Introducción a la Valuación de Opciones con herramientas de Cálculo Estocástico

José M. Bavio *

29 de noviembre de 2009

Resumen

Este trabajo se introducen algunos conceptos del cálculo estocástico para luego desarrollar modelos de valuación de opciones de tipo americano y europeo. Se enuncia una generalización de la fórmula de Black-Scholes y se plantea la fórmula clásica como un caso particular de esta generalización.

Keywords: Cálculo Estocástico, Valuación Opciones, Black-Scholes

*Asistente de Docencia – Universidad Nacional del Sur – *jmbavio@yahoo.com.ar*

Introduccion

Las finanzas en la actualidad han alcanzado un grado de desarrollo tal que muchos la consideran una ciencia en si misma.

Como toda ciencia, se ha definido y (sigue en plena evolución) un método de estudio sistemático y riguroso que permite estudiar esta apasionante disciplina con una rigurosidad antes impensada. En este contexto de gran desarrollo, una de las herramientas que aparecen dentro de las más eficientes para el abordaje financiero es el cálculo estocástico.

El cálculo estocástico es un área dentro de la matemática que estudia entre otras cosas las ecuaciones diferenciales estocásticas. Que no es mas que las ecuaciones diferenciales de siempre, solo que ahora en vez de encontrar una solución determinista a un problema determinístico, se hallan soluciones aleatorias (con alguna probabilidad asociada) a un problema también aleatorio.

El objetivo de este trabajo es tratar de manera introductoria algunos conceptos matemáticos relacionados con el análisis estocástico que permiten aplicaciones en el área de finanzas, específicamente la valuación de opciones.

En la sección 1, se enuncia una serie de definiciones, propiedades y teoremas que se usan fuertemente para justificar resultados de otras secciones subsiguientes.

En la sección 2, se trata de asociar un adecuado modelo matemático a algunos de los conceptos financieros más relevantes para construir una base sobre la que apoyar e interpretar los resultados de la sección 3.

La sección 3 presenta los modelos de valuación de opciones, para el caso americano y europeo. Para lo que se usa todos los resultados de las secciones anteriores.

Cabe destacar que el contenido y la estructura de este trabajo esta fuertemente basado en el capítulo en el libro Stochastic Differential Equations de Bernt ϕksendal [?]

1. Algunas propiedades, definiciones y teoremas

1.1. Definiciones

1. Una filtración (en $(\Omega, \mathcal{F})$) es una familia $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_t\}_{t\geq 0}$ de σ-álgebras $\mathcal{M}_t \subset \mathcal{F}$ tal que
$$0 \leq s < t \ \Rightarrow \mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_t$$

2. Un proceso estocástico $\{M_t\}_{t\geq 0}$ en un espacio de probabilidad $(\omega, \mathcal{F}, P)$ se llama una martingala respecto de la filtración $\{\mathcal{M}_t\}_{t\geq 0}$ (y con respecto a P) si

   i M_t es $\mathcal{M}_t$-medible para todo t.

   ii $E[|M_t|] < \infty$ para todo t.

   iii $E[M_s|\mathcal{M}_t] = M_t$ para todo $s \geq t$

3. Sea B_t un proceso de movimiento browniano 1-dimensional en $(\omega, \mathcal{F}, P)$. Un proceso de Itô (o integral estocástica) es un proceso estocástico X_t en $(\omega, \mathcal{F}, P)$ de la forma
$$X_t = X_0 + \int_o^t u(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)dB_s, \qquad (1.1.1)$$
tal que
$$P[\int_0^t |u(s,\omega)|ds < \infty \text{ para todo} t \geq]0 = 1 \qquad (1.1.2)$$

4. Una medida $Q \ \sim \ P$ tal que el proceso normalizado $\overline{X}(t)_{t\in[0,T]}$ es una martingala respecto de Q se llama una medida martingala equivalente.

5. Un pago contingente es una variable aleatoria acotada inferiormente $\mathcal{F}_T^{(m)}$-medible $F(\omega) \in L^2(Q)$. Significa que en el tiempo T se nos pagará la cantidad $F(\omega)$.

1.2. Resultados

1. Sea F una variable aleatoria $\mathcal{F}_T^{(m)}$-medible y sea $B(t)$ un movimiento browniano m-dimensional. Existe $\phi \in \mathcal{W}^m$ tal que

$$F(\omega) = \int_0^T \phi(t,\omega) dB(t) \tag{1.2.1}$$

2. Suponga que un proceso $u(t,\omega) \in \mathcal{V}^m(0,T)$ satisface la condición

$$E\left[exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T u^2(s,\omega)ds\right)\right] < \infty \tag{1.2.2}$$

Definimos la medida $Q = Q_u$ en $\mathcal{F}_T^{(m)}$ por

$$dQ(\omega) = exp\left(-\int_0^T u(t,\omega)dB(t) - \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t,\omega)dt\right] dP(\omega) \tag{1.2.3}$$

Entonces

$$\tilde{B} := \int_0^t u(s,\omega)ds + B(t) \tag{1.2.4}$$

es una $\mathcal{F}_t^{(m)}$-martingala respecto de Q y $F \in L^2(\mathcal{F}_t^{(m)}, Q)$ tiene única representación

$$F(\omega) = E_Q[F] + \int_0^T \phi(t,\omega)d\tilde{B}(t), \tag{1.2.5}$$

donde $\phi(t,\omega)$ es un proceso $\mathcal{F}_t^{(m)}$-adaptado, (t,ω)-medible m-dimensional que verifica que

$$E_Q\left[\int_0^T \phi^2(t,\omega)dt\right] < \infty \tag{1.2.6}$$

2. Conceptos financieros

2.1. Definiciones

1. Un mercado (matemático) es un proceso de Itô $(n+1)$-dimensional $X(t) = (X_0(t), X_1(t), \ldots, X_n(t))$; $0 \leq t \leq T$ $\mathcal{F}_t^{(m)}$–adaptado. Asumimos que este proceso tiene la forma

$$dX_0(t) = \rho(t,\omega)X_o(t)dt;\ X_0(0) = 1 \tag{2.1.1}$$

y

$$\begin{aligned} dX_i(t) &= \mu_i(t,\omega)dt + \textstyle\sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(t,\omega)DB_j(t) \\ &= \mu_i(t,\omega)dt + \sigma_i(t,\omega)dB(t); \;\; X_i(0) = x_i \end{aligned}$$

donde σ_i es la fila i de la matriz $[\sigma_{ij}]$ de $n \times m$; $1 \le i \le n \in \mathcal{N}$.

2. El mercado $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ se dice normalizado si
3. Un portafolio en el mercado $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ es un proceso estocástico (t,ω)–medible, $(n+1)$–dimensional y $\mathcal{F}_t^{(m)}$–adaptado

$$\theta(t,\omega) = (\theta_0(t,\omega), \theta_1(t,\omega), \ldots, \theta_n(t,\omega)); \;\; 0 \le t \le T \tag{2.1.2}$$

4. El portafolio $\theta(t)$ se dice auto financiado si

$$\int_0^T \{|\theta_0(s)\rho(s)X_0(s) + \sum_{i=1}^{n} \theta_i(s)\mu_i(s)| + \\ + \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n} \theta_i(s)\sigma_{ij}(s)\right]^2\}ds \le \infty \quad a.s \tag{2.1.3}$$

y

$$dV(t) = \theta(t) \cdot dX(t) \tag{2.1.4}$$

es decir

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \theta(s) \cdot dX(s) \text{ for } t \in [0,T] \tag{2.1.5}$$

5. El valor a tiempo t del portafolio $\theta(t)$ esta definido por

$$V(t,\omega) = V^{\theta}(t,\omega) = \theta(t) \cdot X(t) = \sum_{i=0}^{n} \theta_i(t)X_i(t) \tag{2.1.6}$$

donde $\cdot$ significa el producto interno en $R^{n+1}.X_0(t) \equiv 1$.

6. Un portafolio $\theta(t)$ que satisface **??** y que es auto financiado se dice admisible si el proceso de valor correspondiente $V^{\theta}(t)$ es acotado inferiormente en casi todo punto (t,ω). Es decir que existe $K = K(\theta) < \infty$ tal que

$$V^{\theta}(t,\omega) \ge -K \text{ para casi todo } (t,\omega) \in [0,T] \times \omega. \tag{2.1.7}$$

Esta restricción **??** refleja la condición natural en las finanzas reales que impone un límite a la deuda que los acreedores pueden tolerar.

7. Pago contingente es una variable aleatoria acotada inferiormente $\mathcal{F}_T^{(m)}$-medible $F(\omega) \in L^2(Q)$. Significa que en el tiempo T se nos pagara la cantidad $F(\omega)$.

8. Decimos que un pago $F(\omega)$ es alcanzable (attainable) en el mercado $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ si existe un portafolio admisible $\theta(t)$ y un numero real z tal que

$$F(\omega) = V_z^{\theta)} := z + \int_0^T \theta(t)dX(t) \ a.s$$

y de manera que se cumpla que

$$\overline{V}^{\theta}(t) = z + \int_0^T \xi(s) \sum_{i=0}^{n} \theta_i(s)\sigma_i(s)d\tilde{B}(s);\ 0 \leq t \leq T \text{ es una Q-martingala}$$

Si existe un $\theta(t)$ que cumpla esto lo llamaremos portafolio de cobertura de F.

9. El mercado $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ se llama completo si todo T-pago contingente es alcanzable.

2.2. Resultados

1. Supongamos que existe una medida Q en $\mathcal{F}_T^{(m)}$ tal que $P \sim Q$ y que el proceso de precio normalizado $\{\overline{X(t)}\}_{t\in[0,T]}$ es una martingala local con respecto a Q. Entonces el mercado $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ no tiene arbitrage.

2. Supongamos que existe un proceso $u(t,\omega) \in \mathcal{V}^m(0,T)$ siendo $\hat{X}(t,\omega) = (X_1(t,\omega), X_2(t,\omega), \ldots, X_n(t,\omega))$, que cumpla

$$\sigma(t,\omega)u(t,\omega) = \mu(t,\omega) - \rho(t,\omega)\hat{X}(t,\omega) \text{ casi todo } (t,\omega) \tag{2.2.1}$$

y tal que

$$E[\exp(\frac{1}{2}\int_o^T u^2(t,\omega)dt)] < \infty \tag{2.2.2}$$

Entonces el mercado $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ no tiene arbitrage.

3. Valuación de Opciones

3.1. Opciones Europeas

Sea $F(\omega)$ un pago contingente. Una opción europea sobre el pago F es una garantía de recibir la cantidad $F(\omega)$ en el tiempo $t = T$. ¿Cuánto se estaría dispuesto a pagar a tiempo $t = 0$ por esa garantía?

Se puede seguir el siguiente razonamiento:

Si yo -el comprador de la opción- pago el precio y de esta garantía, entonces tengo una fortuna inicial $-y$ en mi estrategia de inversión. Con esta fortuna inicial (fortuna negativa) debe ser posible para mí cubrir a tiempo T el valor $V^{\theta}_{-y}(T,\omega)$. El cual, si se agrega el pago de la garantía $F(\omega)$ debe dar un resultado no negativo.

$$V^{\theta}_{-y}(T,\omega) + F(\omega) \geq 0 \text{ a.s}$$

Entonces el máximo precio $p = p(F)$ que el comprador está dispuesto a pagar es:

$$p(F) = \sup \left\{ \begin{array}{l} y : \text{ Existe un portafolio admisible } \theta \text{ tal que} \\ V^{\theta}_{-y}(T,\omega) := -y + \int_0^T \theta(s)dX(s) \geq -F(\omega) \ \ a.s \end{array} \right\} \qquad (3.1.1)$$

Por otro lado el vendedor de esta garantía puede razonar como sigue:

Si yo -el vendedor- recibo el precio z por esta garantía, entonces la puedo usar como el inicio de mi estrategia de inversión. Con esta fortuna inicial debe ser posible cubrirme a tiempo T con el valor $V^{\theta}_{z}(T,\omega)$ que no es menor que la cantidad $F(\omega)$ que prometí pagar al comprador:

$$V^{\theta}_{z}(T,\omega) \geq F(\omega) \text{ a.s}$$

Por esto el mínimo precio $q = q(F)$ que el vendedor está dispuesto a aceptar es:

$$q(F) = \inf \left\{ \begin{array}{l} z : \text{ Existe un portafolio admisible } \theta \text{ tal que} \\ V^{\theta}_{z}(T,\omega) := z + \int_0^T \theta(s)dX(s) \geq F(\omega) a.s \end{array} \right\} \qquad (3.1.2)$$

Si $p(F) = q(F)$ llamamos a este precio común el precio en $t = 0$ de la opción europea sobre el pago contingente $F(\omega)$.

Dos ejemplos importantes de opciones europeas son:

1. Opción de compra europea (call) donde:

$$F(\omega) = (X_i(T,\omega) - K)^+$$

para algún $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y algún $K \geq 0$.

Esta opción le da a su dueño el derecho (pero no la obligación) de comprar una unidad del activo i al valor específico K (precio de ejercicio) en el tiempo T.

Si $X_i(T,\omega) \geq K$ entonces el poseedor de la opción obtendrá la ganancia $X_i(T,\omega) - K$ a tiempo T, mientras que si $X_i(T,\omega) \leq K$ el dueño no ejecuta su opción y su ganancia es 0.

2. Opción de venta europea (put), le da a su dueño el derecho (pero no la obligación) de vender una unidad de un activo i al precio especificado K a tiempo T. Esta opción le da a su dueño la ganancia

$$F(\omega) = (K - X_i(T,\omega))^+$$

Teorema 3.1 *1. Supongamos que valen las siguientes condiciones:*

a) *existe un proceso $u(t,\omega) \in \mathcal{V}^m(0,T)$ tal que, con $\hat{X}(t,\omega) = (X_1(t,\omega), X_2(t,\omega), \ldots, X_n(t,\omega))$,*

$$\sigma(t,\omega)u(t,\omega) = \mu(t,\omega) - \rho(t,\omega)\hat{X}(t,\omega) \text{ casi todo } (t,\omega) \quad (3.1.3)$$

b)

$$E[\exp(\frac{1}{2}\int_o^T u^2(t,\omega)dt)] < \infty \quad (3.1.4)$$

Y que Q cumple

$$dQ(\omega) = \exp(-\int_0^T u(t,\omega)dB(t) - \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t,\omega)dt)dP(\omega) \quad (3.1.5)$$

Sea F un pago contingente. Entonces :

$$ess\,\text{ínf}\,\xi(T)F(\omega) \leq p(F) \leq E_Q[\xi(T)] \leq q(F) \leq \infty$$

2. Supongamos además a las condiciones en 1., que el mercado $\{X(t)\}$ es completo. Entonces el precio del pago contingente europeo F es

$$p(F) = E_Q[\xi(T)F] = q(F)$$

Demostración 1. Supongamos que $y \in \mathbf{R}$ y que existe un portafolio admisible θ tal que

$$V_{-y}^{\theta}(T,\omega) = -y + \int_0^T \theta(s)dX(s) \geq F(\omega) \text{ a.s}$$

Esta ecuación se puede escribir

$$-y + \int_0^T \sum_{i=1}^{n} \theta_i(s)\xi(s)\sigma_i(s)d\tilde{B}(s) \geq -\xi(T)F(\omega) \text{ a.s} \tag{3.1.6}$$

donde $\tilde{\text{B}}$ es $\tilde{B}(t) := \int_0^t u(s,\omega)ds + B(t)$.

Como $\int_0^T \sum_{i=1}^n \theta_i(s)\xi(s)\sigma_i(s)d\tilde{B}(s)$ es una Q-martingala local acotada inferiormente, es también una supermartingala por. Por ello vale que $E_Q[\int_0^T \sum_{i=1}^n \theta_i(s)\xi(s)\sigma_i(s)d\tilde{B}(s)] \leq 0$ para todo $t \in [0,T]$. Luego, tomando esperanza en (**??**) con respecto a Q obtenemos

$$y \leq E_Q[\xi(T)F]$$

Entonces

$$p(F) \leq E_Q[\xi(T)F]$$

siempre que exista el portafolio θ para algún $y \in \mathbf{R}$. Esto prueba la segunda desigualdad en (**??**). Claramente, si $y < \xi(T)F(\omega)$ para casi todo ω, podemos elegir $\theta = (-y, 0, \ldots, 0)$. Luego la primera desigualdad de (**??**) se cumple. De la misma manera, si existe $z \in \mathcal{R}$ y un portafolio admisible θ tal que

$$z + \int_0^T \theta(s)dX(s) \geq F(\omega) \text{ a.s}$$

entonces al igual que en (**??**)

$$z + \int_0^T \sum_{i=1}^{n} \theta_i(s)\xi(s)\sigma_i(s)d\tilde{B}(s) \geq -\xi(T)F(\omega) \text{ a.s}$$

Tomando esperanza respecto de Q obtenemos que

$$z \geq E_Q[\xi(T)F],$$

siempre que z y θ existan.

Si no existen z ni θ, entonces $q(F) = \infty > E_Q[\xi(T)F]$. ∎

2. Para probar la segunda parte asumimos que el mercado es completo. Por esta completitud podemos encontrar (únicos) $y \in \mathcal{R}$ y θ tales que

$$-y + \int_0^T \theta(s) dX(s) = -F(\omega) \text{ a.s}$$

Es decir,

$$-y + \int_0^T \sum_{i=1}^{n} \theta_i(s)\xi(s)\sigma_i(s) d\tilde{B}(s) \geq -\xi(T)F(\omega) \text{ a.s}$$

Teniendo en cuenta que $\int_0^T \sum_{i=1}^{n} \theta_i(s)\xi(s)\sigma_i(s) d\tilde{B}(s)$
es una Q-martingala obtenemos que,

$$Y = E_Q[\xi(T)F].$$

Luego

$$p(F) \geq E_Q[\xi(T)F]$$

Este resultado combinado con la primera parte del teorema queda lo siguiente

$$p(F) = E_Q[\xi(T)F].$$

Con un argumento similar obtenemos $q(F) = E_Q[\xi(T)F]$. ∎

Como cubrir un "pago alcanzable"

Sabemos que si $V_z^\theta(t)$ es el valor del proceso de un portafolio admisible $\theta(t)$ para el mercado $\{X(t)\}$, entonces $\overline{V}_z^\theta(t) := \xi(t)V_z^\theta(t)$ es el proceso que da el valor de $\theta(t)$ para el mercado normalizado $\{\overline{X}(t)\}$. Entonces tenemos que

$$\xi(t)V_z^\theta(t) = z + \int_0^t \theta(s) d\overline{X}(s) \tag{3.1.7}$$

Si se verifican (??) y (??), entonces si Q y $\tilde{B}$ están definidos como (??) y (??) podemos reescribir esta formula como

$$\xi(t)V_z^\theta(t) = z + \int_0^t \sum_{i=0}^{n} \theta_i(s)\xi(s) \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(s) d\tilde{B}_j(s) \tag{3.1.8}$$

Luego el portafolio $\theta(t) = (\theta_0(t), \ldots, \theta_n(t))$ necesario para cubrir un pago contingente dado F cumple lo siguiente

$$\xi(t,\omega)(\theta_0(t), \ldots, \theta_n(t))\sigma(t,\omega) = \phi(t,\omega)$$

es decir

$$\theta(t) = X_0(t)\phi(t)\Lambda(t), \tag{3.1.9}$$

donde $\phi(t,\omega) \in \mathbb{R}^m$ y cumple que

$$\xi(T)F(\omega) = z + \int_0^T \phi(t,\omega)d\tilde{B}(t) \tag{3.1.10}$$

donde $\theta_0(t)$ esta dado por

$$\begin{aligned} d\overline{V}^{\theta}(t) &= \xi(t)dV^{\theta}(t) + V^{\theta}d\xi(t) \\ &= \xi(t)\theta(t)dX(t) - \rho(t)\xi(t)V^{\theta}(t)dt \\ &= \xi(t)\theta(t)[dX(t) - \rho(t)X(t)dt] \\ &= \theta(t)d\overline{X}(t) \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

En función de esta fórmula es interesante encontrar una expresión explícita para $\phi(t,\omega)$ cuando F es conocido. Existen varios caminos para encontrar esta descripción para el integrando $\phi(t,\omega)$, que se pueden encontrar en [?]. En el caso markoviano sin embargo esto es mucho mas simple.

El modelo de Black-Scoles generalizado

Concentremos en una situación en la que el mercado tiene solo dos activos (securities) $X_0(t), X_1(t)$ donde X_0, X_1 son procesos de Itô de la forma

$$dX_0(t) = \rho(t,\omega)X_0(t)dt \text{ (como antes)} \tag{3.1.12}$$

$$dX_1(t) = \alpha(t,\omega)X_1(t)dt + \beta(t,\omega)X_1(t)dB(t) \tag{3.1.13}$$

donde $B(t)$ es 1-dimensional y $\alpha(t,\omega), \beta(t,\omega)$ son procesos 1-dimensionales en $\mathcal{W}$. Notemos que la solución de **??** es

$$X_1(t) = X_1(0)\exp(\int_0^t \beta(s,\omega)dB(s) + \int_0^t (\alpha(s,\omega) - \frac{1}{2}\beta^2(s,\omega))ds). \tag{3.1.14}$$

La ecuación **??** toma la forma

$$X_1(t)\beta(t,\omega)u(t,\omega) = X_1(t)\alpha(t,\omega) - X_1(t)\rho(t,\omega) \tag{3.1.15}$$

que tiene solución

$$u(t,\omega) = \beta^{-1}(t,\omega)[\alpha(t,\omega) - \rho(t,\omega)] \text{ si } \beta(t,\omega) \neq 0 \tag{3.1.16}$$

Entonces la condición **??** se cumple si y solo si

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \frac{(\alpha(s,\omega) - \rho(s,\omega)^2}{\beta^2(s,\omega)}ds\right)\right] < \infty \tag{3.1.17}$$

En este caso tenemos una medida equivalente de martingala Q dad por **??** y el mercado no tiene arbitraje por el teorema 2 de la seccion **??**. Mas aún podemos decir que el mercado es completo. Luego concluimos por el teorema **??** que el precio en $t = 0$ de una opción europea con retorno dado por un pago contingente F es

$$p(F) = q(f) = E_Q[\xi(T)F], \tag{3.1.18}$$

siempre que esta cantidad sea finita.

Supongamos ahora que $\rho(t,\omega) = \rho(t)$ y $\beta(t,\omega) = \beta(t)$ son determinísticos y que la ganancia $F(\omega)$ tiene la forma

$$F(\omega) = f(X_1(T,\omega))$$

para alguna función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada inferiormente que verifique

$$E_Q[f(X_1(t))] < \infty.$$

Entonces vale por **??** que el precio $p = p(F) = q(F)$ es

$$p = \xi(T)E_Q\left[f\left(x_1 \exp\left(\int_0^T \beta(s)d\tilde{B}(s) + \int_0^T (\rho(s) - \frac{1}{2}\beta^2(s))ds\right)\right)\right].$$

Respecto de la medida Q la variable aleatoria $Y = \int_0^T (\beta(s)d\tilde{B}(s)$ esta distribuida normalmente con media 0 y varianza $\delta^2 := \int_0^T \beta^2(t)dt$ y entonces podemos encontrar una expresión mas explicita para p. Resulta el siguiente:

Teorema 3.2 *(Formula generalizada de Black-Scholes)*
Supongamos que $X(t) = (X_0(t), X_1(t))$ *esta dado por*

$$\begin{aligned} dX_0(t) &= \rho(t)X_0(t)dt; & X_0(0) = 1 \\ dX_1(t) &= \alpha(t,\omega)X_1(t)dt + \beta(t)X_1(t)dB(t); & X_1(0) = x_1 > 0 \end{aligned}$$

donde $\rho(t), \beta(t)$ *son determinísticas y*

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \frac{(\alpha(s,\omega) - \rho(s,\omega)^2}{\beta^2(s,\omega)}ds\right)\right] < \infty \tag{3.1.19}$$

a) Entonces el mercado está libre de arbitraje y es completo. Además el precio en tiempo $t = 0$ *del pago contingente* $F(\omega) = f(X_1(T,\omega)$ *donde* $E_Q[f(X_1(T,\omega))] < \infty$ *es*

$$p = \frac{\xi(T)}{\delta\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x_1 \exp[y + \int_0^T (\rho(s) - \frac{1}{2}\beta^2(s))ds]) \exp(-\frac{y^2}{2\delta^2})dy \tag{3.1.20}$$

donde $\xi(T) = \exp(-\int_0^T \rho(s)ds)$ *y* $\delta^2 = \int_0^T \beta^2(s)ds$.

b) Si $\rho, \alpha, \beta \neq 0$ *son constantes y* $f \in C^1(\mathbb{R})$*, el portafolio autofinanciado* $\theta(t) = (\theta_0(t), \theta_1(t))$ *necesario para replicar a* $F(\omega) = f(X_1(T,\omega))$ *viene dado por*

$$\begin{aligned} \theta_1(t,\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \textstyle\int_{\mathbb{R}} f'(X_1(t,\omega)\exp\{\beta x + (\rho - \frac{1}{2}\beta^2)(T-t)\}) \\ &\quad \exp(\beta x - \frac{x^2}{2(T-t)} - \tfrac{1}{2}\beta^2(T-t))dx \end{aligned}$$

y $\theta_0(t,\omega)$ *esta determinado por* **??** *y* $V^\theta(0) = p$.

Demostración a) La parte a) ya esta probada por lo dicho antes.

b) El portafolio que buscamos se despeja de la expresion $\hat{\theta}(t,\omega) =$
$= X_0(t)\phi(t,\omega)\Lambda(t,\omega)$ y resulta

$$\theta_1(t,\omega) = X_0(t)(\beta X_1(t,\omega))^{-1}\phi(t,\omega)$$

donde $\phi(t,\omega)$ esta dada por

$$\phi(t,\omega) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} E_Q^x[\xi(T-t)h_0(X(T-t))]_{x=X(t)}\sigma_i(X(t)). \tag{3.1.21}$$

con $h(y) = f(y)$ y

$$X_1(t) = x_1 \exp\{\beta \tilde{B}(t) + (\rho - \frac{1}{2}\beta^2)t\}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
&\theta_1(t,\omega) = e^{\rho t}(\beta X_1(t,\omega))^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1}[E_Q^{x_1}[e^{-\rho T} f(X_1(T-t))]]_{x_1=X_1(t)} \\
&\cdot \beta X_1(t,\omega) \\
&= e^{\rho(t-T)}\frac{\partial}{\partial x_1}E[f(x_1 \exp\{\beta B(T-t) + (\rho - \frac{1}{2}\beta^2)(T-t)\})_{x_1=X_1(t)} \\
&= e^{\rho(t-T)}E[f'(x_1 \exp\{\beta B(T-t) + (\rho - \frac{1}{2}\beta^2)(T-t)\}) \\
&\cdot \exp\{\beta B(T-t) + (\rho - \frac{1}{2}\beta^2)(T-t)\}]_{x_1=X_1(t)} \\
&= \frac{e^{\rho(t-T)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{\mathbb{R}} f'(X_1(t,\omega)\exp\{\beta x + (\rho - \frac{1}{2}\beta^2)(T-t)\}) \\
&\cdot \exp\{\beta x + (\rho - \frac{1}{2}\beta^2)(T-t)\}e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}dx
\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

Que es la fórmula que se enuncia en la parte b) del teorema. ∎

Corolario 3.1 *(Fórmula Clásica de Black-Scholes)*

a) Supongamos que $X(t) = (X_0(t), X_1(t))$ es el mercado de Black-Scholes clásico

$$\begin{aligned}
dX_0(t) &= \rho(t)X_0(t)dt; & X_0(0) = 1 \\
dX_1(t) &= \alpha(t,\omega)X_1(t)dt + \beta(t)X_1(t)dB(t); & X_1(0) = x_1 > 0
\end{aligned}$$

donde $\rho, \alpha, \beta \neq 0$ son constantes. Entonces el precio p cuando $t = 0$ de la opción de compra europea que paga

$$F(\omega) = (X_1(T,\omega) - K)^+ \tag{3.1.23}$$

donde $K > 0$ es una constante (el precio de ejercicio de la opción) es

$$p = x_1\Phi(\eta + \frac{1}{2}\beta\sqrt{T}) - Ke^{-\rho T}\Phi(\eta - \frac{1}{2}\beta\sqrt{T}) \tag{3.1.24}$$

donde

$$\eta = \beta^{-1}T^{1/2}(\ln \frac{x_1}{K} + \rho T) \tag{3.1.25}$$

y

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \qquad y \in \mathbb{R} \tag{3.1.26}$$

es la función de densidad de la distribución normal estándar.

b) El portafolio replicante $\theta(t) = (\theta_0(t), \theta_1(t))$ para este pago F en **??** *viene dado por*

$$\theta_1(t,\omega) = \Phi(\beta^{-1}(T-t)^{-1/2}(\ln \frac{X_1(t)}{K} + \rho(T-t) + \frac{1}{2}\beta^2(T-t))) \tag{3.1.27}$$

donde $\theta_0(t,\omega)$ es $\theta_0(t) = V^\theta(0) + \xi(t)A(t) + \int_0^t \rho(s)A(s)\xi(s)ds$ y $V^\theta(0) = p$.

Notemos que en particular, $\theta_1(t,\omega) > 0$ para todo $t \in [0,T]$. Esto significa que podemos replicar la opción de compra europea sin vender en corto.

Demostración a) Esto surge de aplicar la parte a) del teorema **??** a la función

$$f(z) = (z-K)^+.$$

Entonces la integral (**??**) puede ser escrita

$$p = \frac{e^{-\rho T}}{\beta\sqrt{(2\pi T}} \int_{\gamma}^{\infty} (x_1 \exp[y + (\rho - \frac{1}{2}\beta^2)T] - K) \exp(-\frac{y^2}{2\beta^2 T}) dy$$

donde $\gamma = \ln(\frac{K}{x_1}) - \rho T + \frac{1}{2}\beta^2 T$. Este integral se separa en dos partes, las cuales pueden ser reducidas a integrales de la distribución normal estándar completando cuadrados.

b) Esto también surge del teorema **??** parte b). La función $f(z) = (z-K)^+$ no es $\mathcal{C}^1$, pero usando un argumento de aproximación se puede mostrar que la formula **??** vale si representamos f' por

$$f'(z) = \chi_{[K,\infty)}(z).$$

El resto se deduce completando el cuadrado igual que en la parte a) de la demostración.

3.2. Opciones Americanas

La diferencia entre las opciones europeas y las americanas es que en las americanas el comprador de la opción tiene la libertad de elegir cualquier tiempo de ejecutar su opción τ antes o en el tiempo de expiracion T. Este tiempo de ejercicio τ puede ser aleatorio (depende de ω), pero solo de manera tal que la decisión de ejecutar la opción antes o en tiempo T depende solo de la historia hasta el tiempo T. Mas precisamente se requiere que para todo T tengamos

$$\{\omega;\ \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t^{(m)}$$

En otras palabras, τ debe ser un tiempo de parada de $\mathcal{F}_t^{(m)}$.

Un *pago contingente americano* es un proceso aleatorio $\mathcal{F}_t^{(m)}$–adaptado, (t, ω)–medible y acotado inferiormente $F(t) = F(t, \omega);\ t \in [0, T],\ \omega \in \Omega$.

Una opción americana sobre sobre un pago contingente de este tipo $F(t, \omega)$ le otorga a su dueño el derecho (pero no la obligación) de elegir cualquier tiempo $\tau(\omega) \leq T$ como tiempo de ejercicio de la opción. Resultando en un pago $F(\tau(\omega), \omega)$ a su dueño. Sea $F(t) = F(t, \omega)$ un pago contingente americano. Supongamos que nos ofrecen la garantía de pagarnos la cantidad $F(\tau(\omega), \omega)$ en el tiempo $\tau(\omega) \leq T$, que elegimos nosotros (siempre que sea antes de T). ¿Cuanto estaríamos dispuestos a pagar por una garantía de ese tipo?

Si yo -el comprador- pago el precio y de esta garantía, voy a tener una fortuna inicial de $(-y)$(deuda) en mi estrategia de inversión. Con esta fortuna inicial $-y$ debe ser posible encontrar un tiempo $\tau \leq T$ y un portafolio admisible θ tal que

$$V_{-y}^{\theta}(\tau(\omega), \omega) + F(\tau(\omega) \geq 0 \text{ a.s}$$

Por esto el precio máximo $p = p_A(F)$ que el comprador esta dispuesto a pagar es

$$\begin{aligned} p_A(F) = \sup \{y; & \text{tales que existe un tiempo de parada } \tau \leq T \\ & \text{y un portafolio admisible } \theta \text{ tal que} \\ & V_{-y}^{\theta}(\tau(\omega), \omega) := -y + \int_0^{\tau(\omega)} \theta(s) dX(s) \geq -F(\tau(\omega), \omega) \text{ a.s}\} \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Por otro lado, el vendedor puede pensar de la siguiente manera:

Si yo -el vendedor- recibo la cantidad z por una garantía de este tipo, con esta fortuna inicial z debe ser posible encontrar un portafolio admisible

θ que genera un proceso de valor que en cualquier momento no es menor que la cantidad que prometí pagar al comprador. Entonces el precio mínimo $q = q_A(F)$ que el vendedor esta dispuesto a aceptar es

$$\begin{aligned} q_A(F) = \inf \{z;\ & \text{existe un portafolio admisible } \theta \\ & \text{tal que para todo } t \in [0,T] \text{ tenemos que} \\ & V_z^\theta(t,\omega) := z + \int_0^t \theta(s)dX(s) \geq F(t,\omega) \text{ a.s.}\} \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Teorema 3.3 *(Valuación de Opciones Americanas).*

a) Supongamos que valen **??** *y* **??** *y que Q se da como en* **??**. *Sea $F(t) = F(T,\omega)$; $t \in [0,T]$ un pago contingente americano tal que*

$$\sup_{\tau \leq T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)] < \infty \tag{3.2.3}$$

entonces

$$p_A(F) \leq \sup_{\tau \leq T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)] \leq q_A(F) \leq \infty. \tag{3.2.4}$$

b) Supongamos ademas de las condiciones en a), que el mercado $\{X(t)\}$ es completo. Entonces

$$p_A(F) = \sup_{\tau \leq T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)] = q_A(F) \tag{3.2.5}$$

Demostración a) Procedemos de la misma forma que el teorema (**??**). Supongamos $y \in \mathbb{R}$ y que existe un tiempo de parada $\tau \leq T$ y un portafolio admisible θ tal que

$$V_{-y}^\theta(\tau,\omega) = -y + \int_0^\tau \theta(s)dX(s) \geq -F(\tau) \text{ a.s}$$

Igual que antes tenemos que

$$-y + \int_0^\tau \sum_{i=1}^n \theta_i(s)\xi(s)\sigma_i(s)d\tilde{B} = \overline{V}_{-y}^\theta(\tau) = \xi(\tau)V_{-y}^\theta(\tau) \geq -\xi(\tau)F(\tau) \text{ a.s}$$

Tomando esperanza respecto de Q y teniendo en cuenta que $\overline{V}_{-y}(t)$ una Q-supermartingala, obtenemos

$$y \leq E_Q[\xi(\tau)F(\tau)] \leq \sup_{\tau \leq T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)].$$

Como esto se cumple para todo y concluimos que

$$p_A(F) \leq \sup_{\tau \leq T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)]. \tag{3.2.6}$$

De la misma manera, supongamos que $z \in \mathbb{R}$ y que existe un portafolio admisible tal que

$$V_z^\theta(t,\omega) = z + \int_0^t \theta(s)dX(s) \geq F(t) \quad \text{a.s. para todo } t \in [0,T]$$

Entonces, como arriba, si $\tau \leq T$ es un tiempo de parada obtenemos

$$z + \int_0^\tau \sum_{i=1}^n \theta_i(s)\xi(s)\sigma_i(s)d\tilde{B} = \overline{V}_z^\theta(\tau) = \xi(\tau)V_z^\theta(\tau) \geq \xi(\tau)F(\tau) \text{ a.s}$$

Nuevamente calculamos la esperanza en ambos miembros respecto de Q y el supremo sobre todos los $\tau \leq T$ obtenemos que

$$z \geq \sup_{\tau \geq T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)].$$

Y como esta desigualdad se cumple para todo z vale que

$$q_A(F) \geq \sup_{\tau \geq T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)]. \tag{3.2.7}$$

b) Asumamos ademas que el mercado es completo. Eligiendo un tiempo de parada $\tau \geq T$ definimos

$$F_k(t) = F_k(t,\omega) = \begin{cases} k & si \quad F(t,\omega) \geq k \\ F(t,\omega) & si \quad F(t,\omega) < k \end{cases}$$

Pongamos

$$G_k(\omega) = X_0(T)\xi(\tau)F_k(\tau).$$

Entonces G_k es un pago acotado , entonces por completitud podemos encontrar $y_k \in \mathbb{R}$ y un portafolio θ^k que

$$-y_k + \int_0^T \theta^{(k)}(s)dX(s) = -G_k(\omega) \quad \text{a.s.}$$

y que verifique que

$$-y_k + \int_0^T \theta(k)(s) d\overline{X}(s)$$

es una Q–martingala. Entonces por la equivalencia

$$\begin{array}{c} V\theta(t) = V\theta(0) + \int_0^s \theta(s) dX(s) \ ; 0 \leq t \leq T \\ \Updownarrow \\ \xi(t) V^{\theta}(t) = V^{\theta}(0) + \int_0^s \theta(s) d\overline{X}(s); \ 0 \leq t \leq T \end{array} \tag{3.2.8}$$

Tenemos que

$$-y_k + \int_0^T \theta(k)(s) d\overline{X}(s) = -\xi(T) G_k(\omega) = -\xi(\tau) F_k(\tau)$$

y luego

$$\begin{aligned} -y_k + \int_0^\tau \theta(k)(s) d\overline{X}(s) &= E_Q \left[-y_k + \int_0^T \theta(k)(s) d\overline{X}(s) | \mathcal{F}_\tau^{(m)} \right] \\ &= E_Q \left[-\xi(\tau) F_k(\tau) | \mathcal{F}_\tau^{(m)} \right] = -\xi(\tau) F_k(\tau). \end{aligned}$$

De este resultado, obtenemos nuevamente aplicando **??** que,

$$-y_k + \int_0^\tau \theta^{(k)}(s) dX(s) = -F_k(\tau) \text{ a.s.}$$

y concluimos

$$y_k = E_Q[\xi(\tau) F_k(\tau)].$$

Esto muestra que cualquier precio de la forma $E_Q[\xi(\tau) F_k(\tau)$ para algún tiempo de parada $\tau \leq T$ seria aceptable por el comprador de una opción americana sobre el pago $F(t, \omega)$. Por ello

$$p_A(F) \geq p_A(F_k) \geq \sup_{\tau \leq T} E_Q[\xi(tau) F_k(\tau)].$$

Haciendo que $k \to \infty$ obtenemos por convergencia de sucesiones monótonas que

$$p_A(F) \geq \sup_{\tau \leq T} E_Q[\xi(\tau) F_k(\tau)].$$

Queda aun por demostrar que si ponemos

$$z = \sup_{0 \leq \tau \leq T} E_Q[\xi(\tau) F(\tau)] \tag{3.2.9}$$

entonces existe un portafolio admisible $\theta(s,\omega)$ que superreplica $F(t,\omega)$, que cumple

$$z + \int_0^t \theta(s,\omega) dX(s) \geq F(t,\omega) \ \text{ para todo punto } (t,\omega) \in [0,T] \times \Omega. \tag{3.2.10}$$

Los detalles de esta demostración no serán detallados en este trabajo. Remitimos al lector a [**?**].

Conexión con tiempos de parada óptimos

El teorema **??** muestra que valuar las opciones americanas equivale a resolver un problema de tiempos de parada. Em el caso general la solución de este problema se puede expresar en términos del "sobre de Snell". Pero si nos encontramos que el mercado esta modelado con un proceso de difusión de Itô el problema se puede atacar con herramientas mas conocidas. Asumamos que el mercado es un proceso de difusión de Itô $(n+1)$–dimensional $X(t) = (X_0(t), X_1(t), \ldots, X_n(t)); t \geq 0$ de la forma

$$dX_0(t) = \rho(t,\omega) X_o(t) dt; \ X_0(0) = 1 \tag{3.2.11}$$

y

$$\begin{aligned} dX_i(t) = \mu_i(t,\omega)dt + \textstyle\sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(t, X(t)) dB_j(t) \\ = \mu_i(t, X(t))dt + \sigma_i(t, X(t)) dB(t); \ \ X_i(0) = x_i \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

donde ρ, μ_i y σ_{ij} son funciones dadas que satisfacen ciertas condiciones. Mas aun, supongamos que el claim americano $F(t)$ es marcoviano, es decir

$$F(t) = h(X(t)) \tag{3.2.13}$$

para alguna función acotada inferiormente $h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Definamos

$$Y(t) = \begin{bmatrix} s+t \\ X(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+2} \tag{3.2.14}$$

y pongamos

$$g(y) = g(s,x) = x_0^{-1} h(x); \quad x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \diagdown^{n+1} \tag{3.2.15}$$

Entonces el problema de encontrar el precio

$$p_A(F) = q_A(F) = \sup_{\tau \leq T} E_Q[\xi(\tau) F(\tau)] \tag{3.2.16}$$

puede ser considerado como un caso especial del problema general de tiempo de parada. Finalmente si ponemos

$$\Phi(y) = \sup_{\tau \leq \tau_G} E_Q^y[g(Y(\tau)], \tag{3.2.17}$$

donde

$$\tau_G = \text{ínf}\{t > 0; smt \geq T\} = T - s \tag{3.2.18}$$

es el primer tiempo en el que $Y(t)$ sale de la región

$$G = \{(s, x); s < T\} \subset \mathbb{R}^{n+1}, \tag{3.2.19}$$

entonces

$$p_A(F) = \Phi(0, 1, x_1, \ldots, x_n). \tag{3.2.20}$$

Referencias

[1] Bernt ϕksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications* Sixth Edition. Springer, 1985

[2] I. Karatzas, Ocone D. *A generalized Clark representation formula, with application to optomal portfolios* Stochastics and Stochastics Reports, 1991

[3] I. Karatzas *Lectures on the Mathematics of Finance* American Mathematical Society, 1997