TEORÍA DE LA CARTERA: CONTENIDOS MATEMÁTICOS Y ESTADÍSTICOS PREVIOS PARA SU ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE

Aldo Omar Vicario
Alejandro Grosso Grazioli
Orlando Orellana

Universidad de Buenos Aires

Para comentarios: aldovicario@yahoo.com.ar
aggrazioli@ciudad.com.ar
orellanao@yahoo.com.ar

1. Introducción

La ponencia trata el tema de los conocimientos matemáticos y estadísticos que los alumnos de la disciplina ¨Administración Financiera¨ debieran poseer previamente para poder aprender sin dificultades el tratamiento del riesgo en las decisiones financieras para el caso de Teoría de la Cartera, contenido curricular correspondiente a la Unidad Didáctica 8. del programa vigente de Administración Financiera (Código 279).

Son identificados preliminarmente los conocimientos matemáticos y estadísticos necesarios, luego es presentado un caso aplicado para exponer el uso de los diferentes instrumentos matemáticos y estadísticos. Posteriormente, los conocimientos son ubicados en los contenidos curriculares de las diferentes asignaturas del Departamento de Matemática evaluando su correspondencia.

Finalmente se deducen las conclusiones y se formulan algunas propuestas.

2. Desarrollo

2.a) Identificación preliminar de los conocimientos matemáticos y estadísticos necesarios

En los contenidos mínimos de la materia Administración Financiera (Código 279) figura "Tratamiento del riesgo y la incertidumbre en las decisiones financieras". Dentro de este tópico se ubica "La teoría de la Cartera" ([1]) de Harry Markowitz ([2]).

[1] El CMA (Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos aplicados a la economía y la gestión) de la UBA FCE ha publicado en junio de 2003 una selección de Trabajos de Investigación sobre el tema, ver CASPARRI, M. T. y colaboradores (2003). *Acerca del Riesgo, 1 parte*. Buenos Aires, CMA, 2003. 277 pág.

En el mundo económico actual, no se concibe un curso de Finanzas Empresariales sin el abordaje sistemático del tema de Teoría de la Cartera de Inversiones en condiciones de riesgo e incertidumbre. En un reciente texto los autores R. Merton y Z. Bodie definen "las finanzas, como la disciplina científica, consistente en el estudio de la manera como se asignan recursos escasos a lo largo del tiempo en condiciones de incertidumbre. Existen tres pilares analíticos de las finanzas: la optimización en el tiempo, la valuación de activos y la administración del riesgo, que incluye a la teoría de la cartera" ([3]).

Para su tratamiento justificaremos que se requieren, al menos, los siguientes conocimientos previos:

1. El conocimiento de funciones de utilidad en el sentido Von Newman-Morgenstern.
2. Teoría de la optimización:
   a) Optimización de funciones de n variables ($n \geq 2$) sujeta a condiciones de igualdad (caso en que se admitan operaciones de venta descubiertas) .
   b) Programación cuadrática (caso que no se admitan operaciones de venta descubiertas).

3) Estática comparativa (teorema de la función implícita) para justificar como las variables endógenas (las ponderaciones) se pueden expresar en función de las variables exógenas: Rendimiento esperado de la cartera (en el caso de que se plantee minimizar el riesgo de la cartera) o la varianza del rendimiento del portafolio (en el caso de que lo que se plantea es maximizar el rendimiento esperado). Teorema de la envolvente.
4) Matrices. Inversa de matrices.
5) Formas cuadráticas para la representación de la varianza del rendimiento del *portfolio*.
6) Estudio de funciones (análisis matemático de funciones, derivadas y gráficos).
7) Conocimientos estadísticos:
   a) Valor esperado de la suma de variables aleatorias.
   b) Varianzas y covarianzas de la suma de variables aleatorias.
   c) Coeficiente de correlación y de determinación lineal.
   d) Supuestos de Gauss –Markov de los mínimos cuadrados ordinarios (MCO).
   d) Distribución de probabilidades.

Adicionalmente, para el tratamiento del "Modelo Diagonal de Sharpe" se requiere el conocimiento y los supuestos del método de los mínimos cuadrados para regresión lineal.

Cuando se introduce en la cartera el activo sin riesgo la obtención de la frontera eficiente requiere el conocimiento de inversión de matrices.

Para el desarrollo de CAPM (Capital Asset Pricing Model) –modelo de valuación de activos de capital- en el caso de la deducción de la SML (Security Market Line) –línea de mercado de valores- se requiere para su deducción el conocimiento de derivada de una función de una variable si se sigue el desarrollo de Sharpe (1964) ([4]), u optimización sujeta a condiciones de igualdad (presentación de H. Levy y M. Sarnat " Capital Investment and Financial Decisions". Prentice Hall, 1978, págs. 183-186 citado por Suárez Suáres, 1994 ([5]).

---

[2] MARKOWITZ, H. (marzo 1952). Portfolio Selection. (Selección de Cartera). In: *Journal of Finance*. Recopilado en WESTON F. J. y WOODS, D. H., *Teoría de la Financiación de la Empresa*. Barcelona, G. Gili, 1970.

[3] MERTON, R. & Z. BODIE (2000). *Finanzas, 1 edición revisada*. México, Pearson, 2003. pág. xix.

[4] SHARPE, W. F. (septiembre de1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. (Los Precios de los Bienes de Capital: una teoría del equilibrio de mercado bajo condiciones de riesgo). In: *Journal of Finance 19*. Recopilado en WESTON F. J. y WOODS, D. H., *Teoría de la Financiación de la Empresa*. Barcelona, G. Gili, 1970.

[5] SUÁREZ SUÁREZ, A. S. (1994). *Decisiones Óptimas de Inversión y Financiación de la Empresa*. Madrid, Pirámide, 1994.

2.b) Presentación de un caso aplicado

El siguiente ejercicio ha sido extractado del libro *"Casos Prácticos de Inversión y Financiación en la Empresa"* de C. García, J. Gutiérrez Fernández, Iñigo Mascareñas Pérez y E. Pérez Gorostegui ([6]).

En la presente sección se presentará el caso y se resolverá el mismo destacando los conocimientos necesarios para ello.

2. b. 1) Enunciación del Caso Aplicado

Selección de carteras. La cartera óptima cuando son posibles el préstamo y el endeudamiento ilimitados a un mismo tipo de interés.

En base a sus expectativas (formadas partiendo de los resultados del estudio de las series históricas y de sus informaciones y estimaciones personales) un inversor asigna, a los tres únicos títulos con riesgo que cotizan en el mercado de capitales, la siguiente matriz de covarianzas:

$$V = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 20 & 8 \\ 20 & 144 & 60 \\ 8 & 60 & 2500 \end{bmatrix}$$

y el siguiente vector de rentabilidades esperadas, en porcentajes:

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Este inversor puede prestar sus capitales propios y endeudarse (ambas operaciones, ilimitadamente) a un tipo libre de riesgo (R_f) igual al 6% . Suponiendo que este inversor puede realizar operaciones de venta a corto de cualquier cuantía, se desea:

- Expresar los coeficientes de participación de los títulos, en las carteras de mínimo riesgo, como función de las rentabilidades esperadas de las mismas.
- Calcular las rentabilidades esperadas máxima y mínima que puede obtener este inversor sin acudir a la realización de ninguna operación de venta a corto plazo -*ventas en descubierto*-.
- Determinar la composición y el riesgo total de las carteras de mínimo riesgo que tienen las siguientes rentabilidades esperadas: 12,43; 15; 18; 21; 24; 27 y 29,76.
- Determinar la ecuación que relacione el riesgo total y la rentabilidad esperada de las carteras de mínimo riesgo (ecuación de la frontera de mínimo riesgo) y representarla.
- Determinar la composición, la rentabilidad esperada y el riesgo total de la cartera que, entre todas las que se pueden formar, tiene el mínimo riesgo, según las expectativas de este inversor.
- Determinar la composición, el riesgo total y la rentabilidad esperada de la cartera de títulos con riesgo óptima para este inversor.

2. b. 2) Resolución del Caso Aplicado

a) Expresar los coeficientes de participación de los títulos, en las carteras de mínimo riesgo, como función de las rentabilidades esperadas de las mismas.

---

[6] GARCÍA, C. & GUTIERREZ FERNÁNDEZ, J. MASCAREÑAS PÉREZ, I. & PÉREZ GOROSTEGUI, E. (1988). *Casos Prácticos de Inversión y Financiación en la Empresa*. Madrid, Pirámide, 1988.

Sea:

W_i = participación del título i en la portfolio; i = 1, 2, 3. Variables endógenas del modelo.

s_P = desvío estandar del portfolio (s_P^2 = varianza del portfolio)

E^* = Rendimiento esperado del portfolio. Parámetro (variable exógena del modelo)

El objetivo es minimizar:

$$s_P^2 = [W_1 \quad W_2 \quad W_3] . \begin{bmatrix} 16 & 20 & 8 \\ 20 & 144 & 60 \\ 8 & 60 & 2500 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} \text{ (forma cuadrática semidefinida positiva)}$$

Sujeto a:

$12\, W_1 + 24\, W_2 + 60\, W_3 = E^*$

$$\sum_{i=1}^{3} W_i = 1$$

Al no exigir que los $W_i \geq 0$ (es decir permitir operaciones de ventas en descubierto) se puede resolver como un problema de maximización restringida sujeta a restricciones de igualdad por el método de los multiplicadores de Lagrange:

$$L = s_P^2 + l_1 \left(E^* - 12.W_1 - 24.W_2 - 60.W_3 \right) + l_2 \left(1 - \sum_{i=1}^{3} W_i \right)$$

donde :

L: función de Lagrange

l_j : multiplicador de Lagrange (j=1,2)

Condición de Primer Orden (condición necesaria)

$$\frac{\partial L}{\partial W_i} = 0 \quad ; i = 1,2,3$$

$$\frac{\partial L}{\partial l_J} = 0 \quad ; j = 1,2$$

Resultando el sistema:

$$(A) \begin{cases} 32.W_1 + 40.W_2 + 16.W_3 - 12.l_1 - l_2 = 0 \\ 40.W_1 + 288.W_2 + 120.W_3 - 24.l_1 - l_2 = 0 \\ 16.W_1 + 120.W_2 + 5000.W_3 - 60.l_1 - l_2 = 0 \\ E^* - 12.W_1 - 24.W_2 - 60.W_3 = 0 \\ 1 - W_1 - W_2 - W_3 = 0 \end{cases}$$

Sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas (W_i para i=1,2,3; l_j para j=1,2) no homogéneo con vector de términos independientes $\bar{b}$.

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -E^* \\ -1 \end{bmatrix}$$

Reordenando el sistema de forma tal que la matriz de coeficientes del sistema sea la siguiente:

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -12 & -24 & -60 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -12 & -1 & 32 & 40 & 16 \\ -24 & -1 & 40 & 288 & 120 \\ -60 & -1 & 16 & 120 & 5000 \end{bmatrix}$$

Con lo que los vectores de incógnita y de término independiente resultarían:

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} \qquad \overline{b} = \begin{bmatrix} -E^* \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si el determinante de $\overline{H}$ es distinto de cero, entonces el sistema será compatible determinado, pudiéndose resolver por el *método matricial*.

La condición suficiente de segundo orden de mínimo exige que los siguientes determinantes evaluados en el punto óptimo $\left(\overline{W_i};\overline{l_j}\right)$ $i = 1,2,3$; $j = 1,2$ sean positivos:

$$\Delta\left(\overline{W_i};\overline{l_j}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -12 & -24 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -12 & -1 & 32 & 40 \\ -24 & -1 & 40 & 288 \end{vmatrix} \rangle\ 0$$

$$\left|\overline{H}\right|\left(\overline{W_i};\overline{l_j}\right) \rangle\ 0$$

Siendo a su vez $\overline{H}\left(\overline{W_i};\overline{l_j}\right)$ el *Jacobiano* de las funciones de (A).

Es decir que si se cumple la condición suficiente de *segundo orden* me asegura que el sistema tendrá solución óptima y además por el *teorema de la función implícita* se podrán expresar las W_i y las l_j (variables endógenas del modelo) en función de la variable exógena (E^*).

Haciendo el producto matricial $\overline{H}^{-1}.\overline{b}$ (ver Anexo I) resulta:

$$(B)\begin{cases} l_1 = 1{,}02444665.E^* - 12{,}0548398 \\ l_2 = -12{,}0548398.E^* + 173{,}510406 \\ W_1 = -0{,}05657417.E^* + 1{,}69672944 \\ W_2 = 0{,}04765444.E^* - 0{,}59563925 \\ W_3 = 0{,}00891972.E^* - 0{,}10109019 \end{cases}$$

b) Calcular las rentabilidades esperadas máxima y mínima que puede obtener este inversor sin acudir a la realización de ninguna operación de venta a corto plazo.

Para determinar el valor de E^* a partir del cual los W_i (i=1,2,3) van a ser $\geq$ 0:

$$W_1 \geq 0 \Rightarrow -0{,}05657417.\ E^* + 1{,}69672944 \geq 0 \Rightarrow E^* \leq \frac{1{,}6972944}{0{,}05657417} = 29{,}9912387579$$

$$W_2 \geq 0 \Rightarrow 0{,}04765444.\ E^* - 0{,}59563925 \geq 0 \Rightarrow E^* \geq \frac{0{,}59563925}{0{,}04765444} = 12{,}4991343934$$

$$W_3 \geq 0 \Rightarrow 0{,}00891972.\ E^* - 0{,}10109019 \geq 0 \Rightarrow E^* \geq \frac{0{,}10109019}{0{,}00891972} = 11{,}3333366967$$

Es decir que:

12,4991343934 ≤ E^* ≤ 29,9912387579, para que $W_i \geq 0$ (i=1,2,3)

c) Determinar la composición y el riesgo total de las carteras de mínimo riesgo que tienen las siguientes rentabilidades esperadas: 12,43; 15; 18; 21; 24; 27 y 29,76.

Para E^*=12,43 se tendrá que reemplazando en (B):

$$\begin{cases} W_1 = 0{,}99351255 \\ W_2 = -0{,}00329452 \\ W_3 = 0{,}00978196 \end{cases}$$

Para los demás valores del rendimiento esperado del *portfolio*, se procede de igual manera (ver Anexo I).

Resultado al que se podría haber arribado resolviendo el problema por programación cuadrática utilizando Excel ® (ver Anexo II).

d) Determinar la ecuación que relacione el riesgo total y la rentabilidad esperada de las carteras de mínimo riesgo (ecuación de la frontera de mínimo riesgo) y representarla.

La "función valor o función objetivo indirecta" ([7]) será:

$$s_P^2 = \begin{bmatrix} -0{,}05657417.E^* - 12{,}0548398 \\ +0{,}04765444.E^* - 0{,}59563925 \\ +0{,}00891972.E^* - 0{,}10109019 \end{bmatrix}^t . \begin{bmatrix} 16 & 20 & 8 \\ 20 & 144 & 60 \\ 8 & 60 & 2500 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -0{,}05657417.E^* - 12{,}0548398 \\ +0{,}04765444.E^* - 0{,}59563925 \\ +0{,}00891972.E^* - 0{,}10109019 \end{bmatrix}$$

y operando:

$$s_P^2 = 0{,}512223157125.(E^*)^2 - 12{,}05448382581.E^* + 86{,}755204618 \qquad \text{(C)}$$

Reemplazando E^* en (C) por los valores solicitados:

[7] Ver Anexo I Teoría de la Cartera, Aspectos Teóricos y Tratamiento Práctico en el Mercado Local de Casparri, María Teresa; Bernardello, Alicia Blanca; Vicario, Aldo Omar y García Fronti, Javier. In: CASPARRI, M. T. y colaboradores (2003). *Acerca del Riesgo, 1 parte*. Buenos Aires, CMA, 2003. 277 pág.

E^*	s_P^2
12,43	16,0545527393
15	21,182841099
18	35,72841888
21	59,49401340
24	92,479624928
27	134,685253193
29,76	181,657550061

donde $\frac{d^2 s_P^2}{d E^{*2}} = 2\ .\ 0{,}512223157125 \geq 0 \Rightarrow$ la función es convexa[8] considerando como variable independiente el rendimiento esperado del portfolio (E^*).

Gráfico en punto e).

e) Determinar la composición, la rentabilidad esperada y el riesgo total de la cartera que, entre todas las que se pueden formar, tiene el mínimo riesgo, según las expectativas de este inversor.

Partiendo de (C) para hallar el mínimo, para determinar el valor del dominio a partir del cual la función que es sobreyectiva sea inyectiva, lo que permite que la relación inversa – E* = $f(s_P^2)$ – sea una función, la condición de primer orden es:

$$\frac{d s_P^2}{d E^*} = 0 \Rightarrow 2\ .\ 0{,}512223157125\ .\ E^* - 12{,}05448382581 = 0$$

$$\Rightarrow E^* = \frac{12{,}054483882581}{1{,}02444631425} = 11{,}7668282448$$

y se vio que $\frac{d^2 s_P^2}{d E^{*2}} \rangle\ 0$ es decir que se verifica la condición de segundo orden.

Reemplazando en (B) resulta que:

$$\begin{cases} W_1 = 1{,}03103094 \\ W_2 = -0{,}0348976 \\ W_3 = 0{,}00386665 \end{cases}$$

Reemplazando en (C) este valor se obtiene que $s_P^2 = 15{,}8336842391$ y $s_P = 3{,}979156222$

Para representar gráficamente considerando a s_P^2 en el eje de las abscisas, se despeja E^* en función de s_P^2 en (C), y considerando la rama positiva, por lo señalado anteriormente en donde se estableció que los valores de la imagen a partir de los cuales la relación E* = $f(s_P^2)$ es una función, deben ser mayores que 11,7668282448, que ocurrirá como puede observarse considerando el signo positivo de la solución de la cuadrática

$$0{,}512223157125.E^{*2} - 12{,}05448382581.E^* + 86{,}755204618 - s_P^2 = 0$$

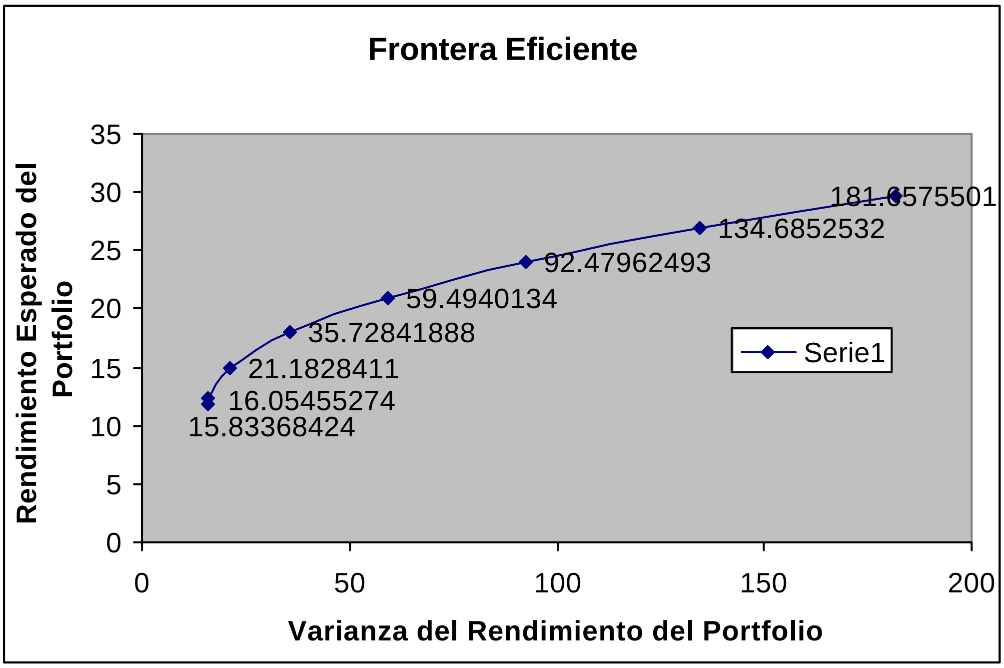
[8] Ver Anexo II *Teoría de la Cartera,* .... Casparri, M. T. y colaboradores (2003) para un tratamiento general del tema. *Op.cit.*

$$E^* = \frac{12{,}05448382581}{2.0{,}512223157125} + \frac{\sqrt{(-12{,}05448382581)^2 - 4.[0{,}512223157125.(86{,}755204618 - s_P^2)]}}{2.0{,}512223157125}$$

que operando resulta:

$$E^* = 11{,}7668282448 + \frac{\sqrt{-32{,}44151892 + 2{,}0488926285.s_P^2}}{1{,}02444631425}$$

Cuya representación gráfica es:



f) Determinar la composición, el riesgo total y la rentabilidad esperada de la cartera de títulos con riesgo óptima para este inversor.

La frontera eficiente cuando existe la posibilidad de incorporar activos libres de riesgo es una recta, para cuya determinación se requieren 2 puntos: uno será el de la tasa libre de riesgo $(0;R_f)$ y el otro sobre la frontera eficiente y que haga que la pendiente sea máxima. Para hallarla se plantea el sistema ([9]) :

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 - R_f \\ E_2 - R_f \\ E_3 - R_f \end{bmatrix} \qquad \text{(D)}$$

y designando con:

$$V = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}$$

[9] MESSUTI, Domingo Jorge; ÁLVAREZ, Víctor Adrián y GRAFFI, Hugo Romano (1992). *Selección de Inversiones, introducción a la teoría de la cartera (portfolio theory)*. Buenos Aires, Macchi, 1992.

$$Z=\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}$$

$$E-R_f=\begin{bmatrix} E_1-R_f \\ E_2-R_f \\ E_3-R_f \end{bmatrix}$$

entonces (D) se puede expresar en forma compacta como:

$$V.Z=E-R_f$$

Entonces suponiendo que $|V|\neq 0$ (V admite inversa)

$$V^{-1}.(E-R_f)=Z$$

y para hallar el vector $W=\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix}$

se procede a hallar el múltiplo escalar del vector Z

$$W=\frac{1}{\sum_{i=1}^{3} Z_i}.Z$$

En nuestro caso:

$$V^{-1}=\begin{bmatrix} 0{,}07563051 & -0{,}01050848 & 0{,}000010186 \\ -0{,}01050848 & 0{,}00847469 & -0{,}00016977 \\ 0{,}000010186 & -0{,}00016977 & 0{,}00040404 \end{bmatrix}$$

$$E-R_f=\begin{bmatrix} 12-6 \\ 24-6 \\ 60-6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 18 \\ 54 \end{bmatrix}$$

Resultando que

$$Z=\begin{bmatrix} 0{,}26518043 \\ 0{,}08032622 \\ 0{,}01882359 \end{bmatrix}$$

Por lo que

$$W=\begin{bmatrix} 0{,}7278573 \\ 0{,}2204764 \\ 0{,}05166629 \end{bmatrix}$$

Es decir que el otro punto de la recta es $(s_P^*;E^*)$ donde:

$$s_P^{*2}=W^t.V.W=30{,}5374009664$$

$$s_P^*=5{,}52606559556$$

$$E^*=W^t.E=17{,}1256986$$

Valores que se pueden comprobar que pertenecen a la frontera eficiente al reemplazar en el *Solver de Excel* ® el valor del rendimiento esperado de 17,1256986 o en (B) y (C), por lo que la ecuación de la recta que representa la frontera eficiente en este caso en que se incorpora entre las opciones el activo libre de riesgo es:

$$E_P = R_f + \frac{E^* - R_f}{s_P^*}.s_P$$

es decir:

$$E_P = 0{,}06 + 3{,}08821860778.s_P$$

2.c) Ubicación de los conocimientos en los contenidos curriculares en las asignaturas del Departamento de Matemática

Los conceptos matemáticos: matrices, inversa de una matriz y programación lineal (el algoritmo de Wolfe consiste en aplicar las condiciones de Kuhn y Tucker al problema de la programación cuadrática, reduciendo el problema a otro de programación lineal) son contenidos de la disciplina Álgebra Lineal.

Los modelos de Programación lineal se puede resolver utilizando la herramienta *Solver* de *Excel* ® y la programación cuadrática requiere sólo algunas adaptaciones.

El estudio de optimización de n variables sujeta a restricciones de igualdad y la condición de segundo orden se estudian en Análisis Matemático II.

Optimización sujeta a condiciones de desigualdad (dentro del cual la programación cuadrática es un caso especial) y el estudio de las condiciones necesaria y suficiente de Kuhn y Tucker. Formas cuadráticas, estudios de funciones, estática comparativa, teorema de la envolvente se estudia en Matemáticas para Economistas.

Para los alumnos que no tienen como requisito Análisis Matemático II ni Matemáticas para Economistas que son la mayoría, el tratamiento de estos temas pudiera ser encarado presentando el modelo de la frontera eficiente utilizando programación cuadrática mediante el *Solver* de *Excel* ® lo que permite de manera intuitiva y aplicativa asimilar los fundamentos en que se basa el modelo.

Los conceptos estadísticos: variable aleatoria, valor esperado. varianza, covarianzas, regresión lineal simple, supuestos del métodos de estimación de mínimos cuadrados ordinarios (MCO), coeficientes de correlación lineal y distribución de probabilidades están en su mayor parte incluidos en los contenidos curriculares de la disciplina estadística.

El concepto de covarianza no está enunciado explícitamente en el programa pero puede considerarse dentro del tratamiento de la varianza para una distribución bivariada, como también en la explicación de la regresión lineal simple.

Tampoco se mencionan de manera explícita los supuestos de Gauss Markov del método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO). El tratamiento completo de los modelos de regresión y el levantamiento de los supuestos es contenido de la asignatura de Econometría y en parte de Estadística II y Estadística para Administradores.

2.d) Evaluación de la correspondencia entre conocimientos necesarios y contenidos curriculares

La mayoría de los alumnos que cursan la disciplina Administración Financiera corresponden a las carreras de Contador Público y de Licenciado en Administración, siendo la participación de alumnos de otras carreras muy escasa por poseer un número menor de alumnos inscriptos en las mismas (Actuario y Licenciado en Sistemas de Información Administrativos). Los alumnos de la carrera de Licenciado en Economía no tienen la disciplina en su plan de estudios.

De lo expuesto en 2.c se puede evaluar que aquellos que no han cursado Análisis Matemático II y Matemáticas para Economistas, es decir, que sólo cuentan con al aprobación previa de las disciplinas Análisis Matemático I, Cálculo Financiero, Estadística General y Álgebra Lineal no pueden responder de manera integral el caso propuesto. Tal es el caso de los estudiantes de las carreras de Contador Público Nacional, de Licenciado en Administración y de Licenciado en Sistemas de Información Administrativos.

No pueden responder completamente las preguntas a, b, c y d.

Pero si pueden responder las preguntas e y f con sólo extender el desarrollo de la programación lineal a la programación cuadrática y resolver mediante la utilización del software *Solver de Excel* ® (en este caso la utilización de la tecnología de software matemáticos resulta de utilidad pero el alumno no puede reproducir ni comprender las operaciones realizadas).

Además con este procedimiento se pueden verificar distintos puntos de la frontera eficiente ya se trate que las ponderaciones W_i (i=1,2,3) sean o no negativas (se permiten ventas en descubierto).

Con el conocimiento de inversión de matrices se puede hallar la frontera eficiente en el caso de que se introduzcan activos sin riesgo.

Si bien pueden no haberse enunciado los supuestos de Gauss Markov de Mínimos Cuadrados Ordinarios (CMO), desde el punto de vista operativo los alumnos están en condiciones de calcular manualmente y mediante la operación del *Excel* ® las regresiones requeridas.

Finalmente, podemos afirmar que la aprobación previa de las disciplinas de Análisis Matemático II y de Matemática para Economistas resultaría necesaria para la plena comprensión de la Teoría de la Cartera.

La comprensión mínima imprescindible a los efectos aplicativos requeriría algunos contenidos de las disciplina Análisis Matemático II, que la mayoría de los alumnos habilitados para cursar no los posee de acuerdo con los planes de carrera vigentes (Plan 1997).

Entre ellos cabe destacar las Unidad Temáticas III Derivadas Parciales, V Funciones Compuestas e Implícitas, VII Extremos. Que para aquellos que cursan Matemática para Economistas son profundizados en la Unidad Temática II titulada Optimización de Funciones de n variables y m restricciones.

En síntesis, respecto a los conocimientos de matemática y estadística previos a la disciplina Administración Financiera es posible afirmar que,

La gran mayoría de los alumnos (provenientes de las carreras de Contador Público Nacional, Lic. en Administración y Lic. en Sistemas de Información Administrativos) no cuentan los conocimientos básicos de optimización matemática correspondientes al currículo de Matemática para Economistas y de Análisis Matemático II.

Los únicos alumnos que podrían contar con esos conocimientos, en caso que hayan aprobado las materias mencionadas con anterioridad al curso de Administración Financiera, son los estudiantes de la carrera de Actuario en sus dos versiones actuales, economía y administración.

Los estudiantes de la carrera de Licenciado en Economía cuentan con las materias indicadas en el Plan de Estudios para la comprensión de la Teoría de la Cartera pero su Plan de Estudios no incluye a Administración Financiera ni tampoco a Cálculo Financiero.

2.e) Extensiones del problema y propuesta de solución

En todos los casos que resulte necesaria la aplicación de modelos de optimización económica los conocimientos de la disciplina Análisis Matemático II resultan imprescindibles y los de Matemática para Economista recomendables.

Tal es el caso de MICROECONOMIA I (Departamento de Economía) que es común a todas las carreras, donde por carecer de conocimientos matemáticos necesarios enfrentan problemas similares a los señalados para Administración Financiera. La misma circunstancia podría aplicarse a otras asignaturas del segundo ciclo profesional de la carrera de Licenciado en Administración como ser: Administración de la Producción, Teoría de la Decisión, Comercialización y

Planeamiento a Largo Plazo en la medida que la "modelización matemática" se considere pertinente.

Una propuesta para una reforma del Plan de Estudios vigentes podría ser incluir la disciplina Análisis Matemático II en el Segundo Tramo del Ciclo General de todas las carreras (como era en el Plan Curricular anterior) o, como segunda alternativa (¨*second best, but not good*¨) ampliar la carga horaria de Análisis Matemático I para incluir el tratamiento de funciones de varias variables y en particular los modelos de optimización condicionada.

3. Conclusiones y propuestas

A partir de la resolución detallada de un caso aplicado de Teoría de la Cartera se ha corroborado la lista de requerimientos de conocimientos matemáticos y estadísticos necesarios expuestos como apertura del trabajo.

A través del estudio de los Contenidos Curriculares de diversas asignaturas del Departamento de Matemática se han establecido las correspondencias entre los conocimientos y su abordaje académico.

Se ha demostrado que la mayoría de los alumnos habilitados para cursar Administración Financiera no cuentan con los conocimientos básicos para comprender la teoría de la cartera. Sólo los estudiantes de Actuario pueden haber cursado las disciplinas de Análisis Matemático II y Matemática para Economistas previamente, ya que estas asignaturas no son prerrequisitos según el Plan de Estudios.

Finalmente, se ha sugerido como propuesta a ser analizada adecuadamente, la incorporación de la disciplina Análisis Matemático II en el ciclo general (segundo tramo) de todas las carreras o, al menos, agregar los contenidos necesarios en la disciplina Análisis Matemático I ampliando su carga horaria.

ANEXO I
Rendimiento Esperado del *Portfolio*

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 & -24 & -60 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -12 & -1 & 32 & 40 & 16 \\ -24 & -1 & 40 & 288 & 120 \\ -60 & -1 & 16 & 120 & 5000 \end{pmatrix}$$

$$\overline{H}^{-1} = \begin{pmatrix} -1,02444665 & 12,0548398 & 0,05657417 & -0,04765444 & -0,00891972 \\ 12,0548398 & -173,510406 & -1,69672944 & 0,59563925 & 0,10109019 \\ 0,05657417 & -1,69672944 & 0,00111497 & -0,00148662 & 0,00037166 \\ -0,04765444 & 0,59563925 & -0,00148662 & 0,00198216 & -0,00049554 \\ -0,00891972 & 0,10109019 & 0,00037166 & -0,00049554 & 0,00012389 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b} = \begin{bmatrix} -E^{*} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vector de incógnitas:

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix}$$

$$\overline{H}^{-1}.\overline{b} = \begin{bmatrix} +1{,}02444665.E^* - 12{,}0548398 \\ -12{,}0548398.E^* + 173{,}510406 \\ -0{,}05657417.E^* + 1{,}69672944 \\ +0{,}04765444.E^* - 0{,}59563925 \\ +0{,}00891972.E^* - 0{,}10109019 \end{bmatrix}$$

Para los valores de E^* solicitados reemplazados en el vector b, se obtienen los valores del vector incógnita:

1- E^*=12,43 $\overline{H}^{-1}.\overline{b}=$

0,67903204
23,6687479
0,99351255
-0,00329452
0,00978196

2- E^*=15 $\overline{H}^{-1}.\overline{b}=$

3,31185993
-7,31219029
0,84811695
0,1191774
0,03270565

3- E^*=18 $\overline{H}^{-1}.\overline{b}=$

6,38519987
-43,4767096
0,67839445
0,26214073
0,05946482

4- E^*=21 $\overline{H}^{-1}.\overline{b}=$

9,45853981
-79,6412289
0,50867195
0,40510406
0,08622398

5- E^*=24 $\overline{H}^{-1}.\overline{b}=$

12,5318797
-115,805748
0,33894945
0,54806739
0,11298315

6- $E^*=27$ $\overline{H}^{-1}.\overline{b}=$

15,6052197
-151,970268
0,16922696
0,69103072
0,13974232

7- $E^*=29,76$ $\overline{H}^{-1}.\overline{b}=$

18,4326924
-185,241625
0,01308226
0,82255699
0,16436075

ANEXO II
Resolución del Problema por Programación Cuadrática Utilizando Excel ®

Resolución con Solver de Excel ® para $E^* = 12,43$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		W_1	W_2	W_3				
2		0,99351255	-0,00329452	0,00978196				
3		16	144	2500	20	8	60	
4								Función Objetivo(1)
5								16,05455813
6	Sujeto a							
7		12	24	60	12,43	=	12,43 (2)	
8		1	1	1	1	=	1	

Introduciendo los valores de E^* en la celda G7 de Excel ® se obtendrán los distintos valores de W_i (i=1,2,3) y en la función objetivo aparecerá el valor de s_P^2.

(1) F. Objetivo = $W_1^2.s_1^2 + W_2^2.s_2^2 + W_3^2.s_3^2 + 2.W_1.W_2.s_{1,2} + 2.W_1.W_3.s_{1,3} + 2.W_2.W_3.s_{2,3}$

(2) E^*