VARIACIONES CONTINUAS

UNA VISIÓN CONCEPTUAL

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es la revisión conceptual del funcionamiento de las diferentes formas de variaciones; primero en general, para luego, en particular, tratar las variaciones en forma exponencial y sus aplicaciones en la valorización del dinero en el tiempo.

Teniendo presente que la diferencia del valor del dinero en el tiempo (interés) es una función de tipo exponencial y que si, previo al desarrollo de la teoría del análisis financiero, se logra haber entendido el funcionamiento de las variaciones exponenciales el estudio, comprensión y aplicación de la matemática financiera se tornará una cuestión extremadamente sencilla.

En ese sentido es que se ha elaborado este trabajo, el cual se va a referir exclusivamente a las variaciones ciertas y mensurables; en ningún momento se van a considerar aquellas que se suceden sin previsibilidad o certeza en su desarrollo.

PALABRAS CLAVE

Variaciones – Progresiones - Crecimientos: exponencial y continuo -

Biondo, Gustavo Sergio; Contador Público (UNS), Profesor Adjunto de Matemática Financiera (UNS) –gsbiondo@uns.edu.ar

VARIACIONES

Introducción

Una variación es un cambio o transformación que se opera en un objeto, bien o cosa.

Puede sucederse respetando algún tipo de razón, ley o patrón de variabilidad o bien hacerlo en forma aleatoria.

Si lo hace respetando algún tipo de razón o ley, cualquiera que fuere, es posible analizar y estudiar su desarrollo y comportamiento dentro de la certeza que da el conocimiento de la razón.

En tanto que si lo hace en forma aleatoria estamos frente a otro tipo de problema pues se trata de una situación en donde se desconoce la forma que va a tomar en el futuro, es un caso con riesgo o incertidumbre.

A su vez, independientemente de la forma: cierta o aleatoria, estas variaciones pueden ser de tipo creciente, decreciente o darse en forma alternada.

Términos

A cada uno de los valores que la sucesión o serie va tomando en el tiempo se los denomina “términos”; al primero y al último se los llama “extremos”.

Ley o razón de variabilidad

Se entiende que una serie varía con alguna ley o razón de variabilidad si lo hace en forma constante, sea absoluta o relativa.

Puede, a su vez, ser en términos absolutos si la variación es una cantidad fija que se suma/resta a la cantidad inmediata anterior, en tanto que será en términos relativos si la variación (razón) es una cantidad que resulta de la multiplicación del término inmediato anterior por un factor que permanece constante en el tiempo.

Progresiones

Una progresión es una sucesión de números llamados términos.

Es creciente si cada término es mayor que el precedente o decreciente si cada término es menor que el anterior.

Puede suceder que la diferencia sea una cantidad constante en términos absolutos (un sumando) o que sea una constante en términos relativos (un factor).-

Siempre tienen un inicio pero pueden o no tener un fin, luego serán: finitas o infinitas, por ejemplo los números naturales constituyen una sucesión de infinitos términos.

Retroalimentación

Un círculo de retroalimentación es una cadena de relaciones causa-efecto que se cierra sobre sí misma de forma tal que un cambio en cualquiera de los elementos del círculo modifica al elemento original y así sucesivamente.

Un incremento ocasionará un mayor incremento y una reducción implicará una mayor reducción.

Un círculo de retroalimentación positiva puede ser un "círculo virtuoso" o un "círculo vicioso", dependiendo de que el tipo de crecimiento que ocasiona sea deseado o no.

Formas de variar

Variaciones Lineales

Una cantidad varía en forma lineal cuando lo hace (incremento o detrimento) en cantidades constantes.

Por ejemplo una empresa que, mes a mes, construye 1.000 metros de asfalto el crecimiento es una cantidad fija, lo mismo para una persona que mes a mes ahorra una suma fija, p.ej.: $ 1.000,00 en su caja de ahorros.

Variaciones Exponenciales

Una variación es exponencial cuando, en términos relativos, lo hace en forma continua.

Toda función exponencial puede representarse como:

$$\mathbf{f(x) = b^{x}}$$

Dónde:

- "b" es un número mayor que cero y distinto de uno y
- "x" es un número real

No obstante ser la forma exponencial el modo en que se desarrolla el crecimiento en la naturaleza es, paradójicamente, el menos conocido, consecuentemente el menos comprendido.

Por razones que desconozco existe una natural propensión a pensar en forma lineal y no considerando que los cambios se suceden en forma continua.

Esa forma de entender la realidad es una de las principales causas de errores en la toma de decisiones.

PROGRESIONES

Esta ya visto que las progresiones son series de números, valores o cantidades que se suceden en forma correlativa.

Progresión aritmética

Conceptos previos

Una progresión aritmética es una sucesión de números llamados "términos" en la cual cada uno es igual al inmediato anterior mas una cantidad constante, en términos absolutos, llamada "diferencia" o "incremento", también se lo denomina "razón".

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

Al primer y al último término se los denomina "extremos".

Una progresión aritmética puede ser: creciente o decreciente, en tanto la "diferencia" sea positiva o negativa, respectivamente.

El mas simple de los ejemplos de una progresión aritmética es la sucesión de números naturales, donde cada término es igual al inmediato anterior mas "uno".

Cuantía del último término

Si cada término es igual al anterior mas una constante, entonces:

$a_2 = a_1 + c$
$a_3 = a_2 + c = a_1 + c + c = a_1 + 2c$

y así sucesivamente, por lo tanto:

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n-1)\,c}$$

Luego: el último término es igual al primer término multiplicado por la "razón" o "incremento" multiplicada por la cantidad de términos menos uno.

Suma de todos los términos

La suma de la totalidad de sus términos es igual a la semisuma de sus extremos multiplicada por la cantidad de términos:

$$S_n = [(a_1 + a_n) /2] n$$

El mas claro ejemplo de una progresión aritmética es la sucesión de los números naturales pues el segundo es igual al primero mas uno, el tercero igual al segundo mas uno y así sucesivamente.

Progresión geométrica

Conceptos previos

Una progresión geométrica es una sucesión de números llamados "términos" tal que cada uno de ellos es igual al inmediato anterior multiplicado por una cantidad constante "r" llamada "razón".

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

Esa "razón" es una relación que permanece constante en términos relativos.

Al primer y al último término se los denomina "extremos".

Una progresión geométrica puede ser "creciente" o "decreciente" según, respectivamente, la razón sea: $r > 1$ ó $0 > r > 1$.

Dentro de los valores más frecuentes a determinar se encuentran:

- la cuantía de la suma de todos los términos,
- el valor del último término
- la razón.

Razón de variabilidad

Al ser cada término igual al anterior multiplicado por una constante llamada "razón" para conocer su valor debe dividirse un término por el inmediato anterior:

$$q = a_n / a_{n-1}$$

Ultimo término

El último término o "extremo" final será:

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; a_{n-1}, a_n$

$a_2 = a_1\, q$
$a_3 = a_2\, q = a_1\, q\, q = a_1\, q^2$
$a_4 = a_3\, q = a_1\, q^2\, q = a_1\, q^3$

$$\mathbf{a_n = a_1 * q^{n-1}}$$

Para conocer la cuantía del “enésimo” término (último) deberemos multiplicar al primero por la razón tantas veces como términos tenga la sucesión menos uno, es decir se multiplica “n-1” veces.

Suma de todos los términos

La suma de todos los términos es igual a:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_n$

Como cada término es igual al anterior por la razón se puede expresar como:

$S_n = a_1 + a_1\, r + a_2\, r + a_3\, r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1}\, r$

Luego al ser cada término una relación del primero:

$S_n = a_1 + a_1\, r + a_1\, r\, r + a_1\, r\, r\, r + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_1\, r^{n-1}$

$S_n = a_1 + a_1\, r + a_1\, r^2 + a_1\, r^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_1\, r^{n-1}$

Si a ambos miembros los multiplicamos por la razón “r” queda:

$S_n\, r = a_1\, r + a_1\, r^2 + a_1\, r^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 r^n$

Luego si los restamos miembro a miembro:

$S_n - S_n\, r = a_1 + a_1 r + a_1\, r^2 + a_1\, r^3 + \ldots\ldots\ldots + a_1 r^{n-1} – (a_1 r + a_1\, r^2 + a_1\, r^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 r^n)$

Luego, en el segundo miembro, al quitar los paréntesis todos los términos se tornan negativos y, consecuentemente, se anulan o compensan con los términos positivos; solo queda el primero y el último:

$S_n - S_n\, r = a_1 – a_1 r^n$

$S_n (1 - r) = a_1 (1 – r^n)$

$$\mathbf{S_n = a_1 (1 – r^n) / (1 - r)}$$

La suma de la totalidad de sus términos es igual al primer término multiplicado por el cociente resultante de la diferencia entre uno y la razón elevada a la cantidad de términos sobre la razón menos uno.

También puede expresarse como :

$$\mathbf{S_n = a_1 (r^n - 1) / (r – 1)}$$

Ejemplos:

Primero - Dado el caso de un tanque con una capacidad total de 65.535 litros y que en el primer día se vuelca un litro de agua y día a día se agrega una cantidad de líquido igual al doble que la inmediata a la del día anterior se pregunta:

A. en cuántos días estará totalmente lleno y
B. cuántos litros tendrá en la mitad del tiempo que tarda en completarse totalmente

Este es un típico caso de un crecimiento en progresión geométrica a una tasa periódica del 100 %, luego:

Respuestas:

A - Para el caso del llenado total:

Total acumulado = 65.535
La suma en la progresión geométrica es: $S_n = a_1 (1 – r^n) / (1 – r)$

Luego si:

1. El primer término es igual a un litro ($a_1 = 1$)
2. $r = 2$

Entonces la suma será igual a:

$S_n = a_1 (r^n - 1) / (r - 1)$
$65.535 = 2^n - 1$
$65.536 = 2^n$
$n = \ln 65.536 / \ln 2$
$n = 11,09034 / 0,69315$

$$\mathbf{n = 16}$$

La respuesta es que a esa tasa de crecimiento tarda 16 días en llenarse completamente.

<u>B - Para saber cuántos litros tendrá a los ocho días:</u>

Total acumulado = ??

La suma en la progresión geométrica es: $S_n = a_1 (1 – r^n) / (1 – r)$

Luego si:

- ♣ El primer término es igual a un litro ($a_1 = 1$)
- ♣ $r = 2$

Cantidad en ocho días:

$S_n = 1 (2^8 - 1) / (2 - 1)$

S_n = 255 litros

Esa cantidad representa el 0,38911 % del total del tanque

Desarrollo:

Días	Aporte Diario	Acumulado	% Diario sobre el Total
1	1	1	0,00153 %
2	2	3	0,00305 %
3	4	7	0,00610 %
4	8	15	0,01221 %
5	16	31	0,02441 %
6	32	63	0,04882 %
7	64	127	0,097 %
8	**128**	**255**	**0,195 %**
9	256	511	0,390 %
10	512	1.023	0,781 %
11	1.024	2.047	1,562 %
12	2.048	4.095	3,125 %
13	4.096	8.191	6,250 %
14	8.192	16.383	12,500 %
15	16.384	32.767	25,000 %
16	**32.768**	**65.535**	**50,000 %**

Aquí se ve en forma clara que a la mitad del lapso total (el octavo día) no se ha llenado siquiera el uno por ciento del total y el día decimosexto se incrementa en el cincuenta por ciento del total.

Segundo - Otro ejemplo de una progresión geométrica donde cada término también es igual al doble del inmediato anterior:

Si se toma una hoja de papel y se la dobla por la mitad duplica su espesor, si luego se vuelve a doblarla se cuadruplica, o sea es cuatro veces mas grande que al inicio y si así se sigue en forma continua y bajo los supuestos que:

1. Fuera materialmente posible al llegar a doblarlo unas 50 veces y
2. Que la hoja de papel mida medio milímetro de espesor,

La altura que alcanzará al llegar a los 50 dobleces tendrá una extensión superior al medio millón de kilómetros:

$$\mathbf{0{,}0005\ m * 2^{50} = 562.949{,}49\ km}$$

Tercero - El característico caso de la retribución al inventor del juego de ajedrez. Es conocido que el inventor del juego le pidió a su príncipe que le retribuyera abonándole un grano de cereal (supongamos trigo) por el primer casillero, dos por el segundo, cuatro por el tercero y así sucesivamente, duplicando la cantidad de granos casillero a casillero hasta llegar al último o sea al sexagésimo cuarto.

Concretamente le pidió una cantidad igual a la sumatoria de una progresión geométrica de razón dos (q = 2) siendo el primer término igual a uno (1).

Partiendo de la base que tres granos pesan un gramo y que la cantidad total de granos a a pagar es 2 elevado a la 63 se puede hacer el siguiente cuadro de exposición:

Granos	Peso	Detalle
1	0,33	Gramos
3	1,00	Gramos
3.000	1,00	Kilos
3.000.000	1	Tonelada
90.000.000.000	30	Toneladas (un camión)
90.000.000.000.000	30.000	Toneladas (un barco)

Luego: 2^{63} / 90.000.000.000.000 = 102.481.912 barcos

Es decir que para transportar esa cantidad de granos se necesitan mas de cien millones de barcos con una capacidad de 30.000 tn cada uno.

CRECIMIENTO EXPONENCIAL

Introducción

Existe una función muy importante dada su aplicación en el estudio de las finanzas y economía en general, es la de **una constante elevada a un exponente variable** y que se llaman "Funciones Exponenciales" y como tales desempeñan un papel muy importante en las matemáticas aplicadas.

$$\mathbf{f\ (x) = b^x}$$

Donde:

- "**b**" es una constante positiva y distinto que uno, llamada "base" de la función
- "**x**" es un número real cualquiera (exponente de constante positiva "**b**")

El crecimiento de las cantidades que lo hacen en forma exponencial se caracteriza por el hecho de que su ritmo (volumen de crecimiento) es proporcional al tamaño y el que su "razón de cambio" es una constante.

Esta función es creciente y continua.

Su variación, incremento o detrimento, es el resultado de la aplicación de una "razón" o "variable de crecimiento" o "detrimento".

En general no se tiene una acabada comprensión del crecimiento en forma geométrica ni mucho menos del funcionamiento del crecimiento continuo. Ello implica que tampoco se tiene una real apreciación de las consecuencias de la ignorancia de ese desconocimiento, sean variaciones en progresiones geométricas y/o exponenciales.

Es la contundencia de la realidad la que nos lleva a reflexionar sobre la importancia del crecimiento exponencial, por ejemplo: si en una botella hay una bacteria que día a día se duplica y al cabo de 30 días esa botella está llena, se pregunta hasta dónde se habrá llenado la botella al cabo de 29 días ?.

El crecimiento, en general, se puede producir (generar) a consecuencia de dos razones o formas:

- Autónoma o endógena: se reproduce a sí misma desde sí misma –
- Inducida o exógena: el crecimiento no se origina desde la cosa en si misma sino que necesita un efecto externo a ella misma y que redunda en su incremento –

<u>Ejemplos:</u>

- ♣ Autónomo o endógeno:

1. Un grupo de insectos que se duplica cada 30 días.

   Luego: a los 30 días habrá dos insectos por cada uno que existía al inicio, a los 60 días habrá cuatro, luego ocho, dieciséis a los 120 días y así sucesivamente.

2. Una inversión de dinero a 10 años de plazo que genera y capitaliza intereses anualmente.

   Sea, por ejemplo, el caso de una inversión inicial de $ 10.000,00 al 10 % anual que se capitaliza en ese mismo lapso. El dinero invertido crecerá exponencialmente.

   El interés del primer año será el 10% de $ 10.000,00 es decir $ 1.000,00, totalizando $ 11.000,00 en la cuenta. El año siguiente el interés será el 10% de $ 11.000,00 es decir $ 1.100,00, lo que totalizan $ 12.100,00 y así sucesivamente.

- ♣ Inducido o exógeno

  Un tanque de agua que aumenta su volumen por un efecto externo a su propio contenido, por ejemplo que una persona le agregue en forma periódica, o bien el clásico ejemplo de la determinación del precio a pagar a quien inventó el ajedrez.

Análisis del Crecimiento continuo

Conceptos previos

En muchos casos y cosas el crecimiento exponencial puede ser de orden endógeno.

Si así lo es se sucede a consecuencia de una fuerza subyacente en la propia cosa, fuerza que redunda en una variación de su cuantía en el tiempo; p. ej.: todos los seres vivientes de la naturaleza.

Tiempo

Periodos

Analizando en detalle la función “**f (x) = x^n**” para diferentes momentos y expuestos en un eje del tiempo, que se grafica como:

/_____…………….. _____/

0 ……………. n

Al tiempo comprendido entre “cero” y “n” lo llamamos **“período (n)”**

Partimos del momento “cero” con un sujeto que tiene la particularidad de crecer endógenamente, es decir por sí mismo y durante todo el periodo.

A este sujeto, objeto, cosa o bien situado en el momento “cero” lo definimos como “unidad de cuenta” de la especie que estemos considerando, por ejemplo: una bacteria, dinero, etc. y lo mantenemos hasta el momento “n”.

Al estado del tiempo en “cero” lo llamaremos **“momento inicial”** y al estado en “n” lo llamaremos **“momento final”**.

Subperiodos

Se define como **“subperidos (m)”** a cada una de las partes en que se divide el período “n”, son lapsos comprendidos dentro del mismo.

/ / / _/ …………………………………..….……………….. / __ /

0 1 2 3 ..……….........…………..……..…. n-1   n

A su vez cada subperiodo tiene un momento inicial y un momento final.

Dada una cantidad al inicio del subperiodo va a estar expuesta a variaciones, que se van a suceder a medida que transcurra el tiempo, de modo tal que el valor al final de cada uno será diferente al valor dado a su inicio.

Luego si consideramos que cada subperiodo va a tener un momento incial y un momento final: la cantidad en el momento inicial del segundo subperiodo va a ser la final del primero y así sucesivamente.

Variaciones

Dada esa variación en el lapso “0 - n” tendremos dos maneras de ver y, consecuentemente, analizar esa diferencia, a saber:

1. En valores absolutos
2. En valores relativos.

En valores absolutos: el crecimiento entre “0” y “n” será la diferencia de la cuantía del bien en el momento “n” menos la que tenía en el momento “cero”.

En valores relativos: deberemos referenciar esa diferencia a otra vinculada a ella en cualquier momento del tiempo, este caso y para simplificar consideraremos solo dos: al momento inicial y al momento final.

En el momento inicial tendremos una cantidad que llamaremos **“Valor de origen (VO)”** y en el momento final otra cantidad que denominaremos **“Valor final (VF)”**.

Variaciones absolutas

Para saber la variación absoluta restaremos del VF el VO y a esa diferencia la llamaremos **"Incremento (I)"**, luego:

$$\mathbf{I = VF - VO}$$

Variaciones relativas

Para determinar la variación relativa tendremos que referenciar ese "Incremento" a la cantidad inicial o bien a la cantidad final, tomaremos para este caso a la cantidad inicial, luego:

$$\mathbf{(VF - VO) / VO = I / VO}$$

Al ser cantidades de la misma especie se cancela por simplificación la especie de la cual se trata y queda un número.

Por su propia esencia es un número racional – relación, ratio, proporción, etc. – que, por cuestiones de simplicidad, lo expresaremos en forma decimal y lo llamaremos "**tasa de variación (i)**"

Luego:

$$\mathbf{i = I / VO}$$

Esa tasa expresa la variación de la unidad de cuenta (VO = 1) en la unidad de tiempo (n = 1) y por referirse al lapso total es una tasa periódica.

Puede una tasa también ser subperiódica.

Tasa periódica

Esa variación relativa "i" lo será para el período total, luego definimos a esa proporción o ratio como "**tasa de variación periódica**".

Tasa subperiódica

Si lo que queremos es analizar la proporción o tasa en que ha variado el objeto sujeto a análisis en cada subperiodos deberemos buscar una tasa subperiódica.

Existen dos maneras de calcular una tasa subperiódica: en forma lineal o en forma exponencial.

Variación lineal

La forma lineal es una simple división donde se toma como numerador la tasa periódica o **“tasa nominal i”** y como denominador la cantidad de subperiodos “m” existentes.

Es una simple proporción, luego le llamaremos “**tasa proporcional (i/m)**”.

Pero visto está que el crecimiento es continuo, luego exponencial, por lo tanto al ser de ese modo no es válido aplicar un procedimiento lineal para tratar de obtener una tasa que exprese la real variación del subperiodo.

Luego al no ser representativa de la real variación subperiódica el uso de la **“tasa proporcional (i/m)”**, dará como resultado una variación periódica diferente a la magnitud de la tasa expresada para el mismo.

El utilizar esta magnitud como tasa subperiódica en un proceso de crecimiento continuo produce una muy importante consecuencia: es que la variación relativa final para el período “n” será de una magnitud mayor que la tasa nominal de la cual se partió.

Variación exponencial

Decir exponencial es decir que el crecimiento se va adicionando en forma continua al valor inicial, luego el valor final de ese subperiodo pasa a ser el valor inicial del subperiodo siguiente y así sucesivamente.

De manera tal que el crecimiento total es igual a la tasa periódica de la cual se partió.-

Por ello es que esa tasa subperiódica va a expresar en términos relativos, para ese lapso, la misma variación que la tasa periódica para el periodo todo, es decir que esas cantidades (tasas) son equivalentes, por lo tanto a esa tasa subperiódica la llamaremos **“tasa equivalente (i_p)”**.

Analíticamente necesitamos determinar cuál será la tasa subperiódica “i_p” que aplicada a “m” subperiodos “m” de como resultado la tasa “i” periódica.

Si: VF = VO + I

En el momento “cero” es VO,

En el momento “uno” será:

$VF_1 = VO + VO * i_p = VO (1 + i_p)$, luego

$VF_2 = VF_1 + VF_1 * i_p = VF_1 (1 + i_p) = VO (1 + i_p) (1 + i_p) = VO (1 + i_p)^2$

Así sucesivamente hasta que en el momento “n” el VF es:

$$\mathbf{VF = VO (1 + i_p)^m}$$

Luego la variación absoluta será:

$I = VF – VO$

$I = VO (1 + i_p)^m – VO$

$I = VO [(1 + i_p)^m – 1]$

Para el caso que quisiéramos expresarlo como tasa (para el período):

$i = I / VO$

$i = VO [(1 + i_p)^m – 1] / VO$

$i = (1 + i_p)^m – 1$

$1 + i = (1 + i_p)^m$

$(1 + i)^{1/m} = 1 + i_p$

$$\mathbf{(1 + i)^{1/m} - 1 = i_p}$$

Se puede afirmar que esa tasa subperiódica “$\mathbf{i_p}$” respecto al subperiodo es equivalente a la tasa “i” respecto al periodo y se define como **“tasa equivalente”**

Tasa de variación efectiva

Tal lo antes enunciado: si para un periodo (n = 1) se utiliza esa tasa proporcional como un factor que, sumado a la unidad, multiplica a la cantidad inicial “VO” tantas veces como subperiodos “m” tiene el periodo “n” la variación absoluta que se resultará será de una cuantía mayor que la resultante de multiplicar la tasa nominal (periódica) “i” una sola vez para todo el periodo.

$$VO (1 + i/m)^{m\,n} > VO (1 + i)^1$$

Siendo que:

- ♣ VO = 1
- ♣ n = 1

Entonces:

$$(1 + i/m)^m > (1 + i)$$

$$(1 + i/m)^m – 1 > i$$

$$\mathbf{(1 + i/m)^m – 1 = i'}$$

Luego si se parte de una tasa subperiódica y se conoce la cantidad de subperiodos que tiene el periodo se puede determinar la variación efectivamente sucedida, sea en términos absolutos o relativos, veremos que:

$$\mathbf{VO\ [\ (1 + i/m)^{m\,n} - 1\ ] = I}$$

Si lo que se quiere determinar es una tasa para la unidad de de dinero en la unidad de tiempo (VO = 1; n = 1)el resultado va a ser "la efectiva variación relativa (i´)", luego:

$$\mathbf{(1 + i/m)^{m} - 1 = i'}$$

Variaciones instantáneas

Por otra parte si se consideran lapsos supberiodicos cada vez menores "m" tiende a ser cada vez mayor.

Por ejemplo se puede analizar el crecimiento relativo (tasa) de una población en diferentes lapsos de tiempo: primero en una década, luego en cinco años, luego en un año, luego en un mes y así sucesivamente hasta determinar cuál es la tasa de crecimiento en subperiodos menores a un segundo de tiempo; a esta tasa la llamaremos **"tasa instantánea de crecimiento (f)"**.

Luego:

$VF = VO\ (1 + i/m)^{m}$

Si definimos: $x = i/m$

Luego: $m = i\ x$

Así podemos expresar la anterior igualdad como:

$VF = VO\ (1 + i/ix)^{ix}$

$VF = VO\ [\ (1 + 1/x)^{x}]^{i}$

Cuando, a consecuencia de la reducción del lapso de los subperiodos, "*m*" tienda a crecer "*x*" también lo hará.

Conforme "*x*" tome mayores valores y tienda a infinito el resultado de la ecuación $(1 + 1/x)^{x}$ ira siendo mayor pero la tasa de crecimiento de ese incremento tenderá a ser cada vez menor y su resultado probablemente se aproxime a un número finito que, en Cálculo, se lo expresa como el número "*e*".

Este es un número irracional y su valor, expresado con nueve decimales, es 2,718281828.

<u>Puede así afirmarse que:</u>

- ♣ "*e*" es el valor máximo o límite superior para una cantidad que, en las precitadas condiciones, crece en forma continua y

- ♣ que el resultado de una función con ese tipo de crecimiento será de una cuantía aproximada a ese valor.

En nuestro caso cuando “m” tienda a infinito será:

$$\mathbf{VF = VO}\ \boldsymbol{e}^{\mathbf{i}}$$

Este valor final será el máximo que tome la función $(1 + i/m)^{m.}$

En este caso la tasa “i” se denomina “tasa instantánea (b)”

Para determinar la cuantía de la tasa de crecimiento instantáneo debemos partir del supuesto que una tasa periódica produce la misma variación relativa que la tasa instantánea, luego:

$VO (1 + i) = VO\ e^{b}$

$(1 + i) = e^{b}$

$l_n (1 + i) = b\ l_n\ e$

Como el logaritmo natural de *e* es la unidad queda que la tasa de crecimiento instantáneo es:

$$\mathbf{b = l_n (1 + i)}$$

Conclusión

Por todo lo antes visto el crecimiento exponencial es el caso de una variación continua en tanto que una progresión geométrica no crece en forma continua sino que lo hace en tramos.

Luego: una progresión geométrica no es una función exponencial.

En general al crecimiento exponencial no se lo considera con la importancia que merece pues, casi instintivamente, se tiende a pensar en términos lineales y mas aún en el corto plazo.

Pero a medida que transcurre el tiempo y las cantidades siguen aumentando en la misma proporción que las primeras pero ya sobre valores ajustados en los términos previos los resultados que se obtienen son, tal como vimos en los precitados ejemplos, sorprendentes.

Esta conclusión lleva implícitos dos conceptos:

- ♣ tasa de crecimiento

- tiempo

Nota: para ambos cabe la misma consideración y es que pueden permanecer constantes o no. La tasa lo será respecto a su cuantía y el tiempo respecto a su sincronismo, es decir que podrán ser intervalos regulares o irregulares.

VALORIZACION DEL DINERO EN EL TIEMPO

Consideraciones previas

Considerando que la variación del valor del dinero en el tiempo es una función de tipo continuo es necesario tener un claro conocimiento de esa operatoria previo al desarrollo específico de la teoría del cálculo financiero.

El caso particular del dinero, que es una creación humana, su tenencia, lleva implícita esta condición de crecimiento continuo.

Así es que ante la tenencia de un capital existen dos opciones: se invierte o se atesora.

El ejercicio de una de esas dos opciones supone, respectivamente:

1. una renta (será mínima si se corresponde con una inversión sin riesgo) o
2. un costo de oportunidad: la renta mínima dejada de ganar.

Por lo tanto: la tenencia de dinero implica, siempre, la posibilidad de obtener una renta mínima o el costo de no tenerla y es esa relación **-** renta/costo de oportunidad **-** la causa origen del valor del dinero en el tiempo.

La ganancia mínima y el costo mínimo de tener dinero inmovilizado son, siempre y necesariamente, de una misma cuantía pues para ambos casos se puede considerar como tal la renta (interés) que pagan las inversiones sin riesgo, por ejemplo un plazo fijo en el BNA o los bonos a 30 años del tesoro de USA.

La diferencia, no menor, es que la ganancia es una realidad tangible en tanto que la pérdida es un costo de oportunidad.

En este trabajo nos referiremos al modelo de determinación del valor actual neto (VAN) es decir a la sumatoria de todos y cada uno de los valores actuales de todos y cada uno de los movimientos que se sucedan en un flujo de fondos.

Considerando que la variación del valor del dinero en el tiempo es una función continua responderá a la forma: $\mathbf{f(x) = b^x}$.

Para este caso, en particular, lo expresaremos como $\mathbf{(1 + i)^n}$ siendo "**i**" la tasa o variación relativa para cada unidad de capital en cada uno de sus "**n**" términos.

Modelo

Se puede definir un modelo como una representación simplificada de la realidad esperada.

Por lo tanto para que ese planteo sea válido y representativo deberá contener, en si mismo, la forma de responder ante los eventuales cambios que se sucedan a consecuencia de la incidencia de los futuros eventos, tanto internos como externos, durante sus “n” términos de vida.

El plazo de vigencia o tiempo de duración condiciona en forma directa la validez del modelo pues el tiempo se correlaciona en forma directa con el riesgo y éste, a su vez, tiene una directa incidencia en la determinación de la cuantía de la tasa de interés.

Es por ello que para diferentes plazos (tiempo) existen diferentes rendimientos (tasas efectivas) pues si así no fuere todas las inversiones, de igual riesgo, se harían al mismo plazo: el menor posible.

Luego, para que ese modelo sea válido debe llevar implícitamente, en su planteo, dos condiciones respecto a su desarrollo:

- ♣ que el contexto varíe en la misma relación o proporción que la tasa
- ♣ que la tasa sea la misma para todo el lapso de vida

Evidentemente que la experiencia indica que eso no necesariamente es así y menos aún a partir del mediano plazo pues el contexto variará en función de los cambios que se sucedan en los usos y modalidades.

Cambios que se suceden a consecuencia, entre otros, del conocimiento y su inmediata incidencia en la tecnología, las modas, costumbres, cambios en las prioridades de las necesidades, etc., etc.

Por otra parte la tasa de crecimiento no va a permanecer constante pues está permanentemente expuesta a la afectación de variables externas, algunas serán las mismas que afectan al contexto y otras propias de sí mismas.

Si lo que se quiere es proyectar una situación actual o analizar hoy una situación futura el planteo o modelación del problema debe, necesariamente, contemplar al universo total – contexto - en donde se desarrollaran ese o esos eventos.

Es de fundamental importancia considerar que no está correctamente planteado el problema si no se lo hace en consideración al conjunto y es, a su vez, sostenible en el tiempo.

Luego, el nuevo problema o cuestión a analizar y resolver es qué o cuáles son las variables que se deben agregar al modelo original de manera tal que sea válido en el tiempo pues <u>será válido si y solo si se verifica en sus límites.</u>

Incertidumbre y riesgo

Introducción

La incertidumbre es consecuencia del desconocimiento y si, por otra parte, lo que se desea es tomar una decisión en función de la posibilidad de acontecimientos futuros se debe, en primer instancia, tratar de reducir al mínimo ese espectro de ignorancia.

Así es que previo a la toma de una decisión lo que corresponde es estudiar, analizar y evaluar las variables y/o alternativas - en el marco del actual conocimiento - a la luz de las posibilidades de su acontecimiento.

A medida que se analizan y estudian las variables y sus consecuencias la incertidumbre tiende a disminuir pero nunca se está en la total certeza del acontecimiento (o no) de un suceso. El futuro por definición es incierto.

Se logra así, con el estudio, reducir el grado de incertidumbre y si se toma una decisión lo que realmente se está haciendo es asumir una conducta frente al futuro. Se está, implícitamente, asumiendo un riesgo.

El riesgo es la alternativa o posibilidad, de error o fracaso que se asume en la toma de una decisión.

Luego el riesgo es el resultado de la combinatoria de un sinfín de variables y datos: algunos mensurables o acotables, otros no, algunos conocidos, otros estimados, lo sean en forma subjetiva (en función de alguna variable de mayor o menor conocimiento o previsibilidad) u objetiva, etc.

Riesgo financiero

En el campo financiero, como en todos otros, el tiempo se correlaciona en forma directa con la incertidumbre: a medida que se extiende el plazo el riesgo tiende a tornarse en incertidumbre.

Esta incertidumbre acotada o riesgo asumido se va trasladando inmediatamente a la tasa de interés: a mayor riesgo y/o plazo la tasa de interés tiende a ser mayor.

Esta permanente variabilidad, propia de la falta de certeza en el futuro, se traduce en alteraciones en la cuantificación de la tasa, tanto sube como baja.

Estas constantes variaciones en el tipo o tasa de interés implican un riesgo para la operatoria financiera y a medida que nos alejamos del momento de pago/cobro es cada vez más incierta la tasa de interés a utilizar, hoy, para su valorización.

A manera de ejemplo - de cambios en el contexto - si supusiéramos que San José al nacimiento de Jesús hubiera puesto a interés una cantidad equivalente a un dólar y a la tasa del 2 % anual, capitalizable anualmente, hoy tendría la cantidad de U$S 185.842.700.000.000.000,00 en tanto que si lo hubiera hecho a el uno por ciento (1 %) tendría “solo” U$S 470.974.000,00 –

Evidentemente en ese modelo - teóricamente correcto - hay algo que no se condice con la realidad, algo se le está escapando.

A modo de una primer conclusión se puede afirmar, con certeza, que el modelo o forma de cálculo de análisis por actualización (VAN) es válido para comparar dos o más rentas, de igual riesgo, en tanto sean operaciones ciertas y determinadas, es decir acotadas a un tiempo y/o a una tasa fija, pero si lo que se quiere hacer es la determinación del valor de una renta en algún momento del tiempo se deben asumir como ciertas las variables antes enunciadas, y ello no deja de ser un par de supuestos muy fuertes.

Estructura temporal de la tasa de interés

Dentro de las variables a considerar respecto a la cuantificación de las tasas de interés se encuentra la “estructura temporal de las tasas de interés”.

Este concepto indica que las tasas de interés no son de una misma cuantía para diferentes plazos.

Se ha formulado más de una teoría explicativa, pero quizás la más conocida es la denominada: “*Teoría de la preferencia por la liquidez*”.

Esta teoría está fundada en el supuesto que los inversores prefieren conservar su liquidez, luego a igual riesgo y tasa optarán por los menores plazos posibles en tanto que los tomadores de crédito prefieren tomar créditos a la menor tasa y mayor plazo posible.

Luego por una cuestión de oferta y demanda, a igualdad de riesgo, las tasas tienden a ser mayores a medida que el plazo toma esa tendencia.

De allí que es necesario distinguir entre: incertidumbre y riesgo.

Conclusión

Visto que a medida que la vida o plazo de duración tiende a aumentar el modelo tiende a perder validez pues plazo (tiempo) e incertidumbre se correlacionan en forma positiva.

Se puede afirmar que es en el mismo planteo de la ecuación o modelo donde radica la causa origen de sus propias limitantes.

En nuestro caso, en particular, asumir como válida una misma tasa de interés para el corto, mediano y largo plazo es tomar como cierta una situación que, solo para determinados casos, es así.

El modelo $(1+i)^n$ y es válido para el análisis y determinación de la opción más conveniente para el caso de dos o más alternativas de inversión de igual riesgo pero utilizarlo en forma estática (igual tasa) para determinar el valor de un flujo de fondos es asumir como cierta una realidad que no necesariamente es así.

Dinero

Tasa de interés

Cuantificación de la tasa de interés

Visto esta que la tasa o tipo de interés a utilizar en una operación financiera depende tanto del riesgo de la operatoria como del plazo o modalidad de recupero de la inversión/préstamo.

Es, precisamente, en el transcurso del tiempo (futuro) donde se van a suceder todos los eventos que hoy estamos evaluando.

Por ello es que se debe tener presente que decir que el tiempo es un factor de riesgo es una manera de resumir en una sola expresión una muy compleja y conexa realidad.

Así es también que por tener el riesgo una relación directa y positiva con el tiempo (*el riesgo aumenta a medida que el tiempo o plazo de recupero es mayor*) y con la tasa (*a mayor riesgo mayor ganancia*) la determinación de la cuantía de la tasa a utilizar pasa a ser el centro de atención del análisis.

Luego al momento de realizar un análisis se debe elegir una tasa de interés a la luz de una serie importante de variables y condiciones, las cuales más allá de la cantidad que fueren todas tienen un solo denominador común: que la totalidad de los eventos, los que evaluamos y los que se nos escapan, se van a suceder en el futuro y éste por definición es incierto.

Variables

En el caso particular del dinero la variabilidad está dada por la tasa o tipo de interés.

Luego: es una variación relativa.

Su producido es el interés, que es una variación absoluta. Luego si se lo adiciona al capital inicial se obtiene el "Monto".

El monto es una función exponencial de crecimiento continuo que se expresa como:

$$\mathbf{M = C\ (\ 1 + i\ )^{n}}$$

Donde "M" es el valor alcanzado por el valor actual (**Capital "C"**) a la tasa de crecimiento (**Tasa o tipo de interés "i"**) luego de transcurrido un lapso (**Tiempo "n"**) o período de tiempo.

Sincronismo

Lo primero a considerar es que la tasa de interés este expresada en la misma unidad de cuenta que el tiempo, v.gr.: si la tasa es anual el tiempo debe estar expresado en años, si el tiempo esta expresado en unidades de 30 días la tasa debe ser para 30 días y así sucesivamente.

Esto lleva implícito el concepto de que es posible expresar la tasa de interés en una unidad de cuenta diferente a la cual se considera el tiempo, generalmente mayor.

Consecuentemente hay dos formas de considerar el tiempo: por el lapso total y se lo llama "periodo" o por lapsos comprendidos dentro del mismo (menores) que se los denomina **Subperiodos "m**".

La particularidad de los subperiodos es que son lapsos en los cuales se generan intereses que se suman al capital inicial para así formar el monto de ese subperiodo, el cual pasa a ser el capital inicial del subperiodo siguiente.

Visto esta, entonces, que si la tasa de interés no está expresada en la misma magnitud que el tiempo se debe proceder a su ajuste en función de la unidad de cuenta en que esta expresado el tiempo, procedimiento que se define como "sincronización".

Sincronismo es, entonces, la necesaria compatibilidad que debe existir entre la tasa de interés y el tiempo al cual esta expuesto al capital.

En su desarrollo:

$$M = C\ (\ 1 + i/m\ )^{n*m}$$

Luego si lo que se quiere es determinar el valor del capital conociendo el valor final o monto:

$$C = M\ (\ 1 + i/m\ )^{-n*m}$$

Valorización de un capital

A interés periódico

Por lo antes visto es posible desplazarse en el tiempo tanto en sentido positivo (ir de hoy al futuro) y como así también en sentido negativo (del futuro a hoy u otro momento previo) y determinar el valor de un capital en cualquier momento.

Al primer procedimiento, donde se generan intereses y se pretende obtener un valor final o monto, se lo define como "capitalización" y es el resultado de multiplicar un capital o valor actual por un "factor de capitalización" en tanto que en el segundo caso donde se quitan intereses, para determinar su valor actual se lo denomina "actualización" y es el resultado de la multiplicación de un valor futuro (monto o valor final) por un "factor de actualización".

A interés continuo

Es posible, en un periodo dado, ir reduciendo el lapso del subperiodo de capitalización, es decir que "m" va a tender a ser cada vez mas grande-

Ello va a producir dos efectos en el factor de capitalización: por una parte el exponente va a ser, cuantitativamente, cada vez mayor pero la tasa de interés va a ser cada vez menor.

Por lo antes visto en "Variaciones instantáneas" cuando "m" tiende a infinito el factor de capitalización también tiende a crecer infinitamente, primero lo hace a una tasa creciente para luego hacerlo en una proporción decreciente y así cuando "m" tiende a infinito da como resultado el conocido "número *e*".

Por lo tanto, cuando "m" tiende a infinito la expresión

$$\mathbf{M = C\ (\ 1 + i/m\ )^{n*m}}$$

Se torna en:

$$\mathbf{M = C\ e^{in}}$$

<u>Esta expresión indica el límite máximo del valor que va a tomar M en el transcurso del tiempo.</u>

Comparación

Es importante destacar que, ante tasas de baja cuantía, la diferencia del resultado obtenido por la aplicación de una u otra forma es mínima.

A manera de ejemplo se agrega un cuadro de marcha para el caso de una tasa nominal anual de 0,05 o sea 5,00 % con capitalización que va desde un día hasta 30 años; en el mismo se ratifica empíricamente que las variaciones no son significativas.

En treinta (30) años, para cada un peso invertido, la diferencia existente entre ambos modos de capitalizar, al 5 % nominal anual, es de $ 0,00046038, luego para cada $1.000.000,00 son $ 460,38

Días	**Monto a interes**		**Diferencia por**		**M**	**n**	**m * n**
	Compuesto	**Continuo**	**$ 1**	**$ 1,000,000**			
1	$ 1.00014	$ 1.00014	$ 0.00000	$ 0.01	365	0.00274	1
2	$ 1.00027	$ 1.00027	$ 0.00000	$ 0.02	365	0.00548	2
3	$ 1.00041	$ 1.00041	$ 0.00000	$ 0.03	365	0.00822	3
4	$ 1.00055	$ 1.00055	$ 0.00000	$ 0.04	365	0.01096	4
5	$ 1.00069	$ 1.00069	$ 0.00000	$ 0.05	365	0.01370	5
6	$ 1.00082	$ 1.00082	$ 0.00000	$ 0.06	365	0.01644	6
7	$ 1.00096	$ 1.00096	$ 0.00000	$ 0.07	365	0.01918	7
8	$ 1.00110	$ 1.00110	$ 0.00000	$ 0.08	365	0.02192	8
9	$ 1.00123	$ 1.00123	$ 0.00000	$ 0.08	365	0.02466	9
10	$ 1.00137	$ 1.00137	$ 0.00000	$ 0.09	365	0.02740	10
30	$ 1.00412	$ 1.00412	$ 0.00000	$ 0.28	365	0.08219	30
60	$ 1.00825	$ 1.00825	$ 0.00000	$ 0.57	365	0.16438	60
90	$ 1.01240	$ 1.01241	$ 0.00000	$ 0.85	365	0.24658	90
120	$ 1.01657	$ 1.01657	$ 0.00000	$ 1.14	365	0.32877	120
150	$ 1.02076	$ 1.02076	$ 0.00000	$ 1.44	365	0.41096	150
180	$ 1.02496	$ 1.02496	$ 0.00000	$ 1.73	365	0.49315	180
365	$ 1.05127	$ 1.05127	$ 0.00000	$ 3.60	365	1.00000	365
730	$ 1.10516	$ 1.10517	$ 0.00001	$ 7.57	365	2.00000	730
1,825	$ 1.28400	$ 1.28403	$ 0.00002	$ 21.98	365	5.00000	1,825
3,650	$ 1.64866	$ 1.64872	$ 0.00006	$ 56.46	365	10.00000	3,650
5,475	$ 2.11689	$ 2.11700	$ 0.00011	$ 108.74	365	15.00000	5,475
10,950	$ 4.48123	$ 4.48169	$ 0.00046	$ 460.38	365	30.00000	10,950

Por ello es que, dada su practicidad y considerando al interés como una función constante y continua, es válido utilizar este modo de capitalización, a manera de cálculo del interés pues determina el límite máximo de esa función

Valorización de una renta[1]

Si lo que se quiere es valorizar un flujo de fondos u operatoria donde existe mas de un pago o cobro, o sea una renta, el resultado, sea su valor final o valor actual, será, respectivamente, la sumatoria de una serie de valores finales (montos) o de valores actuales:

[1] A los efectos de este trabajo definiremos como “renta”: a una serie de pagos/cobros.

$$VF = C_1 (1 + i/m)^{n*m}{}_1 + C_2 (1 + i/m)^{n*m}{}_2 + …….. + C_n (1 + i/m)^{n*m}{}_n$$

Suponiendo que:

1. La tasa ya sea expresada en forma proporcional y
2. Todo el proceso se de en la unidad de tiempo (n= 1) pero con “m” subperiodos de capitalización,

El valor final se puede expresar como:

$$VF = C_1 (1 + i)^{m}{}_1 + C_2 (1 + i)^{n*m}{}_2 + …….. + C_n (1 + i)^{n*m}{}_n$$

Su valor actual será:

$$VA = C_1 (1 + i)^{-m}{}_1 + C_2 (1 + i)^{-m}{}_2 + …….. + C_n (1 + i)^{-m}{}_n$$

Este modelo es válido para cualquier suma de dinero que se trate, cualquiera sea la tasa de interés e independiente de la cantidad de veces que capitalice, términos, o tiempo de duración.

Esa diferencia - quita o adición - entre el valor actual o valor final y la sumatoria de los valores nominales, es el valor que se asume como aceptable para diferir la suma de dinero en el tiempo.

Por lo tanto, necesariamente, son valores cuantitativamente diferentes y se los define como sumas o cantidades equivalentes y es la tasa o tipo de interés el “motor” o “fuerza” que torna a esas dos o mas cantidades en sumas equivalentes.

Obviamente que para este caso caben las mismas consideraciones respecto a la utilización del modo de capitalización contínua.

Conclusiones

Respecto a la valorización

Así es que se puede afirmar que el modelo implícito en esa ecuación es teóricamente válido y sostenible en el tiempo en tanto y en cuanto se den las siguientes condiciones:

- ♣ Que se pueda utilizar la misma tasa de interés para todos y cada uno de sus términos, es decir para cualquier momento del tiempo en que se desarrolla su análisis o modelación y

♣ Que no sea afectado por las variaciones del contexto, es decir que las variaciones se sucedan en la misma magnitud que la tasa de interés y sincrónicamente a ella.

Esas variantes que escapan al modelo, tal como esta planteado, pueden ser de dos tipos, o la combinación de ellas: endógenas y/o exógenas.

La primera es una condición de tipo interno, es decir que la tasa de interés utilizada que es fija, sea válida y representativa para cualquier momento del tiempo en que se suceda el evento (cobro/pago) y la segunda condición es de tipo externo: que con el devenir del tiempo el contexto siga siendo estable, relativamente, respecto al tipo o tasa de interés.

Pero ello no siempre es así.

Respecto a las tasas de interés: no es la misma tasa a utilizar para diferentes momentos del tiempo y sobre el contexto: es un supuesto muy fuerte asumir que en el transcurso del tiempo todo se va a mantener, relativamente, constante (ceteris paribus).

Por lo tanto el modelo se verá limitado en su aplicación y uso.

De lo antes dicho se puede afirmar que la única limitante para el modelo o forma de valorizar un flujo de fondos es la tasa de interés pues el mismo problema subsiste para cualquiera suma de dinero y lo es en forma independiente del modo de capitalización y tiempo del flujo de fondos o vida de la renta.

Se puede concluir que el modelo de capitalización $(1 + i)^n$ y su correspondiente de actualización $(1+i)^{-n}$ presenta serias dificultades para su utilización como herramienta de análisis y/o valorización de flujos de fondos (inversiones, rentas y/o proyectos) que se desarrollen en mas de un momento (etapa o término) en tanto que si es válido para comparar alternativas de igual composición (periodos, subperiodos y tasa de interés).

COMPARACIONES ENTRE PROGRESIONES GEOMÉTRICAS E INTERES

Introducción

Tanto el interés como las progresiones geométricas son funciones exponenciales, luego: operan del mismo modo.

En ambas operaciones la determinación de la variación está dada de la misma forma: una constante en términos relativos, pero la forma en que se genera el incremento o mayor valor no es la misma, pues el crecimiento en una progresión geométrica no es continuo en tanto que en el interés el crecimiento si lo es.

En el interés el mayor valor se produce, término a término, por una "fuerza interna" (endógena): es el propio capital que crece en tanto que en la progresión geométrica es necesario que una "fuerza externa" (exógena) produzca el incremento.

En el interés el aporte, obviamente, debe realizarse al inicio del subperiodo, es decir es de tipo "adelantado", pues caso contrario en ese lapso no se generaría interés alguno en tanto que en la progresión es indistinto el momento en que se realiza el aporte pues al no generar intereses no interesa el momento en que se realiza en tanto y en cuanto este realizado al vencimiento del término.

Distinto es el caso de una imposición, pues esta puede ser de pago adelantado o vencido.

Valor del último término de una progresión geométrica y el monto

Vista la forma en que se desarrollan ambas progresiones y que:

- El valor del último término de una progresión geométrica es: $a_1 * q^{(n-1)}$
- El valor final de una inversión a interés es: $C (1+i)^n$

Suponiendo que:

- el primer término en la progresión geométrica "a_1" sea igual al capital "C",
- la razón de variabilidad "q" sea igual al factor "(1 + i)" y
- la cantidad de términos/tiempo "n" sea el mismo

La única diferencia estará dada en la cuantía del exponente: la cantidad de veces en que se incrementan los términos en la progresión geométrica o bien, en el interés, la cantidad de veces que se capitaliza.

Conclusión:

Por lo tanto si la cantidad de términos es la misma y suponiendo que la tasa de interés sea igual a la razón de la progresión la diferencia esta dada por el modo y momento en que se realiza el aporte y ello se manifiesta en que el exponente de esta última tiene una unidad menos.

Esto que pareciera ser una diferencia menor no lo es pues hace que en el interés exista un término de capitalización más que en la progresión.

A manera de ejemplo se desarrolla el caso de una progresión de 20 términos a una razón del 100 % y así también el caso de interés por el mismo lapso y a la misma tasa, como se observa el monto siempre es mayor que el último término y su diferencia es igual a una capitalización.

DESARROLLO DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA E INTERES			
Tasa/razón:	100,00%		
Términos/n	Ultimo término PG	Monto	Diferencia
1	1,00	2,00	1,00
2	2,00	4,00	2,00
3	4,00	8,00	4,00
4	8,00	16,00	8,00
5	16,00	32,00	16,00
6	32,00	64,00	32,00
7	64,00	128,00	64,00
8	128,00	256,00	128,00
9	256,00	512,00	256,00
10	512,00	1.024,00	512,00
11	1.024,00	2.048,00	1.024,00
12	2.048,00	4.096,00	2.048,00
13	4.096,00	8.192,00	4.096,00
14	8.192,00	16.384,00	8.192,00
15	16.384,00	32.768,00	16.384,00
16	32.768,00	65.536,00	32.768,00
17	65.536,00	131.072,00	65.536,00
18	131.072,00	262.144,00	131.072,00
19	262.144,00	524.288,00	262.144,00
20	524.288,00	1.048.576,00	524.288,00

Se ha tomado una tasa del 100 % para reflejar de una manera clara la incidencia del efecto exponencial: al principio la diferencia no es significativa en términos absolutos y a medida que se incrementa la cantidad de iteraciones va tomando valores importantes, independientemente de ser siempre el cien por cien del importe inmediato anterior en la progresión.

Valor de la sumatoria de una progresión geométrica y el valor final de una imposición vencida

Visto que el valor de la sumatoria de los términos de una progresión geométrica es igual a:

$$\mathbf{Suma = a_1 \, (q^n - 1) / (q - 1)}$$

Siendo "a_1" el primer término, "q" la razón de variabilidad y "n" la cantidad de términos que tiene la progresión.

Considerando que la razón de variabilidad "q" es igual a la unidad de cuenta mas la tasa de variación "r", o sea que:

$q^n = (1 + r)^n$, luego:

Suma = $a_1 \, [(1 + r)^n - 1)] / (1 + r - 1)$, por lo tanto:

$$\mathbf{Suma = a_1 \, [(1 + r)^n - 1)] / \; r}$$

Y que la forma de determinar el valor final de una imposición vencida es:

$$\mathbf{S_n = a_1 \, [(1 + i)^n - 1)] / \; i}$$

Conclusion:

Se puede concluir que para el caso que la tasa de interés sea igual a la tasa de crecimiento de la progresión geométrica el valor final de una imposición vencida es igual al valor de la sumatoria de los términos de una serie que crece en progresión geométrica.

A manera de ejemplo se desarrolla comparativamente el caso de una progresión geométrica de 15 términos a una razón del 10 % y una imposición vencida por el mismo lapso y a la misma tasa. Como se observa la suma (el total acumulado) al final de cada término de la progresión geométrica es igual valor final que tiene en cada término la imposición.

CUADROS COMPARATIVOS DEL VALOR FINAL DE UNA PROGRESION GEOMETRICA Y UNA IMPOSICION VENCIDA						
PROGRESION GEOMETRICA			**IMPOSICION**			
Término	Importe	Suma	Cuota	Sujeto a interes	Interes	Valor Final
1	$ 100.00	$ 100.00	$ 100.00	$ -	$ -	$ 100.00
2	$ 110.00	$ 210.00	$ 100.00	$ 100.00	$ 10.00	$ 210.00
3	$ 121.00	$ 331.00	$ 100.00	$ 210.00	$ 21.00	$ 331.00
4	$ 133.10	$ 464.10	$ 100.00	$ 331.00	$ 33.10	$ 464.10
5	$ 146.41	$ 610.51	$ 100.00	$ 464.10	$ 46.41	$ 610.51
6	$ 161.05	$ 771.56	$ 100.00	$ 610.51	$ 61.05	$ 771.56
7	$ 177.16	$ 948.72	$ 100.00	$ 771.56	$ 77.16	$ 948.72
8	$ 194.87	$ 1,143.59	$ 100.00	$ 948.72	$ 94.87	$ 1,143.59
9	$ 214.36	$ 1,357.95	$ 100.00	$ 1,143.59	$ 114.36	$ 1,357.95
10	$ 235.79	$ 1,593.74	$ 100.00	$ 1,357.95	$ 135.79	$ 1,593.74
11	$ 259.37	$ 1,853.12	$ 100.00	$ 1,593.74	$ 159.37	$ 1,853.12
12	$ 285.31	$ 2,138.43	$ 100.00	$ 1,853.12	$ 185.31	$ 2,138.43
13	$ 313.84	$ 2,452.27	$ 100.00	$ 2,138.43	$ 213.84	$ 2,452.27
14	$ 345.23	$ 2,797.50	$ 100.00	$ 2,452.27	$ 245.23	$ 2,797.50
15	$ 379.75	$ 3,177.25	$ 100.00	$ 2,797.50	$ 279.75	$ 3,177.25

BIBLIOGRAFÍA

Tajani, Miguel, (1968), *Matemática Financiera*, Octava Edición, Buenos Aires (RA), Cesarini Hnos. Editores

Santandreu, Pol, (1996), *Matemática Financiera*, Barcelona (España) , Ediciones Gestión 2000 S.A.

Gianneschi, Mario A, (2005), *Curso de Matemática Financiera*, Segunda Edición, Buenos Aires (RA), Ediciones Macchi

Yasukawa, Alberto Motoyuki, (2000), Matemática Financiera, Córdoba (RA), Despeignes Editora

Biondo, Gustavo Sergio, (1996), *Valor del Dinero en el Tiempo*, Bahía Blanca (RA), Editorial de la Universidad Nacional del Sur

Baca Urbina, Gabriel, (2003), *Fundamentos de Ingeniería Económica*, México D.F. (México), Mc. Graw Hill

Trejo, César A.(1965), *Matemática General*, Buenos Aires (RA), Kapelusz.

Berlinsky, David (2007), Ascenso Infinito, Breve Historia de las Matemáticas, Buenos Aires (RA), Debate.

Leithold, Louis (1999), Matemáticas Previas al Cálculo, Ciudad de México (México), Oxford

J. Fred Weston y Eugene F. Brigham, (1993), *Fundamentos de Administración Financiera*, Decima edición, México DF, México, Mac Graw Hill Interamericana de México SA.-.-

Richard A. Brealey, Stewart C. Myers y Alan J. Marcus, (1999), *Principios de Dirección Financiera*, Madrid, España, Mac Graw Hill Interamericana de España SA.-

López Dumrauf, Guillermo (2004), *Cálculo Financiero Aplicado (Un Enfoque Profesional)*, Buenos Aires (RA), La Ley

Heussler, Ernest (h) y Paul, Richard S. (1997), *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida*, Octava Edición, México DF, México, A. Simon y Schuster Company.

Hoffmann, Laurence D. y Bradley, Gerald L., (1998), *Cálculo para Administración, Economía y Ciencias Sociales*, Sexta Edición, Santa Fe de Bogotá, Colombia, Mc Graw-Hill, Inc. Interamericana.

John C. Hull, (2002), *Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones*, Cuarta Edición, Madrid, España, Perarson Educación S.A.