del proyecto en cuestión. A su vez se supone un comportamiento constante de la volatilidad a través del tiempo.

#### REFERENCIAS

- AMRAM, M & KULATILAKA, N: “*Real Options*” Harvard Business School Press, Boston, 1998.
- BLACK, F & SCHOLES, M (1973): “*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*” *Journal of Political Economics*, 81 pp 637-654
- BRANDAO L, DYER J & HAHN W (2005): “*Using Binomial Decision Trees to Solve Real-Option Valuation Problems*” *Journal of Decision Analysis*, 2, pp 69-88.
- BRENNAN, M & SCHWARTZ, E (1985): “*Evaluating Natural Resources Investment*” *Journal of Business*, 58, pp 135-157
- BRENNAN, M & SCHWARTZ, E (1985): “*A New Approach to Evaluating Natural Resources Investment*” *Midland Corporate Financial Journal* 3, pp 37-47.
- BRENNAN, Michael & TRIGEORGIS, L (2000): “*Project flexibility, agency and competition: new developments in the theory and application of real options*” Oxford University Press, Nueva York,
- COPELAND, T & ANTIRANIKOV, V; (2001): “*Real Options*” Texere LLC, New York.
- COPELAND, T. & KEENAN, P (1998): “*How much is flexibility worth?*” *The Mc Kinsey Quarterly* Number 2.
- COPELAND, T. & KEENAN, P (1998): “*Making Real Options Real*”. *The Mc Kinsey Quarterly* Number 3.
- COPELAND, T & TUFANO, P; (2004): “*A real World to Manage Real Options*” *Harvard Business Review*; 82; pp 90-99
- COPELAND, T.; KOLLER, T & MURRIN, J (2000): “*Valuation: measuring and managing the value of companies*” Wiley, New York, 3° edición.
- COX, J & ROSS, S; (1976) “*The Valuation of Options for Alternative Stochastic Process*” *Journal of Financial Economics*; 3; pp 145-166
- DAMODARAN, A (2002): “*Investment valuation*” John Wiley & Sons Inc NY, 2ª edición.
- DIXIT, A & PINDYCK, R (1994): “*Investment Under Uncertainty*” Princeton University Press,

- HARRISON, J & KREPS, D (1979): "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets" Journal of Economics Theory, 20, pp 381-408.
- HIRSHLEIFER, J & RILEY, J (1995): "The Analytics of Uncertainty and Information" Cambridge Surveys of Economics Literature, Cambridge Press, NY, 4° edición.
- HULL, J (2005): "Options, Futures and Others Derivatives" Prentice Hall.
- INGERSOLL, J & ROSS, S (1992): "Waiting to Invest: Investment and Uncertainty" Journal of Business, 65, pp 1-29
- KEENEY, R & RAIFFA, H; (1976): "Decisions with Multiple Objectives: Preference and Value Trade-off"; John Wiley & Sons 1976.
- KEMMA, A (1988): "Options in Real and Financial Markets" WP. Ph.D diss, Erasmus University.
- KULATILAKA, N (1988): "Valuing the Flexibility of Flexible Manufacturing Systems" IEEE Transactions in Engineering Management 22 pp 250-257.
- KULATILAKA, N (1995): "Operating Flexibilities in Capital Budgeting: Substitutability and Complementarity in Real Options" Real Options in Capital Investment: Models, Strategies and Applications, Westport, Praeger.
- KULATILAKA, N& MARCUS, A. (1992): "Project Valuation under uncertainty. When does DCF fail?" Journal of Applied Corporate Finance 5, Nro 3.
- LUHERMAN T (1998): "Investment opportunities as real options: Get starting with the numbers" Harvard Business Review, 4, pp 51-67.
- LUHERMAN, T (1998): "Investment Science"; Oxford University Press; New York.
- MARGRABE, W (1978): "The Value of an Option to Exchange one Asset for Another" Journal of Finance 33, pp 177-186
- MASON, S & MERTON, R (1985): "The Role of Contingent Claims Analysis in Corporate Finance" Recent Advances in Corporate Finance, Homewood Irwin
- MC DONAL, R & SIEGEL, J (1986): "Investment and the Valuation of Firms When There is an Option to Shut Down" International Economic Review, 26 pp 321-349
- MERTON, R (1973): "The Theory of Rational Option Pricing" Bell Journal of Economics and Management Science, pp 141-183
- MILANESI, G (2009): "Administración Financiera: Teoría Financiera y Valuación", Induvio Editores, Buenos Aires.
- MOOD, A & GRAYBILL, F (1978): "Introducción a la Teoría de la Estadística" Editorial Aguilar <sup>2da</sup> Edición.
- MUN, J (2004): "Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Strategic Investment and Decisions." Wiley, NY.
- MYERS, S (1977): "Determinants of Corporate Borrowing" Journal of Financial Economics 5, 2 pp 147-176
- MYERS, S & MAJD S (1990): "Abandonment Value and Project Life" Advances in Futures and Options Research, pp 1-21
- PADDOCK, J, SIEGEL, D & SMITH, J (1988): "Option Valuation of Claims on Physical Assets: The Case of Offshore Petroleum Lease" Quarterly Journal of Economics, 103 pp 479-508
- PINDYCK, R (1988): "Irreversible Investment, Capacity Choice, and The Value of the Firm" American Economics Review, 78 pp 969-985.
- RINCON; L (2008): "Introducción a los Procesos Estocásticos" Papeles de Trabajo Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias (UNAM) Circuito Exterior.
- ROTSTEIN, F; MILANESI, G; ESANDI, J & BRIOZZO, A (2006): "Opciones Reales: Un enfoque amigable y operativo" XXVI Jornadas Nacionales de Administración Financiera Sociedad Argentina de Docentes en Administración Financiera; pp 125-140
- SMIT, H (1996): "The Valuating of Offshore Concessions in the Netherlands" Financial Management, 26 pp 5-17
- SPETZLER, C; (1968): "The Development of a Corporate Risk Policy for Capital Investment Decisions" IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics SSC-2; pp 279-300
- TRIGEORGIS, L (1988): "A Conceptual Options Framework for Capital Budgeting" Advances in Futures and Options Research, pp 145-167)
- TRIGEORGIS, L (1993): "Real Options and Interactions with Financial Flexibility" Financial Management, 22, pp 202-224

- TRIGEORGIS, L (1995): *“Real options in capital investments: models, strategies and applications”* Praeger, London,
- TRIGEORGIS, L (1997): *“Real options: managerial flexibility and strategy in resource allocation”* MIT Press, Cambridge, 2ª. edición.
- TRIGEORGIS, L & MASON, S; (1987): *“Valuing Managerial Flexibility”* Midland Corporate Finance; 5; pp 14-21