SOCIEDAD ARGENTINA DOCENTES EN ADMINISTRACION FINANCIERA

EL PUNTO MUERTO FINANCIERO DE UN PROYECTO DE INVERSION EN CRECIMIENTO EN FUNCION DE LA TASA DE DESCUENTO

Domingo Alberto Tarzia
Universidad Austral - CONICET

SUMARIO: 1. Introducción; 2. Proyecto de inversión dependiente de la variable cantidad Q; 3. Cálculo numérico de un proyecto de inversión simple; 4. Conclusiones.

Para comentarios: DTarzia@austral.edu.ar

Resumen

Se considera un proyecto de inversión simple que tiene los siguientes parámetros sobre los cuales se realizan las siguientes hipótesis de trabajo: $I > 0$: Inversión inicial que se realiza de una sola vez y se amortiza totalmente en n años; n: Cantidad de años de duración del proyecto de inversión en el cual se realizan las mismas actividades y se considera que la compañía vende un solo producto con una tasa de crecimiento anual; $A > 0$: Amortización anual ($A = I / n$); $Q > 0$: Cantidad de unidades del producto vendidas en el primer año; $C_v > 0$: Costo variable por unidad para producir el producto; $p > 0$: Precio de venta por unidad del producto con $p > C_v$; $C_f > 0$: Costo fijo anual de la compañía; t_{ig}: Tasa del impuesto a las ganancias (en tanto por uno); r: Tasa de descuento o costo de oportunidad (en tanto por uno); g: Tasa de crecimiento anual (en tanto por uno) en la cantidad de unidades vendidas por año; Se desprecia la inflación anual de precios. Se obtiene la expresión explícita del Valor Actual Neto (VAN) del proyecto de inversión en función de la variable independiente Q y de las tasas r y g. Se determina explícitamente el punto muerto (break even point) financiero $Q_f = Q_f(r, g)$ (es decir la cantidad de unidades vendidas Q que hace que el VAN sea nulo) en función de los parámetros restantes del problema I, n, C_v, C_f, t_{ig}, p. En particular, se estudia su comportamiento respecto de la tasa de descuento r y se demuestra que: (i) Cuando r es despreciable (es decir, cuando r tiende a cero) el punto muerto financiero tiende a un valor que es inferior al punto muerto contable del primer año cualquiera sea la tasa de crecimiento g positiva; (ii) Cuando r coincide con g el punto muerto financiero tiende a un valor que puede ser inferior o superior al punto muerto contable del primer año según sea la relación entre el costo fijo anual C_f y la inversión inicial I; (iii) Cuando r es muy grande (es decir, cuando r tiende a infinito) la gráfica de la función $Q_f = Q_f(r, g)$ tiene por asíntota una línea recta

que es la misma recta asíntota cualquiera sea la tasa de crecimiento g positiva; en este caso, se calculan además la pendiente (inclinación) y la ordenada al origen de la correspondiente recta asíntota.

1. Introducción

En el presente trabajo se considera un proyecto de inversión simple en el cual se realiza solamente una inversión inicial I (flujo de fondo con signo negativo) y en los n años de duración del mismo se tendrán, en general, flujos de fondos de signo positivo.

Es muy importante la evaluación del proyecto de inversión para poder conocer si el mismo es o no es rentable. Existen varios criterios para la evaluación [Machain, 2002; Sapag Chain, 2001] como son: el *valor actual neto* (conocido como VAN), la *tasa interna de retorno* (conocida como TIR), el *período de recuperación de la inversión* (conocido como PRI) y la *rentabilidad inmediata* (conocido como RI).

En este trabajo se utilizará el Valor Actual Neto o VAN como criterio de evaluación. El VAN es aquel que permite determinar la valoración de una inversión en función de la diferencia entre el valor actualizado de todos los cobros derivados de la inversión y todos los pagos actualizados originados por la misma a lo largo del plazo de la inversión realizada. En otras palabras, el VAN de un proyecto es igual a la sumatoria de los valores actuales (al momento cero) de todos los flujos de fondos (negativos y positivos) que genera el mismo proyecto. La inversión será aconsejable si su VAN es positivo. La sumatoria de los valores actuales de los flujos puede presentar, en cuanto a su signo, tres situaciones, las que se interpretan a continuación [Baker-Fox, 2003; Brealey-Myers, 1993; Reichelstein, 2000; Sapag Chain, 2001; Vanhoucke et al., 2001]:

(i) Un VAN positivo indica que:
- se recupera la inversión a valores nominales,
- se obtiene el retorno requerido sobre la inversión,
- se obtiene un remanente sobre el retorno requerido por el inversor.

(ii) Un VAN negativo indica que:
- se puede o no cubrir la inversión a valores nominales,
- no cubre las expectativas de retorno del inversor,
- no se obtiene ningún remanente.

(iii) Un VAN cero indica que cubre exactamente la devolución del capital nominal más el retorno requerido representado por la tasa utilizada para descontar los fondos al momento 0. En términos "económicos-empresarios" no se "agrega" ni se "destruye" valor.

La importancia del criterio del VAN puede apreciarse en [Cheng-Lin, 1998; Grinyer-Walker, 1990; Kim-Chung, 1990; Lan et al., 2003; Prakash et al., 1988; Stanford, 1989].

En el presente trabajo se estudia un proyecto de inversión con la existencia de tres variables independientes (la cantidad de unidades Q a vender en el primer año que aumenta anualmente con una tasa de crecimiento g) y la tasa de descuento r que pueden hacer, según los valores que adopten, que el proyecto sea viable o no. Por ende, el VAN será una función de las variables Q y g. Es de mucha importancia encontrar el valor de la variable independiente Q que haga que el correspondiente VAN sea nulo para una dada tasa de crecimiento g. Se define como **Punto Muerto Financiero** (break even point) el valor de la variable independiente Q para el cual el VAN es nulo.

Planteo del problema, hipótesis y resultados obtenidos. En el proyecto de inversión a estudiar se tienen los siguientes parámetros:

- I : Inversión inicial**.** Se considera un proyecto de inversión simple que tiene una inversión inicial que se realiza en el año cero (antes del comienzo del año 1 correspondiente al primer año del desarrollo del proyecto de inversión). Dimensión: $[I]$ = \$;
- n : cantidad de años de duración del proyecto de inversión $(2 \leq n)$. Dimensión: $[n]$ = 1;
- A : Amortización anual**.** Es la parte anual de la inversión que permite bajar (mejorar) el pago de impuestos a las ganancias. Dimensión: $[A]$ = \$;
- Q_t : Cantidad de unidades del producto vendidas en el año t. Se define $Q = Q_1$. Dimensión: $[Q_t]$ = $\#\, unidades$;
- p : Precio de venta unitario al que la Compañía vende cada producto. Dimensión: $[p]$ = $\$/unidad$;
- C_v : Costo variable por unidad para producir el producto. Dimensión: $[C_v]$= $\$/unidad$;
- C_f : Costo fijo anual de la Compañía. Dimensión: $[C_f]$ = \$;
- t_{ig} : Tasa del impuesto a las ganancias (en tanto por uno). Dimensión: $[t_{ig}]$ = 1;
- r : Tasa de descuento o costo de oportunidad (en tanto por uno). Dimensión: $[r]$= 1;
- g : Tasa de crecimiento (en tanto por uno). Dimensión: $[g]$ = 1;
- t : Referente al año t ($t = 0,1,...,n$). Dimensión: $[t]$ = 1.

En [Fernandez Blanco, 1991] se realiza un estudio del VAN de un proyecto de inversión en función de la tasa de descuento r; se demuestra que el VAN de un proyecto de inversión en función de la tasa de descuento r es una función estrictamente decreciente y convexa. Dicho estudio no es completo y fue ampliado adecuadamente en [Tarzia, 2007] realizando un análisis del punto muerto financiero, respecto de la variable Q, en función de la tasa de descuento r, además de un análisis de sensibilidad para el caso de crecimiento nulo $g = 0$. En el presente trabajo se generalizará el estudio anterior considerando que la empresa tiene un crecimiento anual constante en las ventas dada por una tasa g positiva.

En el proyecto de inversión simple se considerarán las siguientes hipótesis de trabajo:

- Toda la inversión I se realiza de una sola vez y en el año 0;
- La inversión inicial se amortiza totalmente en n años, con lo cual la amortización anual está dada por:

$$A = \frac{I}{n}$$

- Se desprecia la inflación anual de precios;
- En los n períodos de tiempo de duración del proyecto de inversión se realizan las mismas actividades, excepto que se indique lo contrario;
- Se considera que la compañía vende un solo producto (el cual lo podría producir o comprarlo para luego revenderlo);

- Se considera que la compañía vende el producto con un crecimiento anual en la cantidad de unidades vendidas dado por la tasa de crecimiento g;
- Se supone que el precio de venta del producto es mayor que el correspondiente costo variable de producción, es decir

$$p > C_v \,.$$

El objetivo de este trabajo es el de obtener la expresión explícita del VAN del proyecto de inversión en función de la variable independiente Q, para una dada tasa de crecimiento g y una dada tasa de descuento r, en cuyo caso será $VAN(Q)$ o según sea el caso $VAN(Q,r,g)$**.** También se determinará explícitamente el punto muerto financiero Q_f (cantidad de unidades vendidas Q que hace que el VAN sea nulo) en el proyecto de inversión simple en función de los parámetros restantes del problema (I, n, C_f, C_v, p, t_{ig}, r, g). En particular, se estudiará matemáticamente (analítica y gráficamente) su comportamiento respecto de la tasa de descuento r en función del parámetro principal de crecimiento g. Se demostrará que:

(i) Cuando la tasa de descuento r es despreciable (es decir, cuando r tiende a cero) el punto muerto financiero $Q_f = Q_f(r, g)$, para la variable de cantidad Q, tiende a un valor que es inferior al punto muerto contable (el valor de Q que anula el Beneficio antes de Impuestos BAT) del primer año cualquiera sea la tasa de crecimiento g positiva**;**

(ii) Cuando la tasa de descuento r coincide con la tasa de crecimiento g el punto muerto financiero $Q_f = Q_f(g, g)$, para la variable de cantidad Q, tiende a un valor que puede ser inferior o superior al punto muerto contable del primer año según sea la relación entre el costo fijo anual C_f y la inversión inicial I;

(iii) Cuando la tasa de descuento r es muy grande (es decir, cuando r tiende a infinito) la gráfica de la función $Q_f = Q_f(r, g)$ tiene por asíntota una línea recta que es la misma recta asíntota cualquiera sea la tasa de crecimiento g positiva; en este caso, se calculan además la pendiente (inclinación) y la ordenada al origen de la correspondiente recta asíntota**.**

2. Proyecto de inversión dependiente de la variable cantidad Q

Se supone que en cada año ($i = 1, 2, ..., n$) se realizan las mismas operaciones, es decir que los parámetros p, C_f, C_v, r, g, t_{ig} son constantes durante los n años de duración del proyecto de inversión excepto que la cantidad de artículos vendidos se incrementa por año de acuerdo a la tasa de crecimiento g, es decir que $Q_t = Q\,(1+g)^{t-1}$ donde t representa el año en cuestión. Para cada año t ($t = 1, 2, ..., n$) se tiene:

Año	t
Ingresos (precio por cantidad)	$p\,Q_t$
Costos variables	$C_v\,Q_t$
Costos fijos	C_f
Amortización	$A = \dfrac{I}{n}$

Beneficios antes de impuestos (BAT) $\quad BAT_t = p\,Q_t - C_v\,Q_t - C_f - A$

$$= (p - C_v)Q_t - C_f - A$$

Impuesto a las Ganancias$(IG$ en \$$)$ $\quad IG_t = t_{ig}\left[(p - C_v)Q_t - C_f - A\right]$

Beneficio Neto

$(BN = BAT - IG$ en \$$)$ $\quad BN_t = (1 - t_{ig})\left[(p - C_v)Q_t - C_f - A\right]$

Flujo de Tesorería Neto

$(F \equiv FTN = BN + A$ en \$$)$ $\quad F_t = (1 - t_{ig})\left[(p - C_v)Q_t - C_f - A\right] + A$

$$= (1 - t_{ig})\left[(p - C_v)Q_t - C_f\right] - (1 - t_{ig})A + A$$

$$= (1 - t_{ig})\left[(p - C_v)Q_t - C_f\right] + t_{ig}A$$

$$= (1 - t_{ig})(p - C_v)Q\,(1+g)^t - C_f(1 - t_{ig}) + t_{ig}A$$

Factor de descuento para el año t $\quad \dfrac{1}{(1+r)^t}$

Teniendo en cuenta que la inversión I se realiza en el período 0 se tiene que el correspondiente VAN (con dimensión $[VAN] = \$$) del proyecto de inversión simple viene dado por $-I$ más los valores actuales de todos los flujos de fondos F_t obtenidos en cada año t variando t desde 1 a n, es decir [Villalobos, 2001]:

$$VAN(Q) = -I + \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+r)^t}$$

$$= -I + (1 - t_{ig})(p - C_v)Q \sum_{t=1}^{n} \frac{(1+g)^{t-1}}{(1+r)^t} + \left(t_{ig}A - C_f(1 - t_{ig})\right) \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^t}$$

$$= -I + \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]\left[t_{ig}A - (1 - t_{ig})C_f\right] + (1 - t_{ig})(p - C_v)Q \frac{1 - \left(\dfrac{1+g}{1+r}\right)^n}{r - g}$$

(1) $$= -I + \left[t_{ig}A - (1 - t_{ig})C_f\right] f(r) + Q\,(1 - t_{ig})(p - C_v)\Phi(r,g)$$

$$= h + m\,Q\ ,$$

expresión que resulta ser una función afín de la variable Q (la representación gráfica de $VAN(Q)$ es una recta en la variable Q) donde se han definido $h = h(r)$ (ordenada al origen de la recta en función del parámetro tasa de descuento r) y $m = m(r,g)$ (pendiente de la recta en función de los parámetros tasas de descuento r y de crecimiento g) de la siguiente manera:

(2) $$h = h(r) = -I + f(r)\left[t_{ig}A - (1 - t_{ig})C_f\right]$$

(3) $$m = m(r,g) = (p - C_v)(1 - t_{ig})\,\Phi(r,g) > 0,$$

donde las funciones reales $f = f(r)$ y $\Phi = \Phi(r,g)$ están definidas de la siguiente manera:

(4) $$f(r) = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right], \quad r > 0,$$

(5) $$\Phi(r,g)=\frac{1-\left(\dfrac{1+g}{1+r}\right)^n}{r-g}=\frac{1}{1+g}\,f\left(\frac{r-g}{1+g}\right),\qquad r>0,\qquad g>0,$$

y las correspondientes dimensiones son:

(6) $$\left[h(r)\right]=\$,\qquad \left[m(r,g)\right]=\$/unidad\,,\qquad \left[f(r)\right]=\left[\Phi(r,g)\right]=1\,.$$

Teniendo en cuenta que el punto muerto financiero $Q_f=Q_f(r,g)$ está definido como el valor de Q que anula el $VAN\left(Q\right)$, se obtiene:

$$VAN\left(Q_f\right)=0\quad\Leftrightarrow\quad h(r)+m(r,g)\,Q_f=0$$

es decir:

(7) $$Q_f=-\frac{h(r)}{m(r,g)}=\frac{I-\left((1-t_{ig})C_f-t_{ig}A\right)f(r)}{\left((1-t_{ig})C_f-t_{ig}A\right)f\left(\dfrac{r-g}{1+g}\right)}\,\frac{(1+g)}{\left(p-C_v\right)\left(1-t_{ig}\right)}\,.$$

De (7) surge que el punto muerto financiero Q_f, en función de las tasas de descuento r y de crecimiento g, viene dado por la siguiente expresión:

(8) $$Q_f(r,g)=\left[b+a\,f(r)\right]\frac{1+g}{f\left(\dfrac{r-g}{1+g}\right)}$$

donde los coeficientes reales a y b están definidos por:

(9) $$a=\frac{C_f-t_{ig}\left(C_f+\dfrac{I}{n}\right)}{\left(p-C_v\right)\left(1-t_{ig}\right)}$$

(10) $$b=\frac{I}{\left(p-C_v\right)\left(1-t_{ig}\right)}>0$$

cuyas dimensiones son:

(11) $$\left[Q_f\left(r,g\right)\right]=\#\ unidades\,,\qquad \left[a\right]=\#\ unidades\,,\qquad \left[b\right]=\#\ unidades\,.$$

Teniendo en cuenta el punto muerto financiero Q_f el $VAN(Q)=VAN(Q,r,g)$, dado por (1), se puede expresar de una manera equivalente dado por:

(12) $$\begin{aligned}VAN(Q,r,g)&=-I+f(r)\left[t_{ig}A-\left(1-t_{ig}\right)C_f\right]+\Phi(r,g)\left(p-C_v\right)\left(1-t_{ig}\right)Q\\&=m(r,g)\left[Q-Q_f\left(r,g\right)\right]\end{aligned}$$

con lo cual se ha expresado el VAN en función de la variable independiente Q, de los parámetros tasas de descuento r y de crecimiento g, y del punto muerto financiero $Q_f(r,g)$, obteniéndose la siguiente propiedad.

Teorema 1:

Para el proyecto de inversión se tienen las siguientes propiedades:
(i) El VAN, en función de la variable independiente cantidad de unidades vendidas Q en el primer año, viene dado por (1) donde la ordenada al origen $h=h(r)$ y la pendiente $m=m(r,g)$

están expresadas por (2) y (3) respectivamente donde $f = f(r)$ y $\Phi(r,g)$ son las funciones reales definidas por (4) y (5) respectivamente.
(ii) El punto muerto financiero Q_f respecto de la cantidad Q está dado, en función de la tasa de descuento r y de la tasa de crecimiento g, por la siguiente expresión:

(13) $$Q_f(r,g) = (1+g)\, F\left(\frac{r-g}{1+g}\right)\left(b+\frac{a}{F(r)}\right)$$

donde la función real $F = F(r)$ $\left(\text{con dimensión } [F(r)] = 1\right)$ está definida por

(14) $$F(r) = \frac{1}{f(r)}, \quad r > 0,$$

y los coeficientes a y b están dados por las expresiones (9) y (10) respectivamente.
(iii) El $VAN\left(Q,r,g\right)$ también puede calcularse, en función de $Q_f = Q_f(r,g)$, por la expresión (12). ■

Observación 1:

Se puede observar que el signo del $VAN(Q,r,g)$, en función del punto muerto financiero $Q_f(r,g)$, viene dado por:

$$VAN\left(Q,r,g\right)\begin{cases} > 0 \Leftrightarrow Q > Q_f(r,g) \\ = 0 \Leftrightarrow Q = Q_f(r,g) \\ < 0 \Leftrightarrow 0 \le Q < Q_f(r,g). \end{cases}$$ ■

A los efectos de estudiar matemáticamente el comportamiento de la función $VAN\left(Q,r,g\right)$ se necesita previamente conocer el comportamiento de las funciones $f(r)$ y $F(r)$ definidas por (4) y (14) respectivamente las cuales tienen las siguientes propiedades:

Teorema 2:

(i) La función $f = f(r)$ es una función estrictamente decreciente y convexa (cóncava hacia arriba) de la variable tasa de descuento r con las siguientes propiedades:

(15) $$f\left(0^+\right) = n > 0, \ f(+\infty) = 0,$$

(16) $$\frac{df(r)}{dr} = f'(r) = -\frac{G(r)}{r^2\left(1+r\right)^{n+1}} < 0, \ \forall r > 0$$

(17) $$f'\left(0^+\right) = -\frac{n\left(n+1\right)}{2}, \ f'\left(+\infty\right) = 0,$$

(18) $$f''(r) = \frac{H(r)}{r^3\left(1+r\right)^{n+2}} > 0, \ \forall r > 0$$

(19) $$f''\left(0^+\right) = \frac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{3}, \ f''\left(+\infty\right) = 0$$

donde las funciones reales $G = G\left(r\right)$ y $H = H\left(r\right)$ (con dimensiones $\left[G(r)\right] = \left[F(r)\right] = 1$) están definidas por:

(20) $G(r) = (1+r)^{n+1} - 1 - (n+1)r\,,\; r > 0$

(21) $H(r) = 2(1+r)^{n+2} - 2 - 2(n+2)r - (n+1)(n+2)r^2\,,\; r > 0$

que tienen las siguientes propiedades:

(22) $G(0^+) = 0\,,\; G(+\infty) = +\infty\,,\; G(r) > 0\,,\; \forall r > 0$

(23) $H(0^+) = 0\,,\; H(+\infty) = +\infty\,,\; H(r) > 0\,,\; \forall r > 0\,.$

(ii) La función $F = F(r)$, definida en (14), es estrictamente creciente y tiene en $r = +\infty$ una asíntota oblicua dada por la ecuación $y = r$ (recta de pendiente 1 y ordenada al origen 0) y tiene además las siguientes propiedades:

(24) $F(0^+) = \dfrac{1}{n}\,,\; F(+\infty) = +\infty\,,$

(25) $\dfrac{1}{2} < F'(0^+) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < 1\,,\; \forall n > 1$

(26) $F''(0^+) = \dfrac{n^2 - 1}{6n}\,,$

(27) $0 < F(r) - r < \dfrac{1}{n}\,,\; \forall r > 0\,,\; \forall n > 1\,.$

Demostración. Ver [Tarzia, 2007]. ■

Se define el **Punto Muerto Contable** Q_c (con dimensión $[Q_c] = \#\, unidades$) como el valor de Q que anula el Beneficio antes de Impuestos BAT_1 en el primer año, el cual viene dado por la siguiente expresión:

$$BAT_1(Q_c) = 0 \Leftrightarrow (p - C_v)Q_c - C_f - A = 0 \Leftrightarrow$$

(28) $$Q_c = \frac{C_f + A}{p - C_v} = \frac{C_f + \frac{I}{n}}{p - C_v} = a + \frac{b}{n}\quad .$$

Teorema 3*:*

El punto muerto financiero $Q_f = Q_f(r,g)$, dado por (8) ó (13), es una función estrictamente creciente de la tasa de descuento r y tiene las siguientes propiedades:

(29) $Q_f(0^+, g) = \dfrac{ng}{(1+g)^n - 1} Q_c < Q_c\,,\; Q_f(+\infty, g) = +\infty, \quad \forall g > 0\,,$

(30) $\dfrac{\partial Q_f}{\partial r}(r,g) > 0, \quad \forall r > 0, \quad \forall g > 0\,.$

Además, para cada valor $g > 0$, la curva $y = Q_f(r,g)$ tiene en $r = +\infty$ una asíntota oblicua dada por la recta de ecuación

(31) $$y = a + b\, r$$

que tiene pendiente $b > 0$ y ordenada al origen a, definidos en (10) y (9) respectivamente. La recta asíntota es independiente de la tasa de crecimiento $g > 0$.

Demostración.

Debido a las propiedades de la función $f = f(r)$ o en su defecto de la función $F = F\left(r\right)$ obtenidas en el Teorema 2, se tiene el siguiente resultado:

(32) $$Q_f(0^+, g) = \lim_{r\to 0} Q_f(r, g)$$

$$= b(1+g)\lim_{r\to 0} F\left(\frac{r-g}{1+g}\right) + a(1+g)\lim_{r\to 0}\frac{F\left(\dfrac{r-g}{1+g}\right)}{F(r)}$$

$$= n(1+g)\left(a + \frac{b}{n}\right)F\left(-\frac{g}{1+g}\right) = \frac{ng}{(1+g)^n - 1}\, Q_c = \frac{Q_c}{f_1(g)} < Q_c\,, \quad \forall g > 0$$

pues las funciones reales $f_1 = f_1(x)$ y $f_2 = f_2(x)$, definidas por:

(33) $$f_1(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{n\, x}\,, \quad x > 0,$$

(34) $$f_2(x) = 1 + (1+x)^{n-1}\left((n-1)x - 1\right), \quad x > 0,$$

tienen las siguientes propiedades:

(35) $$f_1(0^+) = 1, \quad f_1(+\infty) = +\infty,$$

(36) $$\frac{df_1}{dx}(x) = \frac{f_2(x)}{n\, x^2} > 0, \quad x > 0,$$

(37) $$f_{21}(0^+) = 0, \quad f_2(+\infty) = +\infty,$$

(38) $$\frac{df_2}{dx}(x) = n\,(n-1)\,(1+x)^{n-2} > 0, \quad x > 0.$$

Por otro lado, se tiene la propiedad siguiente:

(39) $$Q_f(+\infty, g) = \lim_{r\to+\infty} Q_f(r, g) = a + bF(+\infty) = +\infty$$

Además, como la curva $y = F(r)$ tiene en $r = +\infty$ una recta asíntota oblicua de ecuación $y = r$ entonces la curva $y = Q_f(r) = Q_f(r, g)$, con parámetro g, tendrá en $r = +\infty$ una recta asíntota de ecuación $y = a + br$ pues:

(40) $$\lim_{r\to\infty}\frac{Q_f(r,g)}{r} = \lim_{r\to\infty}\left[b\frac{1+g}{r\, f\left(\dfrac{r-g}{1+g}\right)} + a\frac{(1+g)\, f(r)}{r\, f\left(\dfrac{r-g}{1+g}\right)}\right] = \mathrm{b},$$

$$(41) \qquad \lim_{r\to+\infty}\left[Q_f(r,g)-br\right] = \lim_{r\to\infty}\left(\mathrm{b}\,\frac{1+\mathrm{g}}{\mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{r-g}}{1+\mathrm{g}}\right)} + \mathrm{a\ f(r)}\,\frac{1+\mathrm{g}}{\mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{r-g}}{1+\mathrm{g}}\right)} - \mathrm{br} \right)$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left((1+g)\frac{b+af(r)-\frac{br}{1+g}f\left(\frac{r-g}{1+g}\right)}{f\left(\frac{r-g}{1+g}\right)}\frac{r}{r} \right)$$

$$= \lim_{r\to\infty}\frac{(1+g)}{\mathrm{r\ f}\left(\frac{\mathrm{r-g}}{1+\mathrm{g}}\right)}\left[br+ar\ f(r)-br^2\,\frac{f\left(\frac{r-g}{1+g}\right)}{1+g} \right] = a\,. \qquad \blacksquare$$

Observación 2:

La propiedad (29) ofrece una interesante propiedad contable-financiera: el límite del punto muerto financiero, en un proyecto de inversión con crecimiento, para la cantidad de unidades vendidas cuando la tasa de descuento tiende a cero (es decir, con tasa de descuento despreciable o muy baja) da un valor que es inferior al punto muerto contable para la cantidad de unidades vendidas, siendo el último valor el que se obtiene cuando se considera que la tasa de crecimiento es nula [Tarzia, 2007]. ■

Observación 3:

El punto muerto financiero del proyecto de inversión simple, con tasa de crecimiento $g>0$, en función de la tasa de descuento r está representado por una función estrictamente creciente $y=Q_f(r,g)$ que parte en $r=0$ del valor $Q_f\left(0^+,g\right)=\dfrac{Q_c}{f_1(g)}<Q_c$ (inferior al punto muerto contable) y en $r=+\infty$ tiende asíntoticamente a la recta de ecuación $y=a+br$ donde los coeficientes a y b están definidos en (8) y (9) respectivamente. ■

La ordenada al origen a de la recta asíntota (31) presenta la siguiente equivalencia:

$$(42) \qquad a>0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{I}{C_f}<\frac{n(1-t_{ig})}{t_{ig}}$$

es decir que el coeficiente a es positivo (negativo) cuando el cociente entre la inversión inicial I y el costo fijo anual C_f es pequeño (grande).

Por (29) se sabe que la curva punto muerto financiero parte en $r=0$ de un valor que es inferior al punto muerto contable cualquiera sea la tasa de crecimiento g positiva. Ahora, se puede obtener otra precisión en el caso en que el parámetro a sea positivo.

Lema 4:

Si $a>0$ entonces se tienen las siguientes equivalencias:

(43) $Q_f(0^+,g) > a \quad \Leftrightarrow \quad 0 < g < g_0$,

(44) $Q_f(0^+,g) = a \quad \Leftrightarrow \quad g = g_0$,

(45) $Q_f(0^+,g) < a \quad \Leftrightarrow \quad g > g_0$,

donde $g_0 > 0$ es la tasa de crecimiento que está definida como la única solución positiva de la ecuación siguiente:

(46) $$f_1(x) = 1 + \frac{b}{n\,a}, \qquad x > 0\,.$$

Demostración.

Se tiene la siguiente equivalencia:

(47) $$Q_f(0^+,x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Q_c}{f_1(x)} = a \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) = \frac{Q_c}{a} = 1 + \frac{b}{n\,a} > 1\ ,$$

de la cual se deduce la ecuación (46) y por ende la equivalencia (44). Teniendo en cuenta las propiedades (35) y (36) de la función $f_1 = f_1(x)$ se deduce que la ecuación (46) tiene una única solución positiva que se denotará g_0. Luego, por la propiedad (36), se deducen también las equivalencias (43) y (45). ■

A continuación, se estudiará el VAN como una función real de tres variables independientes: la tasa de descuento r, la tasa de crecimiento g y la cantidad de unidades vendidas Q en el primer año.

Teorema 5:

(i) La función real $h = h(r)$ tiene las siguientes propiedades:

(48) $$h\left(0^+\right) = -\left(1-t_{ig}\right)n\left(A+C_f\right) < 0,\ h\left(+\infty\right) = -I < 0$$

y es estrictamente creciente (decreciente) cuando $At_{ig} < C_f\left(1-t_{ig}\right)$ $\left(At_{ig} > C_f\left(1-t_{ig}\right)\right)$. En el caso particular $At_{ig} = C_f\left(1-t_{ig}\right)$ se tiene que $h = h(r)$ es una función constante de valor $h\left(r\right) = -I < 0$, $\forall r > 0$.

(ii) La función real VAN de las tres variables independientes Q, r y g está dado por la siguiente expresión:

(49) $$VAN(Q,r,g) = h(r) + m(r,g)Q = m(r,g)\left[Q - Q_f\left(r,g\right)\right]$$

$$= -I + f(r)\left[t_{ig}A - \left(1-t_{ig}\right)C_f\right] + \Phi(r,g)\left(p - C_v\right)\left(1-t_{ig}\right)Q\,,$$

donde las funciones $h = h(r)$, $m = m(r,g)$, $f = f(r)$ y $\Phi = \Phi(r,g)$ están definida en (2), (3), (4) y (5) respectivamente.

(iii) $VAN\left(Q,r,g\right)$ es una función estrictamente creciente en la variable Q, estrictamente decreciente en la variable r y estrictamente creciente en la variable g asumiendo para los valores extremos de Q, r y g las siguientes expresiones:

(50) $$VAN\left(Q,+\infty,g\right)=\lim_{r\to+\infty}VAN\left(Q,r,g\right)=-I<0,\ \forall Q,g>0,$$

(51) $$VAN\left(Q,0^{+},g\right)=\lim_{r\to0^{+}}VAN\left(Q,r,g\right)=n\left(p-C_{v}\right)\left(1-t_{ig}\right)\left(Q-\frac{Q_{c}}{f_{1}(g)}\right),\ \forall Q,g>0,$$

(52) $$VAN\left(+\infty,r,g\right)=\lim_{Q\to+\infty}VAN\left(Q,r,g\right)=+\infty,\ \forall r,g>0,$$

(53) $$VAN\left(0^{+},r,g\right)=\lim_{Q\to0^{+}}VAN\left(Q,r,g\right)=h(r),\ \forall r,g>0,$$

(54) $$VAN\left(Q,r,+\infty\right)=\lim_{g\to+\infty}VAN\left(Q,r,g\right)=+\infty,\ \forall Q,r>0,$$

(55) $$VAN\left(Q,r,0^{+}\right)=\lim_{g\to0^{+}}VAN\left(Q,r,g\right)=Q\left(p-C_{v}\right)\left(1-t_{ig}\right)f(r)\left(Q-Q_{f}(r)\right),\ \forall Q,r>0,$$

donde Q_c es el punto muerto contable definido en (28) para crecimiento nulo, $h=h(r)$ es la función real definida en (2) y $Q_f(r)$ es el punto muerto financiero para el mismo proyecto de inversión con crecimiento nulo ($g=0$) dado por la siguiente expresión:

(56) $$Q_{f}\left(r\right)=a+b\,F(r),\qquad r>0,$$

donde $F=F(r)$ es la función real definida por (14).

Demostración.

La derivada de la función $h=h(r)$ viene dada por:

(57) $$h'(r)=\left[C_{f}\left(1-t_{ig}\right)-At_{ig}\right]\frac{G\left(r\right)}{r^{2}\left(1+r\right)^{n}},\ \forall r>0$$

donde $G=G\left(r\right)$ está definida en (20).

El signo de $h'(r)$ depende del signo de $\left[C_{f}\left(1-t_{ig}\right)-At_{ig}\right]$, el cual será positivo (es decir h es estrictamente creciente en r) cuando $At_{ig}<C_{f}\left(1-t_{ig}\right)$ y será negativo (es decir h es estrictamente decreciente en r) cuando $At_{ig}>C_{f}\left(1-t_{ig}\right)$. En el caso particular en que se tenga $At_{ig}=C_{f}\left(1-t_{ig}\right)$ se deduce que $h'(r)=0$, $\forall r>0$ con lo cual $h(r)$ es una constante $\forall r>0$ dada por $h(r)=-I$.

Las propiedades restantes surgen de los resultados obtenidos previamente y del análisis matemático de funciones reales. Más detalles pueden verse en [Tarzia, 2007]. En particular, las derivadas parciales de $VAN\left(Q,r\right)$ respecto de las variables Q, r y g vienen dadas por las siguientes expresiones:

(58) $$\frac{\partial VAN}{\partial Q}\left(Q,r,g\right)=m(r,g)>0,\ \forall Q,r,g>0,$$

(59) $$\frac{\partial VAN}{\partial r}\left(Q,r,g\right)=Q\left(p-C_{v}\right)\left(1-t_{ig}\right)f'\left(\frac{r-g}{1+g}\right)$$
$$+\left[C_{f}\left(1-t_{ig}\right)-At_{ig}\right]f'(r)<0,\ \forall Q,r,g>0\ \text{cuando}\ a<0,$$

(60) $$\frac{\partial VAN}{\partial g}(Q,r,g) = Q\left(p - C_v\right)\left(1 - t_{ig}\right)\ \frac{\partial \Phi}{\partial g}(r,g) > 0\,,\ \forall Q,r,g > 0\,,$$

con lo cual el VAN es una función estrictamente creciente en la variable cantidad de unidades vendidas Q, estrictamente decreciente en la variable tasa de descuento r y estrictamente creciente en la variable tasa de crecimiento g. ■

Observación 5:

En el Teorema 5 se mostró que el comportamiento de crecimiento o decrecimiento de la función real $h = h(r)$ está supeditado al signo de la expresión:

(61) $$C_f\left(1 - t_{ig}\right) - At_{ig}\,.$$

Cada término puede interpretarse de la siguiente manera:

- At_{ig}: es el ahorro impositivo anual debido a la amortización $A = I/n$ de la inversión I;
- $C_f\left(1 - t_{ig}\right)$: es el verdadero costo fijo anual después de pagar impuestos a las ganancias. ■

A continuación, se estudiará el comportamiento del punto muerto financiero $Q_f = Q_f(r,g)$ cuando la tasa de descuento r tiende a la tasa de crecimiento g.

Teorema 6:

Cuando la tasa de descuento r tiende a la tasa de crecimiento g entonces el punto muerto financiero $Q_f = Q_f(r,g)$ tiende a un valor que puede ser inferior o superior alpunto muerto contable del primer año Q_c según sea la relación entre el costo fijo anual C_f y la inversión inicial I. Más aún, se tiene que:

(62) $$Q_f\left(g,g\right) = \lim_{r \to g} Q_f\left(r,g\right) = Q_c\ f_4(g)\,,$$

donde la función real $f_4 = f_4(x)$ está definida por la expresión siguiente:

(63) $$f_4(x) = (1+x)\,\frac{b + n\ f(x)}{b + n\ a}\,,\quad x > 0\,,$$

con la función f definida en (4), n es la cantidad de años de duración del proyecto de inversión y los parámetros a y b están definidos en (9) y (10) respectivamente.

Demostración.

Si se realiza el límite $r \to g$ en la expresión (13) se obtiene (62) donde f_4 viene definida por (63). La función real $f_4 = f_4(x)$ tiene las siguientes propiedades:

(64) $$f_4(0^+) = 1,\quad f_4(+\infty) = +\infty,\quad f_4(x) > 0, \forall x > 0\,,$$

(65) $$\frac{df_1}{dx}(0^+) = \frac{b}{b + n\ a}\left(1 - \frac{n(n-1)a}{2b}\right).$$

Además, se tiene que:

(66) $$\frac{df_4}{dx}(x) = \frac{f_5(x)}{(b+na)\,x^2(1+x)^n}$$

donde la función real $f_5 = f_5(x)$ está definida por:

(67) $$f_5(x) = b\,x^2(1+x)^n + a\left[1+nx-(1+x)^n\right], \quad x>0,$$

y posee las siguientes propiedades:

(68) $$f_5(0^+) = 0, \quad f_5(+\infty) = +\infty,$$

(69) $$\frac{df_1}{dx}(0^+) = 0, \qquad \frac{d^2 f_1}{dx^2}(0^+) = 2b - n(n-1)a\,.$$

Por otro lado, se tienen las siguientes equivalencias:

(70) $$\frac{d^2 f_1}{dx^2}(0^+) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{n(n-1)a}{2b} < 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{C_f}{I} < \frac{t_{ig} + \dfrac{2}{n-1}}{n(1-t_{ig})},$$

(71) $$\frac{d^2 f_1}{dx^2}(0^+) < 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{n(n-1)a}{2b} > 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{C_f}{I} > \frac{t_{ig} + \dfrac{2}{n-1}}{n(1-t_{ig})}.$$

Teniendo en cuenta las propiedades anteriores se deducen las siguientes propiedades para las funciones f_4 y f_5:

1) Si $a \le 0$ entonces $f_5(x) > 0, \forall x > 0$ y por ende se tiene que f_4 es una función estrictamente creciente con $f_4(x) > 1, \forall x > 0$.

2) Si $a > 0$ entonces se tienen dos casos posibles de comportamiento:

(i) Si $0 < a < \dfrac{2b}{n(n-1)}$ entonces $f_5(x) > 0, \forall x > 0$ y por ende f_4 es una función estrictamente creciente con $f_4(x) > 1, \forall x > 0$.

(ii) Si $a > \dfrac{2b}{n(n-1)}$ entonces existe $x_5 > 0$ único cero positivo de la función f_5, es decir solución de la ecuación:

(72) $$f_5(x) = 0, \qquad x > 0,$$

de manera que $f_5(x) < 0$ en el intervalo $(0, x_5)$ y por ende f_4 es una función estrictamente decreciente en el intervalo $(0, x_5)$ y estrictamente creciente en el intervalo $(x_5, +\infty)$. Además, se tiene que $f_4(x) > 1$ en el intervalo $(x_6, +\infty)$ donde $x_6\,(> x_5)$ es la solución de la ecuación siguiente:

(73) $$f_4(x) = 1, \qquad x > x_5\,.$$

Por lo tanto, se tienen las siguientes conclusiones:

(74) $$\frac{C_f}{I} < \frac{t_{ig} + \dfrac{2}{n-1}}{n(1-t_{ig})} \quad\Rightarrow\quad \frac{Q_f(g,g)}{Q_c} = f_4(g) > 1,$$

y

$$(75) \qquad \frac{C_f}{I} > \frac{t_{ig} + \dfrac{2}{n-1}}{n(1-t_{ig})} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_f(g,g)}{Q_c} = f_4(g) \begin{cases} <1 & si \quad g \in (0, x_6) \\ =1 & si \quad g = x_6 \\ >1 & si \quad g \in (x_6, +\infty) \end{cases},$$

con lo cual se deducen los resultados de la tesis. ■

Observación 6:

Se resalta que el resultado del Teorema 6 depende del valor de la razón $\frac{C_f}{I}$ entre el costo fijo anual C_f y la inversión inicial I. ■

Se puede observar que el punto muerto financiero $Q_f = Q_f(r,g)$, como función de la sola variable tasa de descuento r, tiende asintóticamente a la recta $y = a + br$ por valores inferiores cuando $r \to \infty$ si bien la gráfica puede partir de valores superiores a la recta en el punto inicial $r = 0$. Por ende, resulta de gran interés estudiar cuando la curva Q_f corta a la recta asíntota y como se comporta la tasa de descuento de corte r_0 en función de la tasa de crecimiento g.

Lema 7:

La tasa de descuento r_0 de la intersección de la curva Q_f vs r con la recta asíntota $y = a + br$ está dada por la solución de la ecuación siguiente:

$$(76) \qquad (a + b\,x)\,\frac{f\left(\dfrac{x-g}{1+g}\right)}{b + a\,f(x)} = 1 + g, \quad x > 0.$$

donde $g > 0$ es un parámetro. ■

3. Cálculo numérico de un proyecto de inversión simple

A continuación se realizarán los cálculos numéricos correspondientes al siguiente ejemplo: Se consideran los siguientes datos del proyecto de inversión simple:

- Inversión inicial: I = 150000 $(\$)$;
- Cantidad de años de duración del proyecto: n = 10;
- Amortización anual: A = 15000 $(\$)$;
- Precio de venta por unidad: p = 3,70 $(\$/unidad)$;
- Costo variable de producción por unidad: C_v = 3,00 $(\$/unidad)$;
- Costo fijo anual: C_f = 30000 $(\$)$;
- Tasa del impuesto a las ganancias: t_{ig} = 0,35 (35%);
- Tasa de descuento o costo de oportunidad: r = 0,10 (10 % anual);
- Tasa de crecimiento: g = 0,03 (3 % anual).

Teniendo en cuenta los resultados teóricos obtenidos en la sección anterior se tienen los siguientes valores:

$$a = \frac{C_f - t_{ig}\left(C_f + A\right)}{\left(p - C_v\right)\left(1 - t_{ig}\right)} = \frac{30000 - 0,35\left(30000 + 15000\right)}{\left(3,70 - 3\right)0,65} = \frac{14250}{0,455} = 31318,68$$

$$b = \frac{I}{(\mathrm{p} - \mathrm{C_v})\ (1 - \mathrm{t_{ig}})} = \frac{150000}{\left(3,70 - 3\right)0,65} = \frac{150000}{0,455} = 329670,33$$

$$Q_c = \frac{C_f + A}{p - C_v} = a + \frac{b}{n} = \frac{30000 + 15000}{3,70 - 3} = \frac{45000}{0,70} = 64285,71$$

$$t_{ig}A - (1 - t_{ig})C_f = -C_f + t_{ig}\left(C_f + A\right) = -14250$$

$$f = f(r) = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right] = \frac{1}{0,10}\left[1 - \frac{1}{(1,10)^{10}}\right] = 6,14 \quad ; \quad F(r) = \frac{1}{f(r)} = 0,16$$

$$h = h(r) = -I + f(r)\left[t_{ig}A - \left(1 - t_{ig}\right)C_f\right] = -237560,08$$

$$f_1(g) = \frac{(1+g)^n - 1}{n\,g} = 1,15 \quad ; \qquad g_0 = 0,1522$$

$$\Phi(r,g) = \frac{1 - \left(\dfrac{1+g}{1+r}\right)^n}{r - g} = \frac{1}{1+g}\, f\left(\frac{r-g}{1+g}\right) = 6,88$$

$$m = m(r,g) = \left(p - C_v\right)\left(1 - t_{ig}\right)\Phi(r,g) = 3,13$$

$$Q_f\left(0^+, g\right) = \frac{ng}{(1+g)^n - 1}\, Q_c = 56.076,75$$

$$Q_f = Q_f(r,g) = (1+g)\, F\left(\frac{r-g}{1+g}\right)\left(b + \frac{a}{F(r)}\right) = -\frac{h(r)}{m(r,g)} = 75.846,92$$

$$VAN\left(Q,r,g\right) = h(r) + m(r,g)\,Q = m(r,g)\left[Q - Q_f\left(r,g\right)\right] = 3,13(Q - 75.846,92)\,. \quad \blacksquare$$

En la Figura 1 se pueden apreciar las gráficas del punto muerto financiero $Q_f = Q_f(r,g)$, como función de la sola variable tasa de descuento r para $g = 3\%$ anual, el punto muerto financiero $Q_f = Q_f(r) = Q_f(r,0)$ para $g = 0$ (crecimiento nulo) y la recta asíntota $y = a + br$.

Por otro lado, se puede apreciar que la tasa de descuento r_0 , dada como la intersección de la curva Q_f vs r con la recta asíntota $y = a + br$, es una función estricamente decreciente de la variable tasa de crecimiento g según el gráfico presentado en la Figura 2.

Figura 1: Gráficas de $y = Q_f(r;0.03)$, $y = Q_f(r,0)$, $y = a + br$ ***en función de la tasa*** r

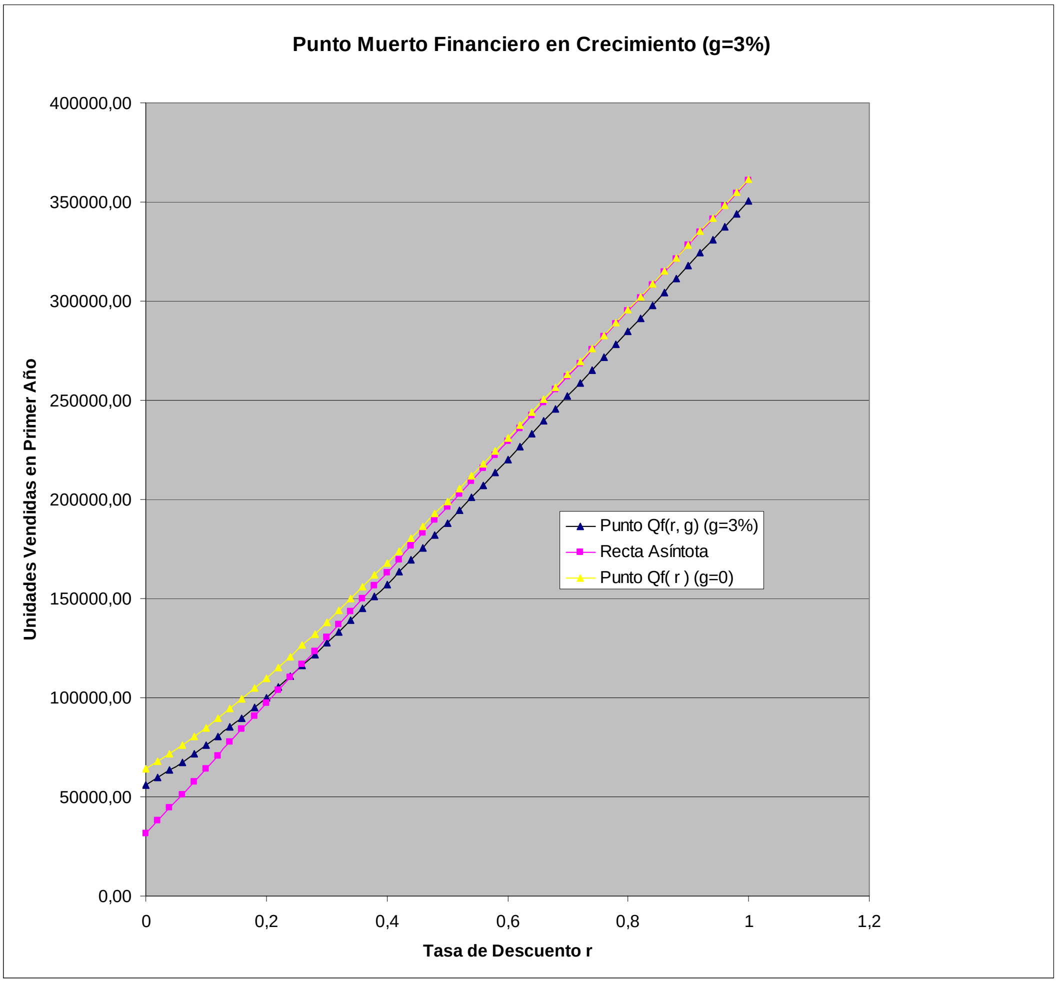
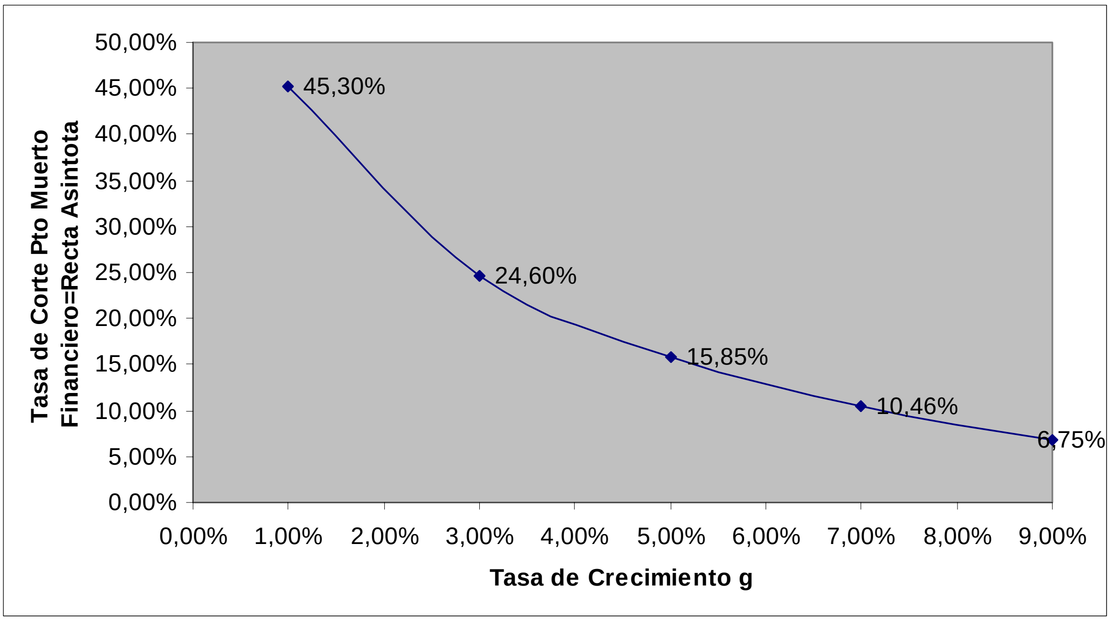


Figura 2: Gráfica de r_0 ***vs*** g



4. Conclusiones

Para un proyecto de inversión simple se ha obtenido:

- la expresión explícita del *VAN* de un proyecto de inversión simple en crecimiento en función de la variable independiente Q de unidades vendidas en el primer año, para una dada tasa de crecimiento g y una dada tasa de descuento r;
- la expresión explícita del punto muerto financiero $Q_f = Q_f(r, g)$ (cantidad de unidades vendidas en el primer año Q que hace que el *VAN* sea nulo) en el proyecto de inversión en función de los parámetros restantes del problema (I, n, C_f, C_v, p, t_{ig}, r, g) y se estudió analíticamente su comportamiento respecto de la tasa de descuento r en función del parámetro principal de la tasa de crecimiento g;
- que el punto muerto financiero $Q_f = Q_f(r, g)$ tiende a un valor que es inferior al punto muerto contable del primer año Q_c cuando la tasa de descuento r es despreciable (es decir, cuando r tiende a cero) cualquiera sea la tasa de crecimiento g positiva**;**
- que el punto muerto financiero $Q_f = Q_f(g, g)$ tiende a un valor que puede ser inferior o superior al punto muerto contable del primer año Q_c cuando la tasa de descuento r coincide con la tasa de crecimiento g según sea la relación entre el costo fijo anual C_f y la inversión inicial I;
- que la gráfica de la función $Q_f = Q_f(r, g)$, para un dado valor de g, tiene por asíntota una línea recta cuando la tasa de descuento r es muy grande (es decir, cuando r tiende a infinito) y que dicha recta asíntota es la misma recta cualquiera sea la tasa de crecimiento g positiva; en este caso, se calculan además la pendiente (inclinación) y la ordenada al origen de la correspondiente recta asíntota**.** ■

REFERENCIAS

Baker, R., and Fox, R., Capital investment appraisal: A new risk premium model, *International Transactions on Operations Research*, 10 (2003), 115-126.

Brealey, R., and Myers, S., *Fundamentos de financiación empresarial*. Mc Graw- Hill, Madrid, 1993.

Chung, K.J., and Lin, S.D., An exact solution of cash flow for an integrated evaluation of investment in inventory and credit, *Production Planinning & Control*, 9 (1998), 360-365.

Fernandez Blanco, M. *Dirección financiera de la empresa*. Pirámide, Madrid, 1991.

Grinyer, J.R., and Walker, M., Deprival value-based accounting rates of return under uncertainty; A note, *Economical Journal*, (September 1990), 918-922.

Kim, Y.H. and Chung, K.H., An integrated evaluation of investment in inventory and credit: A cash flow approach, *Journal of Business Finance & Accounting*, 17 (1990), 381-390.

Lan, S.P., Chung, K.J., Chu, P., and Kuo, P.F., The formula approximation for the optimal cycletime of the net present value, *The Engineering Economist*, 48 (2003), 79-91.

Machain, L., *El valor actual neto como criterio óptimo para seleccionar alternativas de inversión*, Trabajo Final de la Especialidad en Finanzas, Univ. Nacional de Rosario, 2002

Orakash, A.J., Dandapani, K. and Karels, G.V., Simple resource allocation rules, *Journal of Business Finance & Accounting*, 15 (1988), 447-452.

Reichelstein, S., Providing managerial incentives: Cash flows versus accrual accounting. *Journal of Accounting Research*, 38 (2000), 243-269.

Sapag Chain, N., *Evaluación de proyectos de inversión en la empresa*, Prentice Hall, 2001.
Stanford, R.E., Optimizing profits from a system of accounts receivable, *Management Science*, 35 (1989), 1227-1235.
Tarzia, D.A., El punto muerto financiero de un proyecto de inversión simple en función de la tasa de descuento con un análisis de sensibilidad, *Jornadas SADAF 2007*, 27 (2007), 421-440. Ver también, *El punto muerto financiero de un proyecto de inversión simple en función de la tasa de descuento*, Trabajo Final de la Especialidad en Finanzas, Univ. Nacional de Rosario, Rosario, 2007.
Vanhoucke, M., Demeulemeester, E. and Herroelen, W., On maximizing the net present value of a project under renewablee resource constraints, *Management Science*, 47 (2001), 1113-1121.
Villalobos, J.L., *Matemáticas financieras*, Prentice Hall, 2ª Ed., México, 2001.